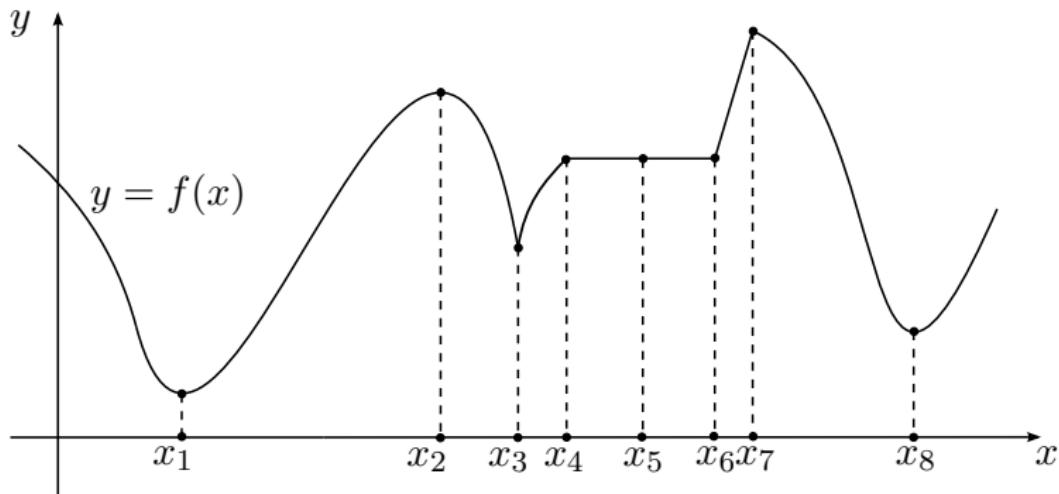


Локални екстремуми

Ако постоји околина U тачке c таква да за свако $x \in U$ важи $f(x) \leq f(c)$ (односно $f(x) < f(c)$), тада функција f има локални максимум (односно строги локални максимум) у тачки c .

Слично се дефинише и локални минимум $((\forall x \in U)f(c) \leq f(x))$, односно строги локални минимум $(f(c) < f(x))$.



Видимо да у датом примеру функција има строги локални минимум у тачкама x_1 , x_3 и x_8 , а строги локални максимум у тачкама x_2 и x_7 . Локални минимум је такође и у тачкама x_6 и x_5 , док је локални максимум у x_4 и у x_5 .

Монотоност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

- ① **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$
- ② **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$
- ③ **опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$
- ④ **строго опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$

Ако функција има било коју од наведених особина, за њу кажемо да је **монотона**.

Нека је функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

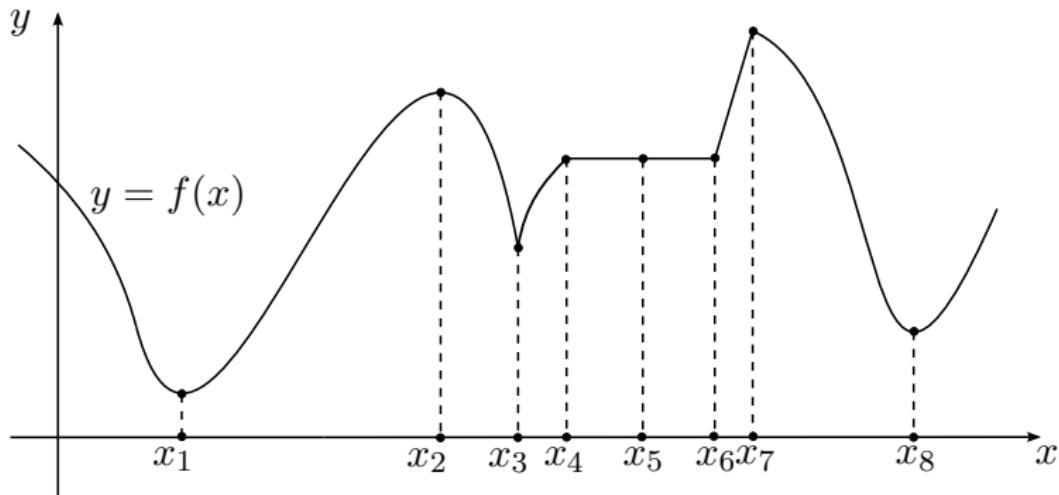
- ① $f'(x) \geq 0$, тада је функција f растућа на (a, b) ,
- ② $f'(x) > 0$, тада је функција f строго растућа на (a, b) ,
- ③ $f'(x) \leq 0$, тада је функција f опадајућа на (a, b) ,
- ④ $f'(x) < 0$, тада је функција f строго опадајућа на (a, b) .

Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\overset{\circ}{U}(c)$. Тада имамо:

- ① Ако за $x \in U$ важи $f'(x) < 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) > 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални минимум у тачки c .
- ② Ако за $x \in U$ важи $f'(x) > 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) < 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални максимум у тачки c .

Кандидате за локалне екстремуме ћемо тражити међу тачкама у којима је $f'(x) = 0$ и онима у којима први извод није дефинисан.

Монотононост



На којим интервалима је функција растућа/строго
растућа/опадајућа/строго опадајућа?

Шта се може рећи о првом изводу функције у тачкама у
којима функција има локални екстремум?

Конвексност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је **конвексна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

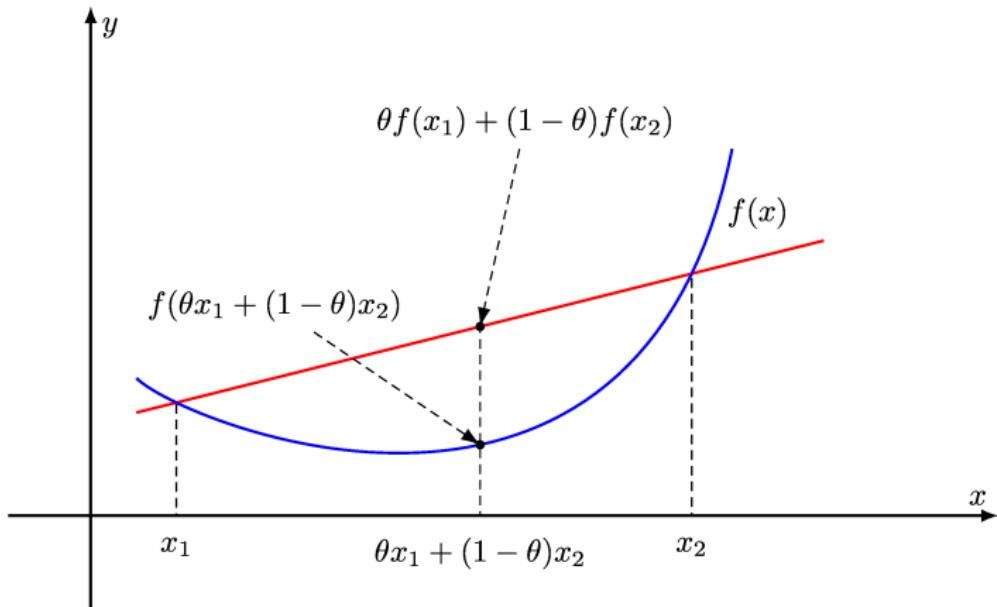
$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2). \quad (1)$$

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је **конкавна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2). \quad (2)$$

Ако у (1), односно (2) стоје стоги знаци неједнакости, онда је функција f строго конвексна, односно строго конкавна.

Конвексна функција



Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b) . Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

- ① $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b) ,
- ② $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b) ,
- ③ $f''(x) \leq 0$, тада је функција f конкавна на (a, b) ,
- ④ $f''(x) < 0$, тада је функција f строго конкавна на (a, b) .

Нека је функција f дефинисана у околини тачке c . Тачка $P(c, f(c))$ је **превојна тачка** криве $y = f(x)$ ако постоји околина тачке c у којој је функција строго конвексна за $x < c$ а строго конкавна за $x > c$ или обрнуто.

Конвексност/конкавност/превојна тачка

