Тема 4

Парцијални изводи и диференцијал

4.1 Парцијални изводи

За функцију $f:(x,y)\mapsto z$ парцијални изводи по x и по y у тачки (a,b) дефинишу се са

$$f'_x(a,b)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a},$$

$$f'_y(a,b)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}.$$

За налажење парцијалних извода користе се сва правила која важе за извод функције једне променљиве, као и правила за парцијалне изводе сложених функција. На пример, ако је $f(x,y)=g(u(x,y),v(x,y))$, онда је $f'_x=g'_u u'_x+g'_v v_x$.

За функцију $f:(x,y,z)\mapsto u$ парцијални изводи по x, по y и по z у тачки $A(a,b,c)$ су

$$f'_x(A)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b,c)-f(a,b,c)}{x-a},\quad f'_y(A)=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y,c)-f(a,b,c)}{y-b},\quad f'_z(A)=\lim_{z\to c}\frac{f(a,b,z)-f(a,b,c)}{z-c}.$$

1. $f'_x=2x+6xy^3,\quad f'_y=3y^2+9x^2y^2$

2. $f'_x=3(2x^2y^2-z+1)^2(4xy^2-1),\quad f'_y=3(2x^2y^2-x+1)^2\cdot 4x^2y=12x^2y(2x^2y^2-x+1)$

3. $f'_x=\dfrac{1\cdot(x^2+y^2+1)-(x+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2}=\dfrac{y^2-x^2+1-2xy^2}{(x^2+y^2+1)^2}$

$$f'_y=\frac{2y(x^2+y^2+1)-(x+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{2x^2y+2y-2xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

4. $f'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-x+1}}\cdot(2x-1),\quad f'_y=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-x+1}}\cdot 2y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-x+1}}$

5. $f'_x=2^{x-y}\ln 2,\quad f'_y=2^{x-y}\ln 2\cdot(-1)=-2^{x-y}\ln 2$

6. $f'_x=e^{-x^2y}\cdot(2xy)=-2xye^{-x^2y},\quad f'_y=e^{-x^2y}\cdot(-x^2)=-x^2e^{-x^2y}$

7. $f'_x=(2y+1)(x+1)^{2y},\quad f'_y=2(x+1)^{2y+1}\ln(x+1)$

8. $f'_x=\cos(xy)\cdot y=y\cos(xy),\quad f'_y=\cos(xy)\cdot x=x\cos(xy)$

9. $f'_x=-\dfrac{\sin x}{\cos y},\quad f'_y=-\dfrac{\cos x}{\cos^2 y}\cdot(-\sin y)=\dfrac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}$

10. $f'_x=\cos\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\dfrac{2x(x^3+y^3)-3x^2(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2}=\dfrac{2xy^3-x^4-3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2}\cos\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$

У изразу за f'_y је x уместо y, а y уместо x.

11. $f'_x = \dfrac{1}{1+y^2/x^2} \cdot y \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = \dfrac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

12. $f'_x = y\ln(xy) + xy \cdot \dfrac{1}{xy} \cdot y = y\ln(xy) + y, \quad f'_y = x\ln(xy) + x$

13. $f'_x = \dfrac{y^2z^3}{xy^2z^3} = \dfrac{1}{x}, \quad f'_y = \dfrac{2xyz^2}{xy^2z^3} = \dfrac{2}{y}, \quad f'_z = \dfrac{3xy^2z^2}{xy^2z^3} = \dfrac{3}{z}$

14. $f'_x = \cos(xy+yz) \cdot y, \quad f'_y = \cos(xy+yz) \cdot (x+z), \quad f'_z = \cos(xy+yz) \cdot y$

15. $f'_x = z(xy)^{z-1}y, \quad f'_y = z(xy)^{z-1}x, \quad f'_z = (xy)^z \ln(xy)$

16. $f'_x = z^{xy} \cdot \ln z \cdot y, \quad f'_y = z^{xy} \cdot \ln z \cdot x, \quad f'_z = xyz^{xy-1}$

17. $f'_x = z^{x/y} \ln z \cdot \dfrac{1}{y}, \quad f'_y = z^{x/y} \ln z \cdot \dfrac{-x}{y^2}, \quad f'_z = \dfrac{x}{y} z^{x/y-1}$

18. Према правилу $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ имамо да је $f'_x = y^z \cdot x^{y^z-1}$.
Према правилу $(a^x)' = a^x \ln a$ имамо да је $f'_y = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot zy^{z-1}$ и $f'_z = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot y^z \cdot \ln y$.

