МАТЕМАТИКА 3

• Диференцијалне једначине •

4. час: Линеарне нехомогене једначине са константним коефицијентима

Једначина

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

назива се *линеарна нехомогена диференцијална једначина са константним коефицијентима.*

Заједно са овом једначином, посматраћемо и њој одговарајућу хомогену једначину

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0.$$

Уколико је $y_h = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$ опште решење хомогене, а y_p неко партикуларно решење нехомогене једначине, тада је опште решење полазне једначине дато са

$$y = y_h + y_p = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n + y_p.$$

Видели смо у ранијим задацима како се одређује опште решење хомогене једначине, тако да нам је тежистхте проблема у одређивању партикуларног решења.

Метода неодређених коефицијената

Уколико је функција $f(x)$ наредног, специјалног, облика,

$$f(x) = e^{ax}\left[P_{m_1}(x)\cos bx + Q_{m_2}(x)\sin bx\right], \tag{1}$$

где су $P_{m_1}(x)$ и $Q_{m_2}(x)$ полиноми степена m_1 и m_2, редом, тада је партикуларно решење облика

$$y_p = x^ke^{ax}\left[P^*_m(x)\cos bx + Q^*_m(x)\sin bx\right],$$

при чему су $P^*_m(x)$ и $Q^*_m(x)$ полиноми степена $m = \max\{m_1, m_2\}$, а k вишеструкост корена $a + bi$ у карактеристичној једначини $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$.

1. Решити диференцијалну једначину $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$.

Решење. Одредимо најпре опште решење придружене хомогене једначине $y'' - 2y' + 2y = 0$:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

одакле је тражено решење хомогене једначине

$$y_h = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x.$$

Партикуларно решење y_p дате једначине ћемо одредити методом неодређених коефицијената. Пошто је

$$f(x) = e^x(2\cos x - 4x\sin x) = e^{1x}(2\cos(1x) + (-4x)\sin(1x)),$$

то је, као у уводној причи, $a = 1$, $b = 1$, $P_0(x) = 2$ и $Q_1(x) = -4x$. Пошто је $a+bi = 1+i$ једноструко решење карактеристичне једначине, то је $k = 1$, а $m = \max\{0, 1\} = 1$, те је тражено решење облика

$$y_p = xe^x\left[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right].$$

Коефицијенте A, B, C и D ћемо одредити тако што најпре убацимо y_p, y_p' и y_p'' у једначину. Након нешто дужег рачуна добијамо да је

$$y_p' = e^x \left[\big((A+C)x^2 + (2A+B+D)x + B\big) \cos x + \big((C-A)x^2 + (D-B+2C)x + D\big) \sin x \right],$$

односно

$$\begin{aligned} y_p'' = e^x \big[&\big(2Cx^2 + (4A+4C+2D)x + (2A+2B+2D)\big) \cos x \\ &+ \big(-2Ax^2 + (-4A-2B+4C)x + (2D-2B+2C)\big) \sin x \big]. \end{aligned}$$

Заменом у једначину, након сређивања добијамо да је

$$\cancel{e^x}[(4Cx + (2A+2D)) \cos x + (-4Ax + (2C-2B)) \sin x] = \cancel{e^x}(2\cos x - 4x \sin x),$$

односно

$$4Cx \cos x + (2A+2D) \cos x - 4Ax \sin x + (2C-2B) \sin x = 2\cos x - 4x \sin x.$$

Пошто су $\cos x, \sin x, x\cos x$ и $x \sin x$ независне функције, изједначавајући коефицијенте уз њих са обе стране, добијамо систем једначина

$$\begin{array}{rrrrcr} 2A & & & +2D & = & 2 \\ & -2B & +2C & & = & 0 \\ & & 4C & & = & 0 \\ -4A & & & & = & -4 \end{array},$$

чијим решавањем једноставно добијамо $A = 1$ и $B = C = D = 0$, одакле директно следи решење које смо тражили, $y_p = x^2 e^x \cos x$. Коначно опште решење полазне нехомогене једначине је

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x.$$

□

2. Решити диференцијалну једначину $y'' + y' = 4x^2 e^x$.

