МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2008 - Група Л

Драган Ђорић

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix};\ \alpha,\beta \in R,\ \alpha^2+\beta^2 \neq 0 \right\}.$$

Испитати да ли је $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група.

Решење:

1. *Операција множења матрица је затворена у скупу $\mathcal{M}$ (операција и ускупу $\mathcal{M}$)*. Ако је

   $$M_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

   тада је

   $$M_{\alpha,\beta}\cdot M_{u,v} = M_{\alpha u-\beta v,\beta u+\alpha v} = M_{s,t}.$$

   Како матрица $M_{s,t}$ има облик елемнта из скупа $\mathcal{M}$ и како је $s,t \in R$, треба још проверити да ли је $s^2+t^2 \neq 0$ (уз претпоставку да је $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$ и $u^2+v^2 \neq 0$). Претпоставимо супротно, да је $s=t=0$, односно

   $$\alpha u-\beta v = 0, \quad \beta u+\alpha v = 0.$$

   Ако ове једнакости третирамо као систем по непознатим, на пример u и v, тада тај систем има само тривијално решење (јер је детерминанта систем различита од нуле, $\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2+\beta^2$) $u=v=0$, што није могуће због претпоставке $u^2+v^2 \neq 0$. Дакле, није $s=t=0$, већ је $s^2+t^2 \neq 0$. То значи да је $(\mathcal{M},\cdot)$ групоид.

2. *Операција је у скупу $\mathcal{M}$ комутативна*. Како је

   $$M_{u,v}\cdot M_{\alpha,\beta} = M_{u\alpha-v\beta,v\alpha+u\beta}$$

   комутативност следи из комутативности множења и сабирања реалних бројева ($u\alpha - v\beta = \alpha u-\beta v$ и $v\alpha+u\beta = \beta u+\alpha v$). Дакле, $(\mathcal{M},\cdot)$ је комутативни групоид.

3. *Операција је асоцијативна*. Асоцијативност за множење матрица важи у општем случају, па и у скупу $\mathcal{M}$.

4. *У скупу $\mathcal{M}$ постоји неутрални елемент*. Из услова $M_{\alpha,\beta}\cdot M_{u,v} = M_{\alpha,\beta}$ добијамо да је неутрални елемент у скупу $\mathcal{M}$ матрица $M_{1,0}$ ($0,1 \in R$ и $1^2+0^2 \neq 0$).

5. *За $M_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}$ постоји инверзни елемент у $\mathcal{M}$*. Из услова $M_{\alpha,\beta}\cdot M_{u,v} = M_{1,0}$ добијамо систем

   $$\alpha u-\beta v = 1, \quad \beta u+\alpha v = 0$$

   чија су решења

   $$u = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad v = \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

   Како је $u,v \in R$ и $u^2+v^2 = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2} \neq 0$, то $M_{u,v} \in \mathcal{M}$. Дакле,

   $$M^{-1}_{\alpha,\beta} = M_{\alpha/(\alpha^2+\beta^2),-\beta/(\alpha^2+\beta^2)}.$$

На основу (1)-(5) следи да је $(A,*)$ Абелова група.

2. Испитати ранг матрице $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ у зависности од реалног параметра λ.

Решење: Ако је A дата матрица, тада је

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 2 & 5 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 10 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-2\lambda & \lambda+2 \\ 0 & -1 & 10-\lambda & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-2\lambda & \lambda+2 \\ 0 & 0 & 9-3\lambda & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

Према томе, $r(A) = 2$ за $\lambda = 3$ и $r(A) = 3$ за $\lambda \neq 3$.

3. У зависности од реалног параметра λ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & (2\lambda+4)z & = & 7 \\ -x & + & 2y & - & (\lambda+2)z & = & -4 \end{array}$$

Решење: Израчунавањем детерминанте D система и детерминанти D_x, D_y и D_z добијамо

$$D = -(\lambda+2), \quad D_x = 0, \quad D_y = \lambda+2, \quad D_z = -2.$$

1. За $\lambda \neq -2$ систем има јединствено решење

$$(x,y,z) = \left(0, -1, \frac{2}{\lambda+2}\right)$$

(Крамерове формуле).

2. За $\lambda = -2$ имамо систем

$$x - 2y = 2, \quad 2x - 3y = 7, \quad -x + 2y = -4$$

који није сагласан (из прве и треће једначине следи $0 = -2$)

4. Дати су вектори

$$e_1 = (2,-3,1), \quad e_2 = (3,-1,5), \quad e_3 = (1,-4,3).$$

1. Доказати да вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу простора R^3.
2. Одредити координате вектора $x = (2,-2,7)$ у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Решење:

1. Из једнакости $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$ добијамо хомоген систем

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = 0, \quad -3\alpha - \beta - 4\gamma = 0, \quad \alpha + 3\beta + 3\gamma = 0.$$

Како је

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 35 \neq 0,$$

систем има само тривијално решење $\alpha = \beta = \gamma = 0$, па су вектори e_1, e_2 и e_3 линеарно независни. Из чињенице да је простор R^3 тродимензиони следи да је скуп $\{e_1, e_2, e_3\}$ база тог простора.

2. Из једнакости $(2,-2,7) = pe_1 + qe_2 + re_3$ добијамо систем

$$2p + 3q + r = 2, \quad -3p - q - 4r = -2, \quad p + 3q + 3r = 7.$$

Решавањем тог система (на пример, Крамеровим правилом) добијамо $p = -1$, $q = r = 1$ ($D = D_q = D_r = 35$, $D_p = -35$). Према томе,

$$x = -e_1 + e_2 + e_3.$$

5. Раван α је одређена тачкама $A(1,1,0)$, $B(1,0,-1)$ и $C(3,1,1)$. Израчунати растојање тачке $D(2,0,1)$ од равни α.

Решење: За вектор нормале равни α можемо да узмемо векторски производ вектора AB и AC. Како је

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j + 2k$$

и како $A \in \alpha$, једначина равни α је $1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) - 2 \cdot (z-0) = 0$, односно $x + 2y - 2z - 3 = 0$. Према томе,

$$d(D, \alpha) = \frac{|2 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1.$$