19. $f'_x = z\left(\dfrac{y}{x}\right)^{z-1} \cdot \dfrac{-y}{x^2} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^z \cdot \dfrac{z}{x}, \quad f'_y = z\left(\dfrac{y}{x}\right)^{z-1} \cdot \dfrac{1}{x} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z \cdot \dfrac{z}{y}, \quad f'_z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z \ln \dfrac{y}{x}$

20. $f'_x = yx^{y-1}y^zz^x + x^yy^zz^x \ln z = x^{y-1}y^{z+1}z^x + f\ln z$
Слично се добија

$$f'_y = y^{z-1}z^{x+1}x^z + f\ln x, \quad f'_z = z^{x-1}x^yy^z + f\ln y.$$

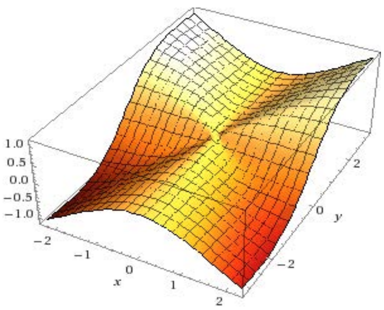
21. $f'_x = e^{xyz}yz = yzf, \quad f'_y = xzf, \quad f'_z = xyf$

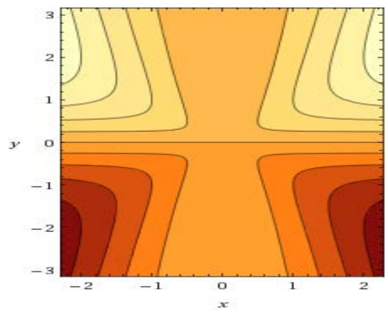
22. Због симетрије израза за f у односу на аргументе, довољно је одредити само један парцијални извод.

$$f'_x = yze^{x+y+z} + xyze^{x+y+z} = (1+x)yze^{x+y+z}, \quad f'_y = (1+y)xze^{x+y+z}, \quad f'_z = (1+z)xye^{x+y+z}$$

23. За $(x,y) \neq (0,0)$ парцијални изводи постоје јер је функција количник полинома,

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(x,y) = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$





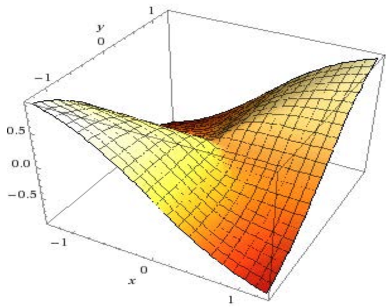
У тачки $(0,0)$ према дефиницији парцијалних извода имамо да је

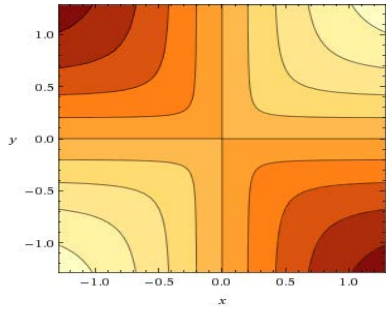
$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

24. За $(x, y) \neq (0, 0)$ парцијални изводи постоје јер је функција количник полинома,

$$f'_x(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$





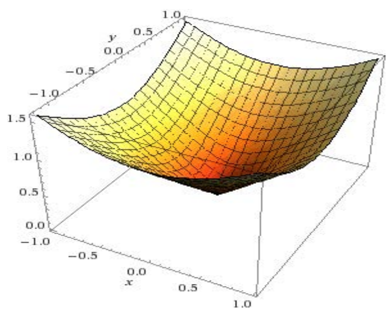
У тачки $(0, 0)$ према дефиницији парцијалних извода имамо да је

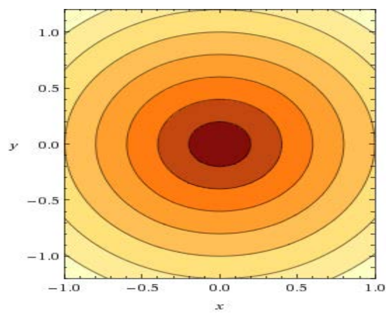
$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

25.

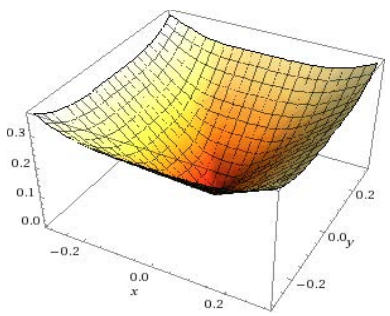
$$\frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

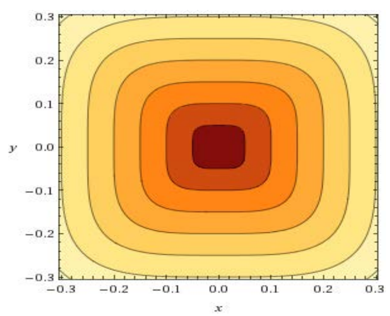




$$\frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \frac{\sqrt{(\Delta y)^2}}{\Delta y} = \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = \begin{cases} 1, & \Delta y > 0 \\ -1, & \Delta y < 0 \end{cases}$$

26. Како је $\dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x} = \dfrac{|x|}{x}$ и како гранична вредност за $|x|/x|$ не постоји када $x \to 0$, не постоји ни парцијални извод $f'_x(0, 0)$.





Слично закључујемо да не постоји ни парцијални извод $f'_y(0,0)$.

27. Област дефинисаности дате функције је $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$. У тачкама $(x,1)$ за $x \neq 0$ и $(1,y)$ за $y \neq 0$ функција f није дефинисана, па према томе, не постоје парцијални изводи $f'_x(0,1)$ $f'_y(1,0)$.

