МАТЕМАТИКА 3

• Диференцијалне једначине •

5. час: Системи диференцијалних једначина

Опште решење и први интеграли систем

Општи облик система са n диференцијалних једначина првог реда са n непознатих $x_1 = x_1(t)$,...,$x_n = x_n(t)$ је дат са

$$\left.\begin{array}{c} F_1(t, x_1, x_1', ..., x_n, x_n') = 0 \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, x_1', ..., x_n, x_n') = 0 \end{array}\right\}.$$

Уколико је могуће изразити $x_1', ..., x_n'$ из система, онда имамо *нормални облик* система:

$$\left.\begin{array}{c} x_1' = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(x_1, ..., x_n) \end{array}\right\}.$$

Пошто је $x_1' = \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$, ..., $x_n' = \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$, то се из нормалног облика система може добити и *симетричан облик* система:

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x_1, ..., x_n)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x_1, ..., x_n)}.$$

Опште решење система је дато са

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x_1(t, C_1, ..., C_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t, C_1, ..., C_n) \end{array}\right\},$$

где су $C_1, ..., C_n$ реалне константе. Решење може бити дато и преко тзв. *првих интеграла система,* односно у облику

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1(t, x_1, ..., x_n) = C_1 \\ \vdots \\ \varphi_n(t, x_1, ..., x_n) = C_n \end{array}\right\},$$

где су $\varphi_1, ..., \varphi_n$ функције за које важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_{x_1} & \cdots & (\varphi_1)'_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n)'_{x_1} & \cdots & (\varphi_n)'_{x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

1. Систем диференцијалних једначина

$$\left.\begin{array}{l} 2x' - 5y' = 4y - x \\ 3x' - 4y' = 2x - y \end{array}\right\}$$

записати у нормалном и симетричном облику, а затим га свести на диференцијалну једначину другог реда.

Решење. Ако из датог система изразимо x' и y', добићемо да је

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x - 3y \\ y' &= x - 2y \end{aligned}\right\},$$

што представља нормални облик датог система. Како је $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ и $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, то је

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x - 3y \\ y' &= x - 2y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2x - 3y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x - 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{2x - 3y} &= \mathrm{d}t \\ \frac{\mathrm{d}y}{x - 2y} &= \mathrm{d}t \end{aligned}\right\},$$

одакле добијамо систем у симетричном облику

$$\frac{\mathrm{d}x}{2x - 3y} = \frac{\mathrm{d}y}{x - 2y} = \frac{\mathrm{d}t}{1}.$$

Одредимо сада одговарајућу диференцијалну једначину другог реда. Ако диференцирамо по t другу једначину у систему у нормалном облику, добићемо да је

$$y'' = x' - 2y' = (2x - 3y) - 2(x - 2y) = y,$$

односно добили смо једначину $y'' - y = 0$. Решење ове једначине је $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Пошто је из система $x = y' + 2y$, то добијамо да је $x(t) = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

□

2. Систем диференцијалних једначина

$$\left.\begin{aligned} x'' &= 3x - 4y' \\ y'' &= 3y + 4x' \end{aligned}\right\}$$

свести на систем диференцијалних једначина првог реда, а затим и на једначину вишег реда.

Решење. Две диференцијалне једначине другог реда можемо свести на четири диференцијалне једначине првог реда или на једну једначину четвртог реда.

Ако уведемо функције $u = x'$ и $v = y'$, онда се дати систем може свести на систем

$$\left.\begin{aligned} x' &= u \\ y' &= v \\ u' &= 3x - 4v \\ v' &= 3y + 4u \end{aligned}\right\},$$

што представља тражени систем једначина првог реда.

Одредимо сада диференцијалну једначину вишег реда: Ако другу једначину датог система диференцирамо два пута добићемо

$$y''' = 3y' + 4x'' = 3y' + 4(3x - 4y') = 12x - 13y',$$

односно

$$y^{(4)} = 12x' - 13y'' = 3(y'' - 3y) - 13y'' = -10y'' - 9y,$$

одакле добијамо једначину

$$y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$$

Решавањем ове једначине долазимо и до решења почетног система, јер имамо да је $12x = y''' + 13y'$.

□

3. Свођењем на диференцијалну једначину вишег реда решити систем

$$\left.\begin{aligned} x' &= 1 - \frac{1}{y} \\ y' &= \frac{1}{x-t} \end{aligned}\right\}.$$

Решење. Диференцирањем друге једначине система добијамо

$$y'' = \frac{1-x'}{(x-t)^2} = \frac{1}{(x-t)^2} \cdot (1-x') = (y')^2 \cdot \frac{1}{y},$$

односно имамо једначину другог реда

$$yy'' = (y')^2,$$

којој можемо снизити ред, јер се у једначини не појављује променљива t. Ако уведемо смену $z(y) = y'$, одакле је $y'' = z'z$, добићемо

$$yz'z = z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{z} = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Интеграљењем једноставно добијамо да је $z = C_1 y$. Враћањем смене добијамо једначину $y' = C_1 y$, одакле је $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = C_1\,\mathrm{d}t$, па интеграљењем добијамо $\ln|y| = C_1 t + C$, односно важи $y = C_2 e^{C_1 t}$. Коначно, из друге једначине добијамо

$$x = t + \frac{1}{y'} = t + \frac{1}{C_1 C_2 e^{C_1 t}}.$$

□

Нелинеарни системи диференцијалних једначина

Решаваћемо систем са n непознатих функција и једном променљивом, који ће нам бити дат у симтеричном облику

