II **колоквијум 2021/22**

1. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -4x & + & 3y & - & 2z \\ y' & = & -5x & + & 5y & - & z \\ z' & = & x & - & 2y & + & 3z \end{array}$$

2. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{C-} \frac{\operatorname{th} iz + 8}{e^{iz} - 1}\,\mathrm{d}z$, ако је $C = \{z \mid |z - 4 - i| = 3\}$.

3. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y''(t) + y(t) = 4\cos^3 t - \cos 3t + 10e^{3t}.$$

Решења:

1. Одредимо најпре сопствене матрице система $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -5 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 & -2 \\ -5 & -5-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 20 = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10), \end{aligned}$$

одакле је $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$. Одредимо сада партикуларна решења која одговарају овим сопственим вредностима:

1. $\lambda_1 = -2$: Тражимо одговарајући сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ из једначине $(A + 2I)M = \mathbf{0}$, односно из

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -5 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrrcr} -2a & +3b & -2c & = & 0 \\ -5a & +7b & -c & = & 0 \\ a & -2b & +5c & = & 0 \end{array}\right\}.$$

   Решење овог система је $(a, b, c) = (11\alpha, 8\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, односно имамо да је $M = \begin{bmatrix} 11\alpha \\ 8\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Одатле, за $\alpha = 1$ добијамо једно партикуларно решење $X_1(t) = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$.

2. $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$: Одредимо сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ за $\lambda_2 = 3 + i$: Из $(A - (3+i)I)M = \mathbf{0}$ имамо

$$\begin{bmatrix} -7-i & 3 & -2 \\ -5 & 2-i & -1 \\ 1 & -2 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrrcr} (-7-i)a & +3b & -2c & = & 0 \\ -5a & +(2-i)b & -c & = & 0 \\ a & -2b & -ic & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Решење претходног система је $(a,b,c)=\left(-\frac{(2+i)\alpha}{5},-\frac{(1+3i)\alpha}{5},\alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, односно тражени сопствени вектор је $M=\left(-\frac{\alpha}{5}\right)\begin{bmatrix}2+i\\1+3i\\-5\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}\{0\}$, па за $\alpha=-5$ добијамо

$$\begin{aligned}X_{\text{kom}}(t)&=\begin{bmatrix}2+i\\1+3i\\-5\end{bmatrix}e^{(3+i)t}=\left(\begin{bmatrix}2\\1\\-5\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)\cdot e^{3t}(\cos t+i\sin t)\\&=\begin{bmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t-3\sin t\\-5\cos t\end{bmatrix}e^{3t}+i\begin{bmatrix}\cos t+2\sin t\\3\cos t+\sin t\\-5\sin t\end{bmatrix}e^{3t},\end{aligned}$$

одакле је

$$X_1(t)=\operatorname{Re}(X_{\text{kom}})=\begin{bmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t-3\sin t\\-5\cos t\end{bmatrix}e^{3t},$$

односно

$$X_2(t)=\operatorname{Im}(X_{\text{kom}})=\begin{bmatrix}\cos t+2\sin t\\3\cos t+\sin t\\-5\sin t\end{bmatrix}e^{3t}.$$

Опште решење система је дато са

$$\begin{aligned}X(t)&=C_1X_1(t)+C_2X_2(t)+C_3X_3(t)\\&=C_1\begin{bmatrix}11\\8\\1\end{bmatrix}e^{-2t}+C_2\begin{bmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t-3\sin t\\-5\cos t\end{bmatrix}e^{3t}+C_3\begin{bmatrix}\cos t+2\sin t\\3\cos t+\sin t\\-5\sin t\end{bmatrix}e^{3t},\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}x(t)&=11C_1e^{-2t}+C_2(2\cos t-\sin t)e^{3t}+C_3(\cos t+2\sin t)e^{3t}\\y(t)&=8C_1e^{-2t}+C_2(\cos t-3\sin t)e^{3t}+C_3(3\cos t+\sin t)e^{3t}\\z(t)&=C_1e^{-2t}-5C_2e^{3t}\cos t-5C_3e^{3t}\sin t.\end{aligned}$$

□

2. Корисно је приметити да је

$$\operatorname{th} iz=\frac{\operatorname{sh} iz}{\operatorname{ch} iz}=\frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}=\frac{i\sin z}{\cos z}=i\operatorname{tg} z,$$

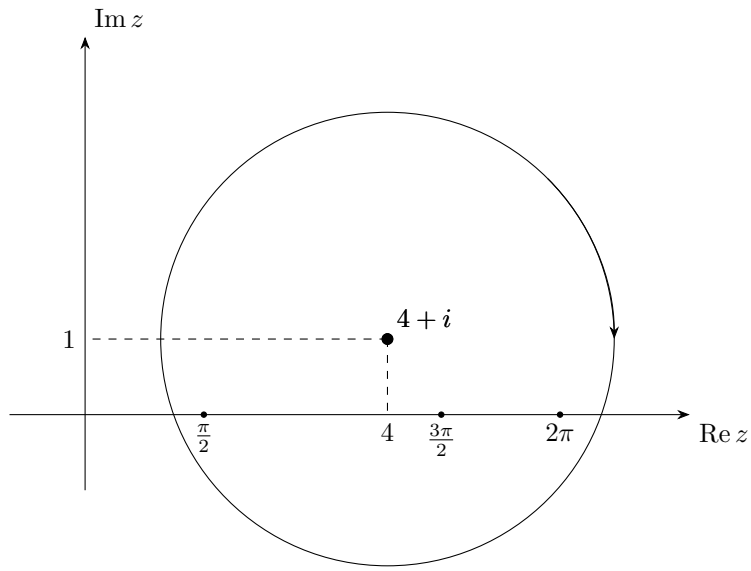
одакле је

$$f(z)=\frac{\operatorname{th} iz+8}{e^{iz}-1}=\frac{i\sin z+8\cos z}{\cos z(e^{iz}-1)}$$

