МАТЕМАТИКА 2

Први писмени колоквијум, 14.4.2016

Група 1

Решења задатака

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Функција $f : R^2 \to R$ дефинисана је са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \dfrac{3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Испитати диференцијабилност функције f у тачки $(0,0)$.

Решење: Према дефиницији из уџбеника[1], функција f је диференцијабилна у тачки $(0,0)$ ако је

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{1}$$

када $(x,y) \to (0,0)$. Пошто је $f(0,0) = 0$ и

$$f'_x(0,0) = \lim_{u\to 0} \frac{f(u,0)-f(0,0)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{0}{u} = 0, \quad f'_y(0,0) = \lim_{u\to 0} \frac{f(0,u)-f(0,0)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{0}{u} = 0,$$

услов (1) своди се на услов

$$f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2}), \text{ када } (x,y) \to (0,0). \tag{2}$$

Дакле, треба проверити да ли важи услов (2), односно да ли је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$, где је

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \sin \frac{3}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

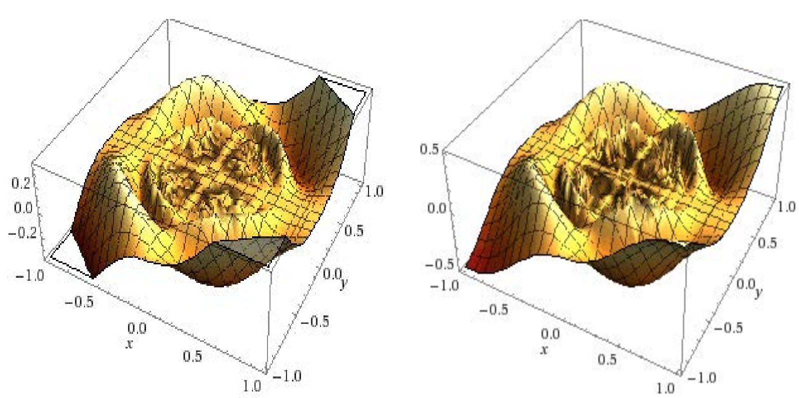
Како је

$$|g(x,y)| \le \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \le |x| \to 0 \text{ када } (x,y) \to (0,0),$$

следи да $g(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$.

Према томе, функција f је диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

На слици су дати графици функција f и g у околини тачке $(0,0)$.



Сл.1 График функције f (лево) и график функције g (десно)

[1]М. Стојановић, О. Михић, **Математика 2**, ФОН, Београд, 2013

2. Одредити Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $A(1,-1)$ апроксимира функцију $f:(x,y)\mapsto z$ задату имплицитно једнакошћу

$$3xy^2+x^2y-xyz+z^2=2,\ \ z\geq 0.$$

Решење: Ако у датој једнакости заменимо коордиинате тачке A, добијамо да у тачки A важи $z+z^2=0$. Како је према услову задатка $z(A)\geq 0$, то је $z(A)=0$.

Ако је

$$F(x,y,z)=3xy^2+x^2y-xyz+z^2-2,\quad g(x,y)=F(x,y,z(x,y)),$$

тада је

$$g'_x(x,y)=3y^2+2xy-yz-xyz'_x+2zz'_x,\quad g'_y(x,y)=6xy+x^2-xz-xyz'_y+2zz'_y,$$

$$g''_{x^2}(x,y)=2y-yz'_x-yz'_x-xyz''_{x^2}+2z'_xz'_x+2zz''_{x^2},$$

$$g''_{y^2}(x,y)=6x-xz'_y-xz'_y-xyz''_{y^2}+2z'_yz'_y+2zz''_{y^2},$$

$$g''_{xy}(x,y)=6y+2x-z-yz'_y-xz'_x-xyz''_{xy}+2z'_yz'_x+2zz''_{xy}.$$

Заменом $x=1$, $y=-1$ и $z=0$ из једнакости $g'_x=g'_y=g''_{x^2}=g''_{y^2}=g''_{xy}=0$ добијамо да је

$$z'_x(A)=-1,\quad z'_y(A)=5,\quad z''_{x^2}(A)=2,\quad z''_{y^2}(A)=-46,\quad z''_{xy}(A)=8,$$

$$dz(A)=-dx+5dy=-(x-1)+5(y+1),$$

$$d^2z(A)=2dx^2+16dxdy-46dy^2=2(x-1)^2+16(x-1)(y+1)-46(y+1)^2.$$

Тражени Тејлоров полином T_2 дат је са $T_2(x,y)=z(A)+dz(A)+\dfrac{1}{2}d^2z(A)$.