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\psi_1(x_1, ..., x_n, x_{n+1})} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{\psi_n(x_1, ..., x_n, x_{n+1})} = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{\psi_{n+1}(x_1, ..., x_n, x_{n+1})}.$$

Решење система ће нам бити дато преко n независних **првих интеграла**

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) &= C_1 \\ &\vdots \\ \varphi_n(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) &= C_n \end{aligned}\right\},$$

при чему су ти први интеграли независни ако и само ако важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_{x_1} & \cdots & (\varphi_1)'_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n)'_{x_1} & \cdots & (\varphi_n)'_{x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Приликом одређивања првих интеграла биће нам од користи нека знања о размери, нпр. ако је

$$R = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f},$$

онда је и

$$R = \frac{xa}{xb} = \frac{xa \pm yc}{xb \pm yd} = \frac{xa \pm yc \pm ze}{xb \pm yd \pm zf}.$$

Такође, потребно нам је да знамо и неке особине диференцијала, нпр.

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = \mathrm{d}(x+y), \quad x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2+y^2), \quad y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy),$$
$$x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}(x^3+y^3), \quad \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\ln(xy)), \ldots$$

4. Доказати да једнакости $x+y+t = C_1$ и $x^2+y^2+t^2 = C_2$ представљају независне прве интеграле система

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{t-y}{y-x} \\ y' &= \frac{x-t}{y-x} \end{aligned}\right\}, \quad y \neq x$$

односно представљају решење система.

Решење. Ако прву једначину запишемо као

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t-y}{y-x},$$

имаћемо да је

$$\frac{\mathrm{d}x}{t-y} = \frac{\mathrm{d}t}{y-x}. \tag{1}$$

Слично, из друге једначина добијамо да је

$$\frac{\mathrm{d}y}{x-t} = \frac{\mathrm{d}t}{y-x}. \tag{2}$$

На основу (1) и (2), видимо да се дати систем може записати у симетричном облику на следећи начин:

$$\frac{\mathrm{d}x}{t-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x-t} = \frac{\mathrm{d}t}{y-x}.$$

Приметимо сада да је

$$\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{t-y+x-t} = \frac{\mathrm{d}t}{y-x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x-y} = \frac{\mathrm{d}t}{y-x},$$

односно

$$\mathrm{d}(x+y) = -\,\mathrm{d}t.$$

Интеграљењем добијамо да је

$$x+y = -t + C_1,$$

односно $x+y+t = C_1$, што представља један први интеграл система. Даље, на основу

$$\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x(t-y)+y(x-t)} = \frac{\mathrm{d}t}{y-x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{t(x-y)} = \frac{\mathrm{d}t}{y-x},$$

односно

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = -t\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(x^2+y^2) = -\,\mathrm{d}(t^2).$$

Интеграљењем је даље

$$x^2 + y^2 = -t^2 + C_2,$$

односно $x^2 + y^2 + t^2 = C_2$, што такође представља први интеграл система, као што је у поставци задатка и најављено. Покажимо да су ови први интеграли међусобно независни: Ако је $\varphi_1(x, y, t) = x + y + t$ и $\varphi_2(x, y, t) = x^2 + y^2 + t^2$, онда из

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y - x) \neq 0,$$

следи независност добијених првих интеграла, те они заиста представљају решење датог система. □

5. Налажењем првих интеграла решити систем

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{y}{x-y} \\ y' &= \frac{x}{x-y} \end{aligned}\right\}, \quad x \neq y.$$

Решење. Из прве једначине система добијамо

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{x-y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}t}{x-y},$$

а из друге

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{x-y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{x-y},$$

па закључујемо да се систем може записати у симетричном облику

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{x-y}.$$

На основу

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y,$$

интеграљењем добијамо први интеграл $x^2 - y^2 = C_1$. Такође, из

$$\frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}x}{x-y} = \frac{\mathrm{d}t}{x-y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(y - x) = \mathrm{d}t,$$

добијамо $y - x = t + C_2$ још један први интеграл $y - x - t = C_2$. Ако је $\varphi_1(x, y, t) = x^2 - y^2$ и $\varphi_2(x, y, t) = y - x - t$, тада из

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x - y) \neq 0,$$

закључујемо да су $\varphi_1 = C_1$ и $\varphi_2 = C_2$ независни први интеграли, те је њима одређено решење датог система. Независност првих интеграла се могла закључити и без рачунања детерминанте: Један аргумент је да су φ_1 и φ_2 полиноми различитих степена, а независност следи и из чињенице да се φ_2 зависи од t, док φ_1 не зависи од t. □

6. Решити систем $\dfrac{\mathrm{d}x}{-x^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{xy - 2t^2} = \dfrac{\mathrm{d}t}{xt}$.