Решење. Решења карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda = 0$ су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$, одакле добијамо да је решење хомогене једначине $y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$. Пошто је $f(x) = e^x\big(4x^2 \cos 0x + \sin 0x\big)$, то је $a = 1$, $b = 0$, па пошто $a + bi = 1$ није решење карактеристичне једначине то је $k = 0$. Такође, важи $m = \max\{2, 0\} = 2$, па је облик решења почетне нехомогене једначине дат са

$$y_p = e^x(Ax^2 + Bx + C).$$

Диференцирањем је даље

$$y_p' = e^x\big(Ax^2 + (2A+B)x + (B+C)\big),$$

као и

$$y_p'' = e^x\big(Ax^2 + (4A+B)x + (2A+2B+C)\big).$$

Заменом y_p' и y_p'' у полазну једначину, након сређивања добијамо да је

$$2Ax^2 + (6A+2B)x + (2A+3B+2C) = 4x^2.$$

Изједначавајући одговарајуће коефицијенте уз $1, x$ и x^2 са обе стране једнакости добијамо систем

$$\begin{array}{rrrcr} 2A & & & = & 4 \\ 6A & +2B & & = & 0, \\ 2A & +3B & +2C & = & 0 \end{array}$$

чијим решавањем добијамо $A = 2$, $B = -6$ и $C = 7$. Дакле, партикуларно решење је

$$y_p = e^x(2x^2 - 6x + 7),$$

одакле је опште решење дате једначине

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x(2x^2 - 6x + 7).$$

□

3. Решити диференцијалну једначину $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Решење. Из карактеристичне једначине

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 1) = 0,$$

добијамо $\lambda_{1,2} = 0$ и $\lambda_3 = 1$, па је опште решење хомогене једначине која одговара датој

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

Из $f(x) = e^{0x}((12x^2 + 6x)\cos 0x + \sin 0x)$ добијамо да је $a = 0$, $b = 0$, односно $a + bi = 0$ што је двострука нула карактеристичне једначине, односно $k = 2$. Јасно је да је $m = 2$, па је решење нехомогене једначине дато са

$$y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

Диференцирањем добијамо да важи

$$\begin{aligned} y_p' &= 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \\ y_p'' &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ y_p''' &= 24Ax + 6B. \end{aligned}$$

Заменом у полазну једначину добијамо

$$-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 12x^2 + 6x,$$

одакле, изједачавајући коефицијенте, добијамо систем

$$\begin{array}{rrrcr} -12A & & & = & 12 \\ 24A & -6B & & = & 6 \\ & 6B & -2C & = & 0 \end{array},$$

чије је решење $(A, B, C) = (-1, -5, -15)$. Тражено партикуларно решење је, дакле,

$$y_p = x^2(-x^2 - 5x - 15),$$

односно опште решење полазне једначине је

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^2(x^2 + 5x + 15).$$

□

Уколико нам је дата једначина

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x) + \cdots + f_N(x),$$

где је свака од функција $f_1, ..., f_N$ одговарајућег облика

$$f_i(x) = e^{a_i x}\left[P_{m_1,i}(x)\cos b_i x + Q_{m_2,i}(x)\sin b_i x\right], \quad i = 1, ..., N,$$

тада ћемо одредити партикуларно решење y_{p_i} за сваки од проблема

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f_i(x), \quad i = 1, ..., N,$$

па ће опште решење полазног проблема бити дато са

$$y = y_h + y_{p_1} + \cdots + y_{p_N},$$

где је y_h решење хомогене једначине која одговара датој нехомогеној једначини.

4. Решити диференцијалну једначину $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$.

Решење. Решења карактеристичне једначине су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$, па је опште решење хомогене једначине дато са $y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$. У овом примеру имамо да је $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = - - e^{-x}$ и $f_3(x) = e^x$, што су све функције траженог облика. За сваку од њих налазимо одоговарајуће партикуларно решење:

За $f_1(x) = x^2$ имамо да је $a = b = 0$, одакле је $k = 1$ ($a + bi = 0$ је једнострука нула) и $m = 2$, па је $y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C)$. Двоструким диференцирањем y_{p_1} и заменом у једначину добијамо да је

$$3Ax^2 + (6A + 2B)x + (2B + C) = x^2,$$

односно имамо систем

$$\begin{array}{rrrl} 3A & & & = 1 \\ 6A & +2B & & = 0, \\ & 2B & +C & = 0 \end{array}$$

чијим решавањем налазимо $A = \frac{1}{3}$, $B = -1$ и $C = 2$. Партикуларно решење је $y_{p_1} = x\left(\frac{1}{3}x^2 - x + 2\right)$. □

Метода варијације константи

Претпоставимо опет да имамо једначину

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

при чему функција $f(x)$ више не мора бити облика (1). Ако је $y_h = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$ опште решење одговарајуће хомогене једначине, тада ћемо решење полазне нехомогене једначине тражити у облику $y = C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n$, где непознате функције $C_1(x), ..., C_n(x)$ (односно њихове изводе) одређујемо из система

$$\left.\begin{array}{rcrcl} C_1' y_1 & + \cdots + & C_n' y_n & = & 0 \\ C_1' y_1' & + \cdots + & C_n' y_n' & = & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} & + \cdots + & C_n' y_n^{(n-1)} & = & f(x) \end{array}\right\}. \tag{2}$$

5. Решити диференцијалну једначину $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}\ln x$.