28. $x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi$

$$\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\phi \\ y'_\rho & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho.$$

29. $x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\phi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\phi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\phi & z'_\theta \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & -\rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos\phi \begin{vmatrix} \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} + \rho\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \cos\phi\rho^2\cos\phi\sin\phi + \rho\sin\phi\rho\sin^2\phi \\ &= \rho^2\sin\phi \end{aligned}$$

30. $f'_x = yx^{y-1}y^x + x^y y^x \ln y = \dfrac{y}{x}f + f\ln y, \quad f'_y = x^y \ln x \cdot y^x + x^y \cdot xy^{x-1} = f\ln x + \dfrac{x}{y}f$

$$\begin{aligned} xf'_x + yf'_y &= yf + xf\ln y + yf\ln x + xf = f(x+y+x\ln y + y\ln x) \\ &= f(x+y+\ln y^x + \ln x^y) = f(x+y+\ln f) \end{aligned}$$

31. $f'_x = \dfrac{1}{2}\left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^{-1/2}\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1+y^2}{2yf}, \quad f'_y = \dfrac{x(y^2-1)}{2y^2 f}$

$$f(x,y)(xf'_x + yf'_y) = f(x,y)\left(\frac{x}{2y}\cdot\frac{1+y^2}{f(x,y)} + \frac{x}{2y}\cdot\frac{y^2-1}{f(x,y)}\right) = f(x,y)\cdot\frac{xy^2}{yf(x,y)} = xy.$$

32. $f'_x = \dfrac{e^x}{e^x+e^y+e^z}, \quad f'_y = \dfrac{e^y}{e^x+e^y+e^z}, \quad f'_z = \dfrac{e^z}{e^x+e^y+e^z}, \quad f'_x + f'_y + fz = \dfrac{e^x+e^y+e^z}{e^x+e^y+e^z} = 1.$

33. $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{y}\right), \ fx = g'\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\dfrac{1}{y}, \quad f'_y = -g'\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\dfrac{x}{y^2}, \quad xf'_x + yf'_y = \dfrac{x}{y}g'\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x}{y}g'\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0.$

34. $f'_x = y + g'\cdot\dfrac{1}{y}, \quad f'_y = x + g'\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right), \quad xf'_x + yf'_y = xy + \dfrac{x}{y}g' + xy - \dfrac{x}{y}g' = 2xy$

35. $f(x,y) = g(xy+y^2), \ fx = g'\cdot y, \ f'_y = g'\cdot(x+2y), \ (x+2y)f'_x - yf'_y = (x+2y)yg' - y(x+2y)g' = 0.$

36. $f(x,y) = x^n g\left(\dfrac{y}{x^2}\right), \quad f'_x = nx^{n-1}g\left(\dfrac{y}{x^2}\right) - 2x^n g'\left(\dfrac{y}{x^2}\right)\dfrac{y}{x^3}, \quad f'_y = x^n g'\left(\dfrac{y}{x^2}\right)\dfrac{1}{x^2}$

$$xf'_x + 2yf'_y = nx^n g\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2x^{n-2}yg'\left(\frac{y}{x^2}\right) + 2yx^{n-2}g'\left(\frac{y}{x^2}\right) = nx^n g\left(\frac{y}{x^2}\right) = nf(x,y)$$

37. $f(x,y) = yg(x^2-y^2), \quad f'_x = yg'(x^2-y^2)\cdot 2x, \quad f'_y = y + yg'(x^2-y^2)\cdot(-2y)$

$$y^2 f'_x + xyf'_y = 2xy^3 g' + xy(g - 2y^2 g') = 2xy^3 + xyg - 2xy^3 g' = xyg(x^2-y^2) = xf(x,y).$$

38. $f(x,y)=xg(x^2+y^2),\quad f'_x=g+xg'(x^2+y^2)\cdot 2x,\quad f'_y=xg'(x^2+y^2)\cdot 2y$

$$xyf'_x-x^2f'_y=xy(g+2x^2g')-2x^3tg'=xyg+2x^3yg'-2x^3yg'=xyg(x^2+y^2)=yf(x,y).$$

4.2 Диференцијабилност

Функција две променљиве је диференцијабилна у тачки (a,b) ако је

$$\Delta f(a,b)=f'_x(a,b)\Delta x+f'_y(a,b)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

када $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Специјално, фунција је диференцијабилна у тачки $(0,0)$ ако је

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=o(\sqrt{x^2+y^2})$$

када $(x,y)\to(0,0)$.

Ако су парцијални изводи f'_x и f'_y непрекидни у тачки (a,b), тада је функција f диференцијабилна у тој тачки. Наравно, функција може да буде диференцијабилна у некој тачки и у случају када парцијални изводи нису непрекидни у тој тачки.

39. $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}e^{-1/x^2}=0,\quad f'_y(0,0)=0$

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)$$

Како је

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}e^{-1/\rho^2}=0,$$

то је $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$, па је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

40. $f'_x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0,\quad f'_y(0,0)=0$

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y),\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

Према томе, $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$, што значи да је функција диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Да ли је парцијални извод f'_x непрекидан у тачки $(0,0)$? Како је за $(x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

гранична вредност за f'_x у тачки $(0,0)$ не постоји. На пример, за низ $(x_n,y_n)=(1/2\sqrt{n\pi},1/2\sqrt{n\pi})$ који тежи ка $(0,0)$ када $n\to\infty$ имамо да је $f(x_n,y_n)=-\sqrt{n\pi}\to-\infty$. Према томе, парцијални извод f'_x није непрекидан у тачки $(0,0)$. Слично важи и за парцијални извод f'_y.