Решење. Најпре имамо да је

$$\frac{\mathrm{d}x}{-x^2} = \frac{\mathrm{d}t}{xt} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \Rightarrow -\ln|x| + C = \ln|t|,$$

одакле је $\ln|xt| = C$, па добијамо један први интеграл, $xt = C_1$. Даље, из

$$\frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{-yx^2 + x(xy - 2t^2)} = \frac{\mathrm{d}t}{xt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(xy)}{-2xt^2} = \frac{\mathrm{d}t}{xt} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(xy) = -2t\,\mathrm{d}t$$

интеграљењем добијамо $xy = -t^2 + C_2$, односно први интеграл $xy + t^2 = C_2$. Добијени први интеграли су независни јер, нпр. у једном се појављује y а другом не.

□

7. Решити систем $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(y-z)} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y(z-x)} = \dfrac{\mathrm{d}z}{z(x-y)}$.

Решење. Са једне стране имамо

$$\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{xy - xz + yz - xy} = \frac{\mathrm{d}z}{z(x-y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(x+y)}{-z(x-y)} = \frac{\mathrm{d}z}{z(x-y)},$$

одакле је $\mathrm{d}(x+y) = -\,\mathrm{d}z$, односно $x+y = -z+C_1$, па је један први интеграл система $x+y+z = C_1$. Са друге стране, из

$$\frac{\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}{y - z + z - x} = \frac{\mathrm{d}z}{z(x-y)}$$

добијамо да је

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(\ln(xyz)) = 0,$$

одакле је $\ln(xyz) = C$, односно $xyz = C_2$, што представља још један први интеграл система. Независност првих интеграла је јасна, јер су $\varphi_1(x,y,z) = x+y+z$ и $\varphi_2(x,y,z) = xyz$ полиноми различитог степена.

□

8. Решити систем $\dfrac{\mathrm{d}x}{xz} = -\dfrac{\mathrm{d}y}{yz} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xy}$.

Решење. Имамо најпре да важи

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = -\frac{\mathrm{d}y}{yz} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x| = -\ln|y| + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln|xy| = C,$$

одакле закључујемо да је $xy = C_1$ један први интеграл. Добијени резултат ћемо даље користити за добијање још једног првог интеграла: Имамо

$$-\frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{\mathrm{d}z}{C_1} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{C_1} z\,\mathrm{d}z,$$

одакле, интеграљењем добијамо да је $-\ln|y| + C_2 = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{z^2}{2}$. Заменом $xy = C_1$ даље добијамо везу

$$\frac{z^2}{2xy} + \ln|y| = C_2.$$

Ова два прва интеграла су независна (зашто?) па представљају решење датог система.

□

9. Решити систем $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{z+u} = \frac{\mathrm{d}z}{y+u} = \frac{\mathrm{d}u}{y+z}$.

Решење. Приметимо да важи

$$\frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}z}{z+u-y-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

одакле је

$$\frac{\mathrm{d}(y-z)}{y-z} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

па интеграљењем добијамо

$$\ln|y-z| = -\ln|x| + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x(y-z)| = C,$$

односно први интеграл $x(y-z) = C_1$. Аналогно, имамо

$$\frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}u}{y+u-y-z} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(z-u)}{z-u} = -\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

одакле добијамо први интеграл $x(z-u) = C_2$. Истим резоновањем можемо добити и први интеграл $x(y-u) = C_3$, међутим, ова три прва интеграла нису независна (проверити!). Неопходно је да на неки другачији начин доведемо x, y, z и u у везу. Важи

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y + \mathrm{d}z + \mathrm{d}u}{z+u+y+u+y+z} = \frac{\mathrm{d}(y+z+u)}{2(y+z+u)},$$

па интеграљењем добијамо

$$\ln|y+z+u| = 2\ln|x| + C,$$

односно, имамо први интеграл

$$\frac{y+z+u}{x^2} = C_3.$$

За ова три прва интеграла се једноставно утврђује да су независни, па чине решење датог система. □

10. Решити систем $\frac{\mathrm{d}x}{x+y-xy^2} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2y-x-y} = \frac{\mathrm{d}z}{y^2-x^2}$.

Решење. Прве интеграле добијамо на следећи начин:

$$\frac{\mathrm{d}z}{y^2-x^2}=\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x(x+y-xy^2)+y(x^2y-x-y)}=\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$$

одакле је $-2\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}(x^2+y^2)$, односно, након интеграљења, $x^2+y^2+2z=C_1$. Такође,

$$\frac{\mathrm{d}z}{y^2-z^2}=\frac{y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{y(x+y-xy^2)+x(x^2y-x-y)}=\frac{\mathrm{d}(xy)}{(1-xy)(y^2-x^2)},$$

одакле је

$$\int\frac{\mathrm{d}(xy)}{1-xy}=\int\mathrm{d}z\quad\Leftrightarrow\quad-\ln|1-xy|+C_2=z\quad\Leftrightarrow\quad\ln|1-xy|+z=C_2.$$

Добијени први интеграли су независни, па представљају решење система. □