Решење. На основу карактеристичне једначине $\lambda^2+6\lambda+9=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1,2}=-3$ добијамо опште решење хомогене једначине $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$. Решење полазне једначине ћемо тражити у облику $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, где се C_1' и C_2' одређују из система

$$\left.\begin{array}{rcrcl} C_1'e^{-3x} & + & C_2'xe^{-3x} & = & 0 \\ C_1'(-3e^{-x}) & + & C_2'(1-3x)e^{-3x} & = & e^{-3x}\ln x \end{array}\right\},$$

односно

$$\left.\begin{array}{rcrcl} C_1' & + & xC_2' & = & 0 \\ -3C_1' & + & (1-3x)C_2' & = & \ln x \end{array}\right\}.$$

Једноставно се добија $C_1'(x)=-x\ln x$ и $C_2'(x)=\ln x$, одакле је

$$C_1(x)=-\int x\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+D_1,$$

односно

$$C_2(x)=\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-\int\mathrm{d}x=x\ln x-x+D_2.$$

Заменом назад у формулу за y, имамо да је тражено опште решење

$$y=\left[\frac{x^2}{4}(1-2\ln x)+D_1\right]e^{-3x}+\left[x(\ln x-1)+D_2\right]xe^{-3x}.$$

□

6. Решити диференцијалну једначину $y'''+y'=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $\lambda^3+\lambda=0$ су $\lambda=0$ и $\lambda_{2,3}=\pm i$, одакле је опште решење хомогене једначине

$$y_h=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

Опште решење нехомогене једначине ћемо тражити у облику $y=C_1(x)+C_2(x)\cos x+C_3(x)\sin x$, где C_1',C_2' и C_3' налазимо из одговарајућег систему:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'+C_2'\cdot\cos x+C_3'\cdot\sin x=0 \\ \quad -C_2'\cdot\sin x+C_3'\cdot\cos x=0 \\ \quad -C_2'\cdot\cos x-C_3'\cdot\sin x=\sin x+\dfrac{1}{\sin x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cdot\left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right) \\ + \end{array}$$

односно

$$\left.\begin{array}{rl} C_1'+C_2'\cdot\cos x+C_3'\cdot\sin x & =0 \\ -C_2'\cdot\sin x+C_3'\cdot\cos x & =0 \\ C_3'\left(-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\right) & =\sin x+\dfrac{1}{\sin x} \end{array}\right\}.$$

Из последње једначине је $C_3'(x)=-(\sin^2 x+1)$, одакле добијамо и да је $C_2'(x)=-\sin x\cos x-\dfrac{\cos x}{\sin x}$, односно $C_1'(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$. Интеграљењем добијамо непознате функције:

$$\begin{aligned} C_1(x)&=\int\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=-\cos x+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\left[t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}\right] \\ &=-\cos x+\int\frac{\frac{2}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}\,\mathrm{d}t=-\cos x+\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=-\cos x+\ln|t|+D_1 \\ &=-\cos x+\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+D_1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_2(x) &= -\int \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) \cos x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \,\mathrm{d}x \end{array}\right] \\
&= -\int t + \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = -\left(\frac{t^2}{2} + \ln|t|\right) + D_2 \\
&= -\frac{\sin^2 x}{2} - \ln|\sin x| + D_2,
\end{aligned}
$$

односно

$$
\begin{aligned}
C_3(x) &= -\int \left(\sin^2 x + 1\right) \mathrm{d}x = -\int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} + 1\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + D_3.
\end{aligned}
$$

Коначно, опште решење почетне нехомогене диференцијалне једначине је

$$
y = \left[-\cos x + \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + D_1\right] + \left[-\frac{\sin^2 x}{2} - \ln|\sin x| + D_2\right] \cos x + \left[-\frac{3}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + D_3\right] \sin x.
$$

$\square$