МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2010 - Група А

Драган Ђорић

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ -2a & 0 \end{bmatrix} ; \, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Испитати да ли је $(\mathcal{M}, \cdot)$ група.

Решење:

1. *Операција множења матрица је затворена у скупу $\mathcal{M}$.* Ако је $M_a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -2a & 0 \end{bmatrix}$, тада је $M_a \cdot M_b = M_{ab}$. Како $ab \in \mathbb{R}$ за $a, b \in \mathbb{R}$, то $M_{ab} \in \mathcal{M}$.
2. *Операција је у скупу $\mathcal{M}$ комутативна* јер је $ab = ba$.
3. *Операција је асоцијативна* јер асоцијативност за множење матрица важи у општем случају.
4. *У скупу $\mathcal{M}$ постоји неутрални елемент.* Из услова $M_{ab} = M_a$ следи $ab = a$, односно $b = 1$, па је матрица $M_1 \in \mathcal{M}$ десни неутрал. Она је и леви неутрал јер важи комутативност. Дакле, јединични елемент у скупу $\mathcal{M}$ је матрица M_1.
5. *За M_0 не постоји инверзни елемент* јер једначина $0 \cdot x = 1$ нема решења у $\mathbb{R}$.

На основу (1)-(5) следи да структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ није група.

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & -a & -1 \\ 3 & -3 & 0 & a \end{vmatrix}$. За које вредности параметра a је $D \leq 0$?

Решење: Додавањем друге колоне првој добијамо

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & -3 & 0 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ -3 & 0 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 \\ -3 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-3).$$

Према томе, $D \leq 0$ за $a \leq 2$ или $a \geq 3$.

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & \alpha \cdot z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0. \end{array}$$

Решење: Из прве и четврте једначине следи $y = 0$. Тада из прве једначине имамо $z = x$, а из друге $z = -2x$. Према томе, једино решење овог хомогеног система је тривијално (и не зависи од α).

4. Дате су тачке $A(2, \alpha, 2)$, $B(1, 1, 3)$, $C(3, 4, 3)$ и $D(1, 2, 5)$.

1. За које вредности параметра α важи $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$?

2. За вредности параметра α из 1. проверити да ли су тачке A, B, C и D компланарне и ако јесу изразити вектор $\overrightarrow{AD}$ преко $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $ABCD$.

Решење: 1. Како је $AB = (-1, 1-\alpha, 1)$, то је $|AB|^2 = 1^2 + (1-\alpha)^2 + 1^2 = 3 + \alpha^2 - 2\alpha$. Према томе, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$ за $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, односно за $\alpha \in \{0, 2\}$.

2. За $\alpha = 0$ је $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8$. Према томе, дате тачке су некомпланарне, а запремина пирамиде $ABCD$ је $V = 8/6 = 4/3$.

За $\alpha = 2$ је $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Према томе, дате тачке су компланарне. Ако је $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, тада из једнакости $(-1, 0, 3) = \lambda(-1, -1, 1) + \mu(1, 2, 1)$ добијамо $\lambda = 2$ и $\mu = 1$. Дакле, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

5. У простору су дате тачке Q, R, S и T, као и права p:

$$Q(3,-1,-3), \quad R(-2,-1,0), \quad S(1,2,-3), \quad T(2,0,-2), \quad p: \begin{cases} 2x + y + z - 6 & = 0 \\ x - y + 2z & = 0. \end{cases}$$

1. Одредити једначину равни π која садржи тачке R, S и T, вектор нормале $\vec{n}_\pi$, као и координате неке тачке $M \in \pi$ ($M \neq R$, $M \neq S$, $M \neq T$).

2. Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и координате неке тачке P праве p.

3. Написати једначину праве q која је паралелна правој p и садржи тачку Q.

4. Написати једначину равни α која је нормална на праву q и садржи тачку S.

Решење: 1. Ако је $M(x,y,z)$ тачка равни π, једначина равни π је $[\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{ES}, \overrightarrow{RT}] = 0$. Како је

$$[\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}] = \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z \\ 3 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x+2)(-6+3) - (y+1)(-6+12) + z(3-12) = -3x - 6y - 9z - 12,$$

једначина равни π је $x + 2y + 3z + 4 = 0$, $\vec{n}_\pi = (1,2,3)$ и на пример, $M(-6,1,0) \in \pi$.

2. Како је $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3i - 3j - 3k$, то је $\vec{v}_p = (1,-1,-1)$. Из дате једначине праве p за $z = 0$ добијамо $x = y = 2$, што значи да $P(2,2,0) \in p$.

3. Једначина праве q је $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+3}{-1}$.

4. Једначина равни α је $x - 1 - (y-2) - (z+3)$, односно $x - y - z - 2 = 0$.