41. $f'_x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{|x|}=0,\quad f'_y(0,0)=0,$

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

(јер је $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$). Према томе, $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$, што значи да је функција диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Да ли је парцијални извод f'_x непрекидан у тачки $(0,0)$? Како је за $(x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(x,y)=2(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

гранична вредност за f'_x у тачки $(0,0)$ не постоји. На пример, за низ $(x_n, y_n) = (1/2\sqrt{2}n\pi, 1/2\sqrt{2}n\pi)$ који тежи ка $(0,0)$ када $n \to \infty$ имамо да је $f(x_n, y_n) = -\sqrt{2}$. Према томе, парцијални извод f'_x није непрекидан у тачки $(0,0)$. Слично важи и за парцијални извод f'_y.

42. $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0, \quad f'_y(0,0) = 0$

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = f(x,y)$$

Како је

$$\left| \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|x| \le |x| \to 0 \text{ када } (x,y) \to (0,0),$$

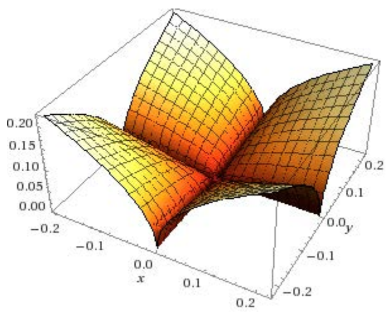
то је $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ и у случају када је $xy \neq 0$ и у случајевима $x \neq 0$, $y = 0$ и $x = 0$, $y \neq 0$. Према томе, функција је диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

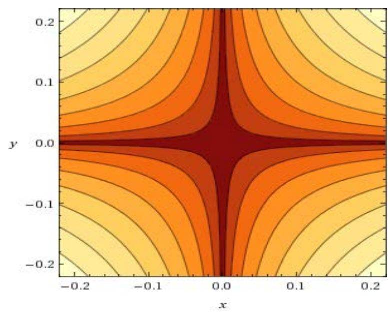
За $x \neq 0$ и $y = 0$ је $f'_x = 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$. Како не постоји гранична вредност за $\cos\dfrac{1}{x}$ када $x \to 0$, то значи да не постоји ни гранична вредност за f'_x. Према томе, парцијални извод f'_x није непрекидан у тачки $(0,0)$. Исто важи и за f'_y.

43. За $xy > 0$ је $f(x,y) = \sqrt{xy}$, па је

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Парцијални извод f'_x нема граничну вредност у $(0,0)$, па није непрекиан у $(0,0)$. То значи да се не може из парцијалних извода закључити да ли је (или није) f диференцијабилна у $(0,0)$.





$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

По дефиницији, функција f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако је

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \end{aligned}$$

односно ако

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

Међутим,

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \text{ и } \Delta y > 0 \\ 1/\sqrt{2}, & \Delta x = \Delta y > 0 \end{cases}$$

Дакле, f није диференцијабилна у $(0,0)$.

44. $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, $\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{xy}$. Да ли је $\Delta f(0,0) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $x \to 0$ и $y \to 0$? Није, јер је $\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}x^{1/3}} \to +\infty$. за $y = x \to 0_+$ Према томе, функција није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

45. Није испуњен неопходан услов за диференцијабилност - функција није непрекидна у тачки $(0,0)$ јер је $f(0,y_=0$, а $f(x,x^3) = 1/2$.

46.

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

У тачки $(x,y) \neq (0,0)$ функције f'_x и f'_y су непрекидне, па је f у тој тачки диференцијабилна.

Како је

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ и } y \neq 0 \\ 1/2, & x = y \neq 0 \end{cases}$$

функција f'_x у $(0,0)$ нема граничну вредност, па се не може закључити да је f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

По дефиницији, f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако је

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \end{aligned}$$

односно ако

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

Међутим,

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \text{ и } \Delta y > 0 \\ 1/2\sqrt{2}, & \Delta x = \Delta y > 0 \end{cases}$$

Дакле, функција f није диференцијабилна у $(0,0)$.

47. $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$, $f'_y(0,0) = 0$, $f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = f(x,y)$

Како је $\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$ за $y = x$, то значи да није $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y) \to (0,0)$. Према томе, функција није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

4.3 Диференцијал

Ако је функција диференшијабилна у тачки (a,b), тада је $\Delta f(a,b) \approx df(a,b)$. Специјално за тачку $(0,0)$ је

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y$$

48. $f'_x = 2xy - y^2$, $f'_y = x^2 - 2xy$, $df = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$

49. $f'_x = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2x$, $f'_y = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2y$, $df(x,y) = 6x(x^2+y^2)dx + 6y(x^2+y^2)dy$

Друго решење. Ако је $f(x,y)=g(x,y)^3$, где је g функција $(x,y)\mapsto x^2+y^2$, тада је

$$df(x,y)=3g^2dg=3g^2d(x^2+y^2)=6g(x,y)(xdx+ydy)$$

50. $f'_x=\dfrac{2(x-y)-(2x+3y)}{(x-y)^2}=-\dfrac{5y}{(x-y)^2},\quad f'_y=\dfrac{3(x-y)+2x+3y}{(x-y)^2}=\dfrac{5x}{(x-y)^2},\quad df=f'_xdx+f'_ydy$