Сингуларитете ћемо одређивати из услова $\cos z(e^{iz}-1)=0$:

Најпре, из $\cos z=0$ имамо да је $e^{iz}+e^{-iz}=0$, односно $e^{2iz}=-1$, одакле је $2iz=\operatorname{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\operatorname{Arg}(-1)=i(\pi+2k\pi)\ \Leftrightarrow\ z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{R}$. Тачке које припадају области ограниченој датом контуром су $z_1=\frac{\pi}{2}$ и $z_2=\frac{3\pi}{2}$.

Даље, из $e^{iz}-1=0$ добијамо да је $e^{iz}=1$, односно $iz=\operatorname{Ln}(1)=i2k\pi\ \Leftrightarrow\ z=2k\pi$. Тачка која припада датој области је $z_3=2\pi$.



Јасно је да су све тачке z_1, z_2 и z_3 полови. Неопходно је још одредити одговарајуће резидууме:

1. $z_1 = \dfrac{\pi}{2}$: Важи

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{i\sin z + 8\cos z}{e^{iz}-1}\cdot\frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos z} = \frac{i}{i-1}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos z}$$
$$\underset{\text{Л.П.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \frac{i}{i-1}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z} = \frac{i}{i-1}\cdot\frac{1}{-1} = \frac{i}{1-i} = \frac{i-1}{2},$$

одакле закључујемо да је z_1 пол првог реда и да важи $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \dfrac{i-1}{2}$.

2. $z_2 = \dfrac{3\pi}{2}$: Аналогно претходној тачки имамо да је

$$\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)f(z) = \lim_{z\to\frac{3\pi}{2}} \frac{i\sin z + 8\cos z}{e^{iz}-1}\cdot\frac{z-\frac{3\pi}{2}}{\cos z} = \frac{-i}{-i-1}\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\frac{z-\frac{3\pi}{2}}{\cos z}$$
$$\underset{\text{Л.П.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \frac{i}{i+1}\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z} = \frac{i}{i+1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2},$$

па је и z_2 прост пол и важи $\operatorname*{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}} f(z) = \dfrac{1+i}{2}$.

3. $z_3 = 2\pi$: За ову тачку важи

$$\lim_{z\to 2\pi}(z-2\pi)f(z) = \lim_{z\to 2\pi}\frac{i\sin z + 8\cos z}{\cos z}\cdot\frac{z-2\pi}{e^{iz}-1} = 8\lim_{z\to 2\pi}\frac{z-2\pi}{e^{iz}-1}$$
$$\underset{\text{Л.П.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} 8\lim_{z\to 2\pi}\frac{1}{ie^{iz}} = 8\cdot\frac{1}{i} = -8i,$$

те је и ова тачка пол првог реда и важи $\operatorname*{Res}_{z=2\pi} f(z) = -8i$.

Коначно, за дати интеграл важи

$$\int\limits_{C-} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2\pi} f(z)\right) = -2\pi i(-7i) = -14\pi.$$

$\square$

3. Видимо најпре да је

$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3it}+3^{-3it}}{2}+3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t),\end{aligned}$$

одакле је $4\cos^3 t - \cos 3t = 3\cos t$. Нека је $y(0) = C_1$ и $y'(0) = C_2$, и нека важи $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$. Применом Лапласове трансформације на једначину

$$y''(t) + y(t) = 3\cos t + 10e^{3t}$$

добијамо алгебарску једначину

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sC_1 - C_2 + Y(s) &= 3\cdot\frac{s}{s^2+1} + 10\cdot\frac{1}{s-3}\\ \Leftrightarrow\ Y(s)(1+s^2) &= sC_1 + C_2 + 3\frac{s}{s^2+1} + 10\frac{1}{s-3},\end{aligned}$$

одакле је

$$Y(s) = C_1\frac{s}{s^2+1} + C_2\frac{1}{s^2+1} + 3\frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{10}{(s^2+1)(s-3)}. \tag{1}$$

Из $\dfrac{10}{(s^2+1)(s-3)} = \dfrac{As+B}{s^2+1} + \dfrac{C}{s-3}$ добијамо систем линеарних једначина

$$\left.\begin{array}{rrrl} A & & +C & = 0\\ -3A & +B & & = 0\\ & -3B & +C & = 10\end{array}\right\},$$

чијим решавањем добијамо да је $A = -1$, $B = -3$ и $C = 1$. Враћајући се у (1) имамо да је

$$Y(s) = (C_1-1)\frac{s}{s^2+1} + (C_2-3)\frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s-3},$$

одакле, применом инверзне Лапласове трансформације, добијамо

$$y(t) = (C_1-1)\cos t + (C_2-3)\sin t + \frac{3}{2}t\sin t + e^{3t},$$

при чему смо искористили следећи резултат:

$$\mathscr{L}(t\sin t) = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

$\square$