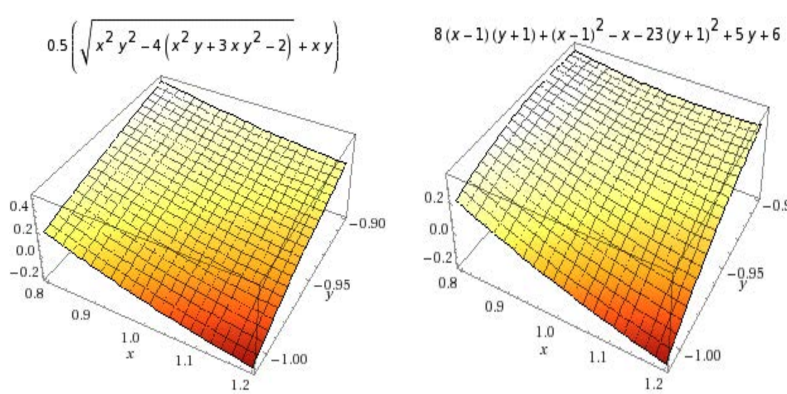
Према томе, $T_2(x,y)=-24+5x-49y+x^2-23y^2+8xy.$

Напомена. Из једнакости $F(x,y,z)=0$ следи да је

$$z=\frac{1}{2}\left(xy\pm\sqrt{x^2y^2-4(3xy^2+x^2y-2)}\right),$$

а из услова $z(A)=0$ следи да у овој формули за z треба узети знак $+$. Према томе, Тејлоров полином може да се добије и из експлицитно дефинисане функције f.

На слици су дати графици функције f и Тејлоровог полиномс T_2 у околини тачке A.



Сл.2 График функције f (лево) и график Тејлоровог полинома T_2 (десно)

Друго решење. Парцијални изводи функције g могу да се добију у општем случају диференцирањем (као у претходном решењу) у једнакости $F(x,y,z)=0$, а парцијални изводи функције f тада могу да се изразе помоћу парцијалних извода функције F. Тако је (видети уџбеник, стр.58)

$$z'_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad z''_{x^2} = -\frac{1}{F'_z}\left[F''_{x^2} + 2F''_{xz}z'_x + F''_{z^2}z'_x z'_x\right],$$

$$z''_{y^2} = -\frac{1}{F'_z}\left[F''_{y^2} + 2F''_{yz}z'_y + F''_{z^2}z'_y z'_y\right], \quad z''_{xy} = -\frac{1}{F'_z}\left[F''_{xy} + F''_{xz}z'_y + F''_{yz}z'_x + F''_{z^2}z'_x z'_y\right].$$

За $F(x,y,z) = 3xy^2 + x^2y - xyz + z^2 - 2$ имамо да је

$$F'_x = 2xy + 3y^2 - yz, \quad F'_y = x^2 + 6xy - xz, \quad F'_z = 2z - xy,$$

$$F''_{x^2} = 2y, \quad F''_{y^2} = 6x, \quad F''_{z^2} = 2, \quad F''_{xy} = 2x + 6y - z, \quad F''_{yz} = -x, \quad F''_{zx} = -y.$$

Заменом $x=1$, $y=-1$ и $z=0$ лако добијамо вредности парцијалних извода функције f у тачки A.