51. $f'_x=\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\cos x,\quad f'_y=(\sin x)^{\cos y}\ln(\sin x)(-\sin y)$

$$df=(\sin x)^{\cos y}\left[\cos y\cot x dx-\sin y\ln(\sin x)dy\right]$$

52. $f'_x=\dfrac{1}{1+xy}\cdot\dfrac{y}{2\sqrt{xy}},\quad f'_y=\dfrac{1}{1+xy}\cdot\dfrac{x}{2\sqrt{xy}},\quad df=\dfrac{ydx+xdy}{2\sqrt{xy}(1+xy)}$

53. $f'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2},\quad f'_y=\dfrac{y}{x^2+y^2},\quad df=f'_xdx+f'_ydy$

55. Ако је $f=\sqrt{g}$, тада је

$$df=\frac{1}{2\sqrt{g}}dg=\frac{1}{2\sqrt{g}}d(x^2+y^2+z^2)=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

56. $f'_x=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2/(x^2+y^2+z^2)}}\cdot\dfrac{-yx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2)}}$ Слично налазимо

$$f'_y=\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2},\quad f'_z=-\frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2)}},\quad df=f'_xdx+f'_ydy+f'_zdz$$

57. $f'_x=y^z\cdot x^{y^z-1},\quad f'_y=x^{y^z}\cdot\ln x\cdot z\cdot y^{z-1},\quad f'_z=x^{y^z}\cdot\ln x\cdot y^z\cdot\ln y,\quad df=f'_xdx+f'_ydy+f'_zdz$

58. $f'_x=m(1+x)^{m-1}(1+y)^n,\quad f'_y=n(1+x)^m(1+y)6n-1$

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=1+mx+ny$$

59. $f'_x=\dfrac{1}{1+x+y},\quad f'_y=\dfrac{1}{1+x+y},\quad f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=1$

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=x+y$$

60. $f'_x=\dfrac{1}{1+(x+y)^2/(1+xy)^2}\cdot\dfrac{1+xy-(x+y)y}{(1+xy)^2}=\dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2},\quad f'_y=\dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2}$

$$f(0,0)=0,\ f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=1,\quad f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=x+y$$

61. Ако је $f(x,y,z)=(1+x)(2+y)^2(3+z)^3$, тада је дати израз једнак $f(0.002,0.003,0.004)$.

$$f'_x=(2+y)^2(3+z)^3,\quad f'_y=2(1+x)(2+y)(3+z)^3,\quad f'_z=3(1+x)(2+y)^2(3+z)^2$$
$$f(x,y,z)\approx f(0,0,0)+df(0,0,0)=1\cdot2^2\cdot3^3+2^23^3x+2^23^3+2^23^3z$$
$$1.001\cdot2.003^2\cdot3.004^3=f(0.002,0.003,0.004)\approx108+0.216+0.324+0.432=108.972$$

62. Ако је $f(x,y,z)=\dfrac{(1+x)^2}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}$, дати израз једнак је $f(0.03,0.02,0.05)$

$$f'_x = \frac{2(1+x)}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}, \quad f'_y = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+x)^2}{(1-y)^{4/3}(1+z)^{1/4}}, \quad f'_z = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+x)^2}{(1-y)^{1/3}(1+z)^{5/4}}$$

$$f(x,y,z) \approx f(0,0,0) + df(0,0,0), \quad f'_x(0,0,0)1,\ f'_y(0,0,0) = \frac{1}{3},\ f'_z(0,0,0) = -\frac{1}{4}$$

$$f(x,y,z) \approx 1 + 2x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z, \quad f(0.03, 0.02, 0.05) \approx 1 + 0.06 + 0.0066 - 0.0125 = 1.054$$

63. Ако је $f(x,y) = \sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}$, онда је дати израз једнак $f(\Delta x, \Delta y)$ за $\Delta x = 0.02$ и $\Delta y = -0.03$

Из

$$f'_x = \frac{3(1+x)^2}{2\sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}}, \quad f'_y = \frac{3(2+y)^2}{2\sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}}$$

добијамо $f'_x(0,0) = 1/2$ и $f'_y(0,0) = 2$, па је

$$f(\Delta x, \Delta y) \approx f(0,0) + df(0,0) = 3 + \frac{1}{2}\Delta x + 2\Delta y = 3 + 0.01 - 0.06$$

Дати израз је приближно једнак 2.95

64. Ако је $f(x,y) = (1-x)^{1+y}$, онда је $0.97^{1.05} = f(0.03, 0.05)$

$$f'_x = -(1+y)(1-x)^y,\ f'_x(0,0) = -1, \quad f'_y = (1-x)^{1+y}\ln(1-x),\ f'_y(0,0) = 0$$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y = 1 - x, \quad 0.97^{1.05} = f(0.03, 0.05) \approx 1 - 0.03 = 0.97$$

