

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ:

1. У наредним задацима испитати да ли је $(G, *)$ група. Уколико јесте, проверити да ли је $(G, *)$ Абелова група.

a) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \right\}$ и * множење матрица.

б) $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q} \wedge b \neq 0\}$ и $(a, b) * (c, d) = (a + b^2 c, bd)$.

в) $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \wedge a \neq \frac{1}{2} \right\}$ и * множење матрица.

г) $G = \mathbb{Z}^2 (= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ и $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + ad)$ (Уколико није група, одредити елементе за које постоји инверз).

д) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \wedge ad - bc = 1 \right\}$ и * множење матрица.

ђ) $G = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0, a^2 \neq b^2\}$ и $(a, b, c) * (x, y, z) = (ay + bx, ax + by, cz)$.

2. Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Решити матричну једначину:

$$A(I - 2(X^{-1}B^{-1})^{-1}) = (A^2 + B^2)X,$$

где је I јединична матрица реда 2.

3. Дате су матрице $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ и $R = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Решити матричну једначину

$$PX - 2P = Q^T RX.$$

4. Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Решити матричну једначину:

$$(AB^T)^T - (X^{-1}B^{-1})^{-1} = A^2X.$$

5. Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Решити матричну једначину

$$A(A + B)BX = I,$$

где је I јединична матрица реда три.