МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2009 - Група Г

1. Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 - n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 - n^2 + 3n}}$$

Решење: Ако је $b_n = \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^3 - n^2 + 3n}}$ и $c_n = \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1}}$, тада је

(1) $b_n < a_n < c_n$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 3$.

Из (1) и (2) и *теореме о три низа* следи да је низ (a_n) конвергентан и да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Коментар. Очекивало се да ово буде најлакши задатак. Међутим, изгледа да су многи пропустили *теорему о три низа* (иначе би је свакако препознали - општи члан датог низа је типичан за ту теорему), тако да је само седам студената решило задатак. Има и оних који нису добро пребројали колико општи члан има сабирака.

2. (а) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{cx} - \sqrt{1+2cx}}{x^2}$ где је $c \in R$.

(б) Одредити вредност параметра γ за коју је функција f дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - \sqrt{1+4x}}{x^2}, & x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \setminus \{0\} \\ \qquad \gamma \qquad, & x = 0 \end{cases}$$

непрекидна у тачки $x = 0$.

Решење: (а) Из једнакости

$$e^{cx} = 1 + cx + \frac{c^2}{2}x^2 + o(x^2), \quad (1+2cx)^{1/2} = 1 + cx - \frac{c^2}{2}x^2 + o(x^2)$$

које важе за $x \to 0$ следи

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{cx} - \sqrt{1+2cx}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{c^2x^2 + o(x^2)}{x^2} = c^2.$$

(б) Из (а) следи да је $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$ (специјални случај за $c = 2$). Према томе, функција f је непрекидна у тачки $x = 0$ ако је $\gamma = 4$ $(\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0))$.

Коментар. Већи успех у решавању овог задатка су имали они који су користили Маклоренове развоје него они који су користили Лопиталово правило.

3. За функцију $g:\ x \mapsto \arcsin x$

(а) одредити Тејлоров полином $T_3(x)$ (степен 3) у околино тачке $x = 1/2$,

(б) написати остатак $g(x) - T_3(x)$ у Лагранжовом облику.

Решење: (a) Диференцирањем функције g добијамо једнакости

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad g''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\ , \quad g'''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$$

из којих налазимо

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\ , \quad g''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\ , \quad g'''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}.$$

Према томе,

$$\begin{aligned} T_3(x) &= g\left(\frac{1}{2}\right) + g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}g''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}g'''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{9\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

(б) Како је

$$g^{(iv)}(x) = 3\frac{x(2x^2+3)}{(1-x^2)^{7/2}},$$

то је

$$R_3(x) = g(x) - T_3(x) = \frac{g^{(iv)}(c)}{4!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{c}{8}\cdot\frac{2c^2+3}{(1-c^2)^{7/2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4,$$

где је $c = \frac{1}{2} + \theta\left(x-\frac{1}{2}\right)$ за неко $\theta \in (0,1)$.

Коментар. Једини озбиљан проблем у решавању овог задатка је био налажење извода функције g. Техника налажења извода ирационалних функција није довољно увежбана! Наравно, има изузетака - на пример, *Вукићевић Катарина*.

4. Испитати ток и скицирати график функције $y(x) = (x+4)\sqrt[3]{x+1}$.

Решење: (1) Из $D_y = R$ следи да не постоји вертикална асимптота, из $y(x) \to +\infty$ када $x \to \pm\infty$ следи да не постоји хоризонтална асимптота и из $\frac{y(x)}{x} \sim \sqrt[3]{x}$ када $x \to \pm\infty$ следи да не постоји ни коса асимптота функције y. Нуле функције су $x = -4$ и $x = -1$, функција је негативна на интервалу $(-4,-1)$ и позитивна на $D_y \setminus [-4,-1]$.

(2) Из $y'(x) = \frac{4x+7}{3(x+1)^{2/3}}$ следи да је функција опадајућа на $(-\infty, -7/4)$, растућа на $(-7/4, +\infty)$ и да има локални минимум у тачки $x = -7/4$.

(3) Из $y''(x) = \frac{2}{9}\cdot\frac{2x-1}{(x+1)^{5/3}}$ следи да је функција y конвексна на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(1/2,+\infty)$, а конкавна на интервалу $(-1, 1/2)$. График функције има превојне тачке за $x = -1$ и $x = 1/2$.

На основу података из (1)-(3) лако је скицирати график функције y.

Коментар. Студенти *Стојковић Милија, Селаковић Марија, Урошевић Маја, Милошевић Нела и Витошевић Милица* су дали комплетна решења, а има још неколико студената који су само 'заборавили' превојну тачку за $x = -1$. Највећи проблем у решавању овог задатка је био налажење другог извода функције y. Било је и оних који су превидели да је трећи корен дефинисан за сваки реалан број.

Драган Ђорић