4.4 Изводи и диференцијали имплицитне функције

Ако је функција $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto y$ дефинисана једнакошћу $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, тада је

$$y'_{x_j} = -\frac{F'_{x_j}}{F'_y} \text{ за } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Специјално, ако је функција $(x,y) \mapsto z$ дата једнакошћу $F(x,y,z) = 0$, тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Ако су функције $x \mapsto y$ и $x \mapsto z$ дефинисане имплицитно једнакостима $F(x,y,z) = 0$ и $G(x,y,z) = 0$, тада је

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_x \\ G'_x \end{bmatrix}$$

Ако су фунцкције $f : (x,y) \mapsto u$ и $g : (x,y) \mapsto v$ дефинисане имплицитно једнакостима

$$F(x,y,u,v) = 0, \quad G(x,y,u,v) = 0,$$

тада је

$$\begin{bmatrix} f'_x \\ g'_x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_x \\ G'_x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f'_y \\ g'_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_y \\ G'_y \end{bmatrix}$$

65. $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3, \quad f'(x) = -\frac{F'_(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x+y}{2y+x}$ за $2y + x \neq 0$

66.

$$F(x,y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x, \quad F'_x = 2x\ln y - \frac{y^2}{x}, \quad F'_y = \frac{x^2}{y} - 2y\ln x$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x\ln y - y^2/x}{x^2/y - 2y\ln x} = \frac{y^3 - 2xy\ln y}{x^3 - 2xy\ln x}$$

Друго решење. Диференцирањем једнакости $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$ по x добијамо

$$2x\ln y + \frac{x^2}{y} \cdot y' - 2y \cdot y' \cdot \ln x - y^2 \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$y'\left(\frac{x^2}{y} - 2y\ln x\right) = \frac{y^2}{x} - 2x\ln y$$

Треће решење. Применом диференцијала на леву и десну страну једнакости $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$ добијамо

$$2xdx\ln y + x^2\frac{dy}{y} - 2ydy\ln x - y^2\frac{dx}{x} = 0$$

$$dy\left(\frac{x^2}{y} - 2y\ln x\right) = \left(\frac{y^2}{x} - 2x\ln y\right)dx$$

па је $y' = \dfrac{dy}{dx}$

67. $F(x,y) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} - \arctan\dfrac{y}{x}$

$$f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \dfrac{1}{x}} = -\frac{\dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^2}}{\dfrac{y}{c^2+y^2} - \dfrac{x}{x^2+y^2}} = \frac{x+y}{x-y}$$

68. $1 + f' + g' = 0,\ 2x + 2ff' + 2gg' = 0$

$$f' = -1 - g',\ x + f(-1-g') + gg' = 0,\ g'(g-f) = f - x,\ g' = \frac{f-x}{g-f}, \quad f' = 1 - \frac{f-x}{g-f},\ f' = \frac{x-g}{g-f}$$

Други начин. $F = x + y + z,\ G = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$$\begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_x \\ G'_x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2z-2y}\begin{bmatrix} 2z & -1 \\ -2y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2z-2y}\begin{bmatrix} 2z-2x \\ -2y+2x \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = -\frac{z-x}{z-y} = \frac{x-z}{z-y}, \quad f'(y) = -\frac{-y+x}{z-y} = \frac{x-y}{y-z}$$

69. $x^2y - y^2z + zx = 0, \quad 2xydx + x^2dy - 2yzdy - y^2dz + zdx + xdz = 0$

$$(2xy+z)dx + (x^2-2yz)dy = (y^2-x)dz, \quad f'_x = \frac{2xy+z}{y^2-x},\ f'_y = \frac{x^2-2yz}{y^2-z}$$

Други начин. $F(x,y,z) = x^2y - y^2z + zx$

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xy+z}{-y^2+x}, \quad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x^2-2yz}{-y^2+x}$$

70.

$$F'_x = z^2 - 2xy + 2, \quad F'_y = -x^2 + 2yz - 1, \quad F'_z = 2zx + y^2$$

Како је $z(0,1)=1$, то је

$$z'_x=-\frac{F'_x(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)}=-\frac{1-0+2}{1}=-3,\quad z'_y=-\frac{F'_y(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)}=-\frac{-0+2\cdot1\cdot1-1}{1}=-1.$$

71. $x^2+y^2+z^2=2x,\quad 2xdx+2ydy+2zdz=2dx,\quad dz=\frac{1-x}{z}dx-\frac{y}{z}dy$

72. $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$

$$f'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},\quad f'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{xz}{z^2-xy},\quad dz=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy$$

73. $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}+1,\quad f'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{z}{x+z}$

$$f'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y^2}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{yx+yz},\quad dz=\frac{z}{x+z}dx+\frac{z^2}{yx+yz}dy$$

74. $dz-dx=\frac{1}{1+\frac{y^2}{(z-x)^2}}d\left(\frac{y}{z-x}\right)=\frac{(z-x)^2}{(z-x)^2+y^2}\cdot\frac{(z-x)dy-yd(z-x)}{(z-x)^2}$

$$((z-x)^2+y^2+y)d(z-x)=(z-x)dy,\quad dz=dx+\frac{z-x}{(z-x)^2+y^2+y}dy$$

75. $f'_y=-\frac{F'_y}{F'_x},\ g'_z=-\frac{F'_z}{F'_y},\ h'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad f'_yg'_zh'_x=-\frac{F'_y}{F'_x}\cdot\frac{F'_z}{F'_y}\cdot\frac{F'_x}{F'_z}=-1$