Напомена. Наведене изразе за парцијалне изводе функције f помоћу парцијалних извода функције F не треба памтити јер се они једноставно добијају из једнакости $F=0$. Ако се у тим изразима још и z'_x и z'_y замене са $-F'_x/F'_z$ и $-F'_y/F'_z$, добија се

$$z''_{x^2} = -\frac{1}{F'^3_z}\left[F''_{x^2}F'^2_z - 2F''_{xz}F'_xF'_z + F''_{z^2}F'^2_x\right], \quad z''_{y^2} = -\frac{1}{F'^3_z}\left[F''_{y^2}F'^2_z - 2F''_{yz}F'_yF'_z + F''_{z^2}F'^2_y\right],$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{F'^3_z}\left[F''_{xy}F'^2_z - F''_{xz}F'_yF'_z - F''_{yz}F'_xF'_z + F''_{z^2}F'_xF'_y\right].$$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto \dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y}$ при услову $4x^2+y^2=8$.

Решење: Функција f није дефинисана на координатним осама, па ни дати услов $\varphi=0$, где је $\varphi(x,y)=4x^2+y^2-8$, не важи у тачкама у којима је $x=0$ или $y=0$.

Параметризацијом координата тачака за које важи $\varphi=0$,

$$x=\sqrt{2}\sin t, \quad y = 2\sqrt{2}\cos t, \quad t\in[0,2\pi),$$

добијамо да је (при датом услову)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{\cos t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}g(t).$$

Према томе, при датом услову, функција f је функција једне промењиве (t), а функције f и g достижу локалне екстремуме у истим тачкама. То значи да је довољно одредити тачке у којима функција g има локалне екстремуме.

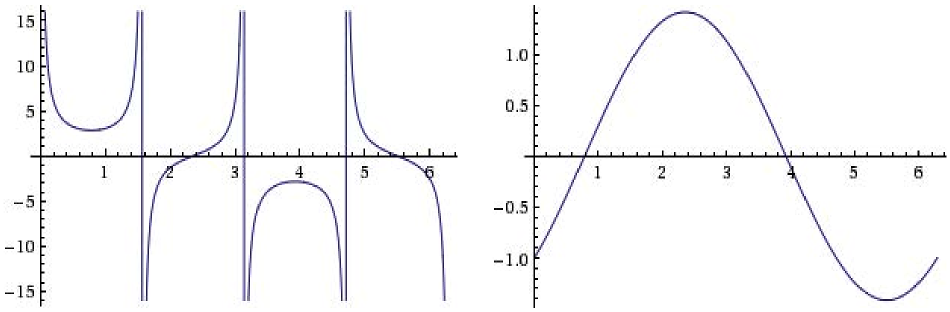
Како је

$$g'(t) = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}+\frac{\sin t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^3 t-\cos^3 t}{\cos^2 t\sin^2 t} = \frac{(\sin t-\cos t)(1+0.5\sin 2t)}{\cos^2 t\sin^2 t},$$

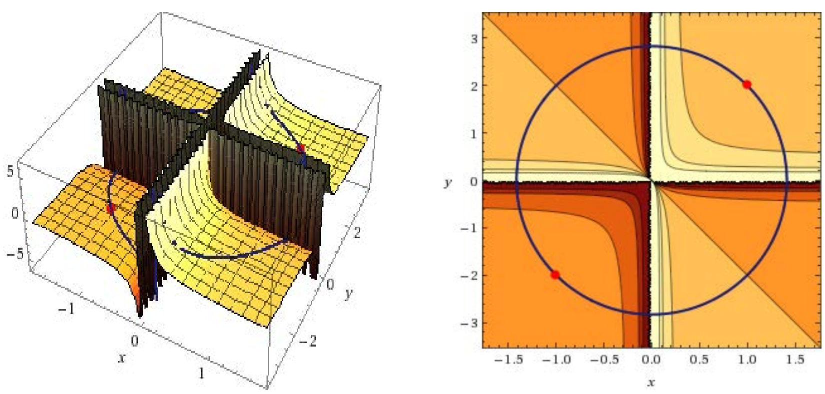
функција g има локални минимум за $t=\pi/4$ и локални максимум за $t=5\pi/4$. Одговарајуће тачке функције f су $A(1,2)$ и $B(-1,-2)$.

