МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2008 - Група Д

1. Дат је низ (a_n) где је $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-7n+12}$.

1. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
2. Да ли је низ (a_n) конвергентан?
3. Да ли је низ (a_n) монотон?
4. Да ли је низ (a_n) ограничен?

Решење: 1. Како је за $n \to \infty$

$$\begin{aligned} a_n &= n\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2} - n\left(1-\frac{7}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2} \\ &= n\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n\left(1-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{7}{2}+o(1), \end{aligned}$$

то је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7/2$. Наравно, ово може да се добије и средњошколском техником, али је добра прилика и да се покаже знање из Математике 1.

2. Да, јер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ постоји у R (видети дефиницију конвергентног низа).

3. Нека је $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-7x+12}$. Како је

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-7x+12} - (2x-7)\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-7x+!2}},$$

функција f је опадајућа ако је

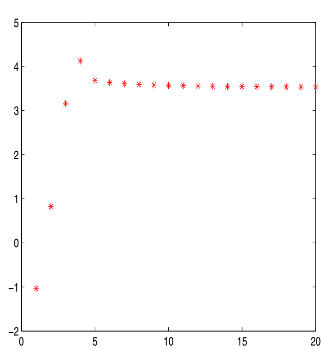
$$2x\sqrt{x^2-7x+12} < (2x-7)\sqrt{x^2+1}.$$

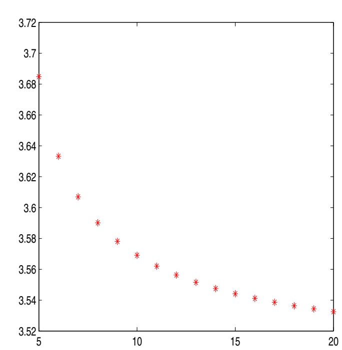
За $x > 4$ ова неједнакост је еквивалнтна са тачном неједнакошћу

$$0 < 7x^2 - 4x + 7.$$

Према томе, функција f је опадајућа за $x > 4$. Обзиром да је $a_n = f(n)$, то је и низ (a_n) опадајући за $n > 4$.

На следећим сликама је дат график низа (a_n) (на графику лево су све вредности низа, а на графику десно за $n > 4$).





4. Да, јер је конвергентан низ ограничен (теорема са предавања).

2. Дата је функција $g(x) = \ln(1+\sin x)$.

1. Одредити диференцијал dg.
2. Одредити Маклоренов полином трећег степена T_3 за функцију g.
3. Да ли је $g(x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ за $x \approx 0$?

Решење: 1. $dg(x) = g'(x)dx = \dfrac{\cos x \, dx}{1+\sin x}$.

2. Како је

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0$$

и

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad t \to 0,$$

то је (када $x \to 0$)

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Према томе, $T_3(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$.

3. Да, јер је $g(x) \approx T_3(x)$ у некој околини тачке $x = 0$ (мада у задатку није наведено значење симбола $\approx$).

Напомена. Полином T_3 није једина функција која апроксимира g у околини нуле. На пример, важи и $g(x) \approx x - x^2 + x^3$ или $g(x) \approx x$, али и $g(x) \approx 0$ $(= g(0))$ у околини нуле. За случај апроксимације полиномом T_3 можемо да проценимо грешку на задатом интервалу.

3. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x^2+6x-7}{2-x}$.

Решење: Обзиром да је функција средњошколског нивоа овде се дају само основни подаци.

A) $D_f = R \setminus \{2\}$, $f(x) = 0$ за $x \in \{-7, 1\}$. Права $x = 2$ је вертикална асимптота, при чему

$$\lim_{x\to 2_-} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2_+} = -\infty.$$

Права $y = -x - 8$ је коса асимптота и за $x \to -\infty$ и за $x \to +\infty$.

B) Како је $f'(x) = -\dfrac{x^2-4x-5}{(2-x)^2}$, функција расте на интервалима $(-1, 2)$ и $(2, 5)$, а опада на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(5, +\infty)$, при чему је

$$f_{\max} = f(5) = -16, \quad f_{\min} = f(-1) = -4.$$

C) Како је $f''(x) = \dfrac{18}{(2-x)^3}$, функција је конвексна на интервалу $(-\infty, 2)$ и конкавна на интервалу $(2, +\infty)$.

Драган Ђорић