76. Диференциањем по x добијамо

$$1=z'_xG+zG'y\frac{z'_x}{-z^2},\quad z=zz'_xG-yz'_xG'$$

одакле је

$$z'_x=\frac{z}{zG-yG'}$$

Диференцирањем по y добијамо

$$0=z'_yG+zG'\frac{z-yz'_y}{z^2},\quad (yG'-zG)z'_y=G'z$$

одакле је

$$z'_y=\frac{zG'}{yG'-zG}$$

Заменом z'_x и z'_y имамо

$$xz'_x+yz'_y=\frac{xz}{zG-yG'}+\frac{yzG'}{yG'-zG}=\frac{zx-yzG'}{zG-yG'}=\frac{z\cdot zG-yzG'}{zG-yG'}=z$$

Друго решење. Из дате једнакости имамо

$$\begin{aligned}dx&=Gdz+zdG=Gdz+zG'd\left(\frac{y}{z}\right)\\&=Gdz+zG'\frac{zdy-ydz}{z^2}\\&=Gdz+G'dy-G'\frac{y}{z}dz\end{aligned}$$

Из последње једнакости следи

$$zdx-zG'dy=(zG-yG')dz$$

односно

$$\frac{z}{zG - yG'}dx + \frac{-zG'}{zG - yG'}dy = dz$$

Према томе,

$$z'_x = \frac{z}{zG - yG'}, \quad z'_y = \frac{zG'}{yG' - zG}$$

Даље исто као у првом решењу

Трећи начин.

$$F(x,y,z) = x - zG\left(\frac{y}{z}\right), \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \; z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

где је

$$F'_x = 1, \quad F'_y = -zG'\frac{1}{z} = -G', \quad F'_z = -G - zG'y\frac{-1}{z^2} = \frac{-zG + yG'}{z}$$

77. $dF = 0, \quad F'_u du + F_v dv = 0, \quad (dx + d(z/y))F'_u + (dy + d(z/x))F_v = 0$

$$\left(dx + \frac{ydz - zdy}{y^2}\right)F'_u + \left(dy + \frac{xdz - zdx}{x^2}\right)F'_v = 0$$

$$\left(F'_u - \frac{z}{x^2}F'_v\right)dx + \left(F'_v - \frac{z}{y^2}F'_v\right)dy + \left(\frac{F'_u}{y} + \frac{F'_v}{x}\right)dz = 0$$

$$dz = \frac{y}{x}\cdot\frac{zF'_v - x^2F'_u}{xF'_u + yF'_v}dx + \frac{x}{y}\cdot\frac{zF'_u - y^2F'_v}{xF'_u + yF'_v}dy$$

$$f'_x = \frac{y}{x}\cdot\frac{zF'_v - x^2F'_u}{xF'_u + yF'_v}, \quad f'_y = \frac{x}{y}\cdot\frac{zF'_u - y^2F'_v}{xF'_u + yF'_v}$$

$$xf_x + yf'_y = \frac{z(xF'_u + yF'_v) = xy(xF'_u + yF'_v)}{xF'_u + yF'_v} = z - xy$$

Друго решење. $F\left(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}\right) = G(x,y,z) = 0$

$$f'_x = -\frac{G'_x}{G'_z} = -\frac{F'_u - \frac{z}{x^2}F'_v}{\frac{1}{y}F'_u + \frac{1}{x}F'_v} = -\frac{y}{x}\cdot\frac{x^2F'_u - zF'_v}{xF'_u + yF'_v}$$

Слично се добија f'_y, а даље исто као у првом решењу.

Треће решење. $\left(1 + \dfrac{f'_x}{y}\right)F'_u + \dfrac{xf'_x - z}{x^2}F'_v = 0$

$$\left(\frac{F'_u}{y} + \frac{F'_v}{x}\right)f'_x = \frac{z}{x^2}F'_v - F'_u, \quad f'_x = \frac{y}{x}\cdot\frac{xF'_v - x^2F'_u}{xF'_u + yF'_v}$$

Слично се добија f'_y, а даље исто као у првом решењу.

78. $dF = 0, \quad (dx + dy + dz)F'_u + (2zdz + 2ydy + 2zdz)F'_v = 0$

$$(F'_u + 2xF'_v)dx + (F'_u + 2yF'_v)dy = (F'_u + 2zF'_v)dz$$

$$f'_x = \frac{F'_u + 2xF'_v}{F'_u + 2zF'_v}, \quad f'_y = \frac{F'_u + 2yF'_v}{F'_u + 2zF'_v}$$

$$(y-f)f'_x + (f-x)f'_y = \frac{yF'_u + 2xyF'_v - 2xfF'_v + 2yfF'_v - xF'_u - 2xyF'_v}{F'_u + 2zF'_v}$$

$$(y-f)f'_x + (f-x)f'_y = \frac{(y-x)F'_u + 2(y-x)fF'_v}{F'_u + 2zF'_v} = y - x$$

79. $dF=0,\quad F'_u du+F'_v dv=0,\quad F'_u dz+(2xdx-2yzdy-y^2dz)F'_v=0$

$$2xF'_v dx-2yzF'_v dy+(F'_u-y^2F'_v)dz=0,\quad dz=\frac{2xF'_v}{y^2F'_v-F'_u}dx-\frac{2yzF'_v}{y^2F'_v-F'_u}dy$$

$$yff'_x+xf=\frac{2xyzF'_v-2xyzF'_v}{y^2F'_v-F'_u}=0$$

80. Диференцирањем датих једнакости по x добијамо

$$y+u'_x v+uv'_x=0,\quad v+v'_x-yu'_x=0$$

За тачку $(1,-1)$ имамо систем

$$2u'_x+v'_x=1,\quad u'_x+v'_x=-2$$

из којег следи $u'_x(1,-1)=3$ и $v'_x(1,-1)=-5$.