Према томе, $f_{\min,\varphi=0}=f(A)=1$ **и** $f_{\max,\varphi=0}=f(B)=-1$**.**

На слици 3 су дати графици функције g и функције $t \mapsto \sin t - \cos t$, а на слици 4 су график функције f са означеним локалним екстремумима (лево) и ниво линије функције f (десно) са кривом дефинисаном условом $\varphi = 0$ и означеним тачкама у којима се достижу локални екстремуми функције f при условy $\varphi = 0$.



Сл.3 График функције g (лево) и график функције $t \mapsto \sin t - \cos t$ (десно)



Сл.4 График функције f (лево) и ниво линије функције f (десно)

Друго решење. За Лагранжову функцију $F = f + \lambda\varphi$ имамо да је

$$F'_x = -\frac{1}{2x^2} + 8\lambda x, \quad F'_y = -\frac{1}{y^2} + 2\lambda y, \quad F''_{x^2} = \frac{1}{x^3} + 8\lambda, \quad F''_{y^2} = \frac{2}{y^3} + 2\lambda, \quad F''_{xy} = 0.$$

Из неопходног услова за стационарне тачке ($F'_x = F'_y = \varphi = 0$) имамо систем

$$16\lambda x^3 = 1, \quad 2\lambda y^3 = 1, \quad 4x^2 + y^2 = 8.$$

Овај систем има два решења која дају стационарне тачке $A(1,2)$ и $B(-1,-2)$ са $\lambda_A = 1/16$ и $\lambda_B = -1/16$.

Провера довољних услова је врло једноставна јер је

$$d^2f(A) = \frac{3}{2}dx^2 + \frac{3}{8}dy^2, \quad d^2f(B) = -\frac{3}{2}dx^2 - \frac{3}{8}dy^2,$$

па је $d^2f(A) > 0$ и $d^2f(B) < 0$ за све прираштаје $(dx, dy) \neq (0,0)$, а не само за оне који одговарају датом услову.

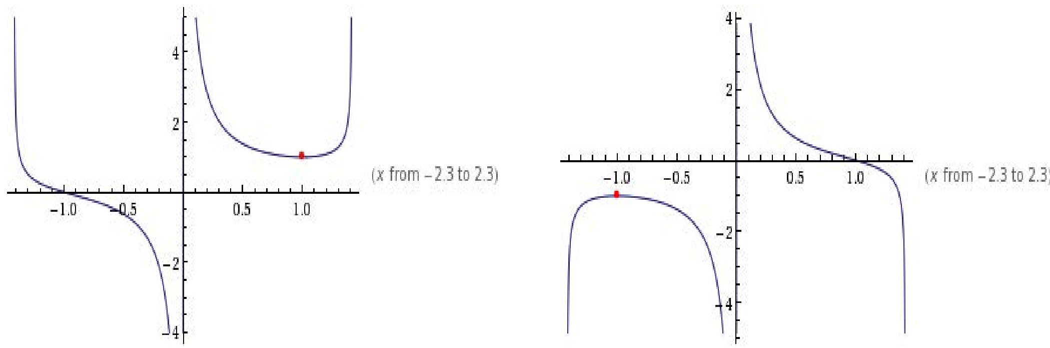
Напомена. Задатак може да се реши и тако што се једна од променљивих x и y елиминише из функције f. Из датог услова $\varphi = 0$ следи да је $y^2 = 8 - 4x^2$. За $y = \sqrt{8-4x^2}$ имамо да је

$$f(x,y) = f(x, \sqrt{8-4x^2}) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{\sqrt{8-4x}} = g(x),$$

а за $y = -\sqrt{8 - 4x^2}$ имамо да је

$$f(x, y) = f(x, -\sqrt{8 - 4x^2}) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{\sqrt{8 - 4x}} = h(x).$$

Функција g има локални минимум у тачки $x = 1$, а функција h има локални максимум у тачки $x = -1$, што се може видети на следећој слици.



Сл.5 График функције g (лево) и график функције h (десно)

Одговарајуће тачке функције f су тачке A и B.