Диференцирањем датих једнакости по y добијамо

$$x+u'_y v+uv'_y=0,\quad v'_y-u-yu'_y=0$$

За тачку $(1,-1)$ имамо систем

$$2u'_y+v'_y=-1,\quad u'_y+v'_y=1$$

из којег следи $u'_y=-2$ и $v'_y=3$. Дакле,

$$du(1,-1)=u'_x dx+u'_y dy=3dx-2dy$$

$$dv(1,-1)=v'_x dx+v'_y dy=-5dx+3dy$$

Други начин.

$$\left.\begin{aligned} ydx+xdy+vdu+udv&=0\\ vdx+xdv-udy-ydu&=0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} vdu+udv&=-ydx-xdy\\ ydu-xdv&=vdx-udy\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} xvdu+xudv&=-xydx-x^2dy\\ yudu-xudv&=vudx-u^2dy\end{aligned}\right\}$$

$$(xv+yu)du=(vu-xy)dx-(x^2+u^2)dy,\quad du=\frac{vu-xy}{xv+yu}dx-\frac{x^2+u^2}{xv+yu}dy$$

Трећи начин. $F(x,y,u,v)=xy+uv-1,\quad G(x,y,u,v)=xv-yu-3$

$$\begin{bmatrix} f'_x\\ g'_x\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} F'_x\\ G'_x\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} v & u\\ -y & x\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y\\ v\end{bmatrix}=-\frac{1}{xv+yu}\begin{bmatrix} xy & -uv\\ y^2+v^2 & \end{bmatrix}$$

$$f'_x=\frac{uv-xy}{xv+yu},\quad g'_x=-\frac{y^2+v^2}{xv+yu},\quad f'_x(1,-1)=3,\quad g'_x(1,-1)=-5$$

Слично, за f'_y и g'_y имамо да је $\begin{bmatrix} f'_y\\ g'_y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} F'_y\\ G'_y\end{bmatrix}$

4.5 Извод у правцу. Градијент

Нека је $l=(l_x,l_y)$ јединични вектор. Извод функције f у смеру вектора l дефинисан је са

$$f'_{\vec{l}}(a,b)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tl_x,b+tl_y)-f(a,b)}{t}$$

уколико наведени лимес постоји.

Ако је f диференцијабилна функција у тачки (a,b), тада је

$$f'_{\vec{l}}(a,b)=f'_x(a,b)l_x+f'_y(a,b)l_y=\nabla f(a,b)\cdot l.$$

81. f је диференцијабилна у R^2, $\overrightarrow{AB} = (1,2)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, $\quad f'_{\overrightarrow{AB}}(A) = \nabla f(A) \cdot l, \quad l = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$

$$\nabla f(x,y) = (2x - 3y, 2y - 3x + 1), \quad \nabla f(A) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1), 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 1) = (5, -4)$$

$$f'_{\overrightarrow{AB}}(A) = (5,-4) \cdot (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

82. (1) $f'_x = 2x,\ f'_y = -2y,\ \nabla f(x,y) = (2x, -2y), \quad \nabla f(1,1) = (2,-2) = 2i - 2j$

(2) $l = (1/2, \sqrt{3}/2),\ f'_l(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot l = (2,-2) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = 1 - \sqrt{3}$

83. (1) $\nabla f(x,y,z) = (yz, zx, xy), \quad \nabla f(1,1,1) = (1,1,1)$

(2) $v = (1,1,1), \quad |v| = \sqrt{3}, \quad f'_v(A) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}, \quad f'_v(A) = \sqrt{3}$

84. $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z),\ \nabla f(A) = (2a, 0, 0),\ \nabla f(B) = (0, 2a, 0),\ \nabla f(A) \cdot \nabla f(B) = 0$
Према томе, угао између градијената је $\pi/2$.

85. $l = (x,y,z),\ |l| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$

$$f'_l(P) = \frac{2x}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

Како је $|\nabla f(P)| = \sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + \frac{4z^2}{c^4}}$, једнакост $f'_l(P) = |\nabla f(P)|$ еквивалентна је једнакости

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)(x^2+y^2+z^2),$$

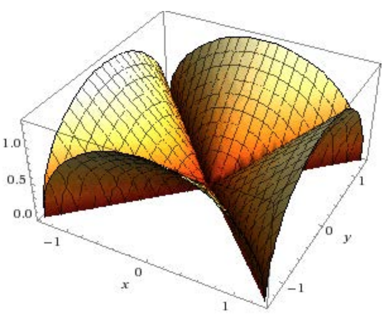
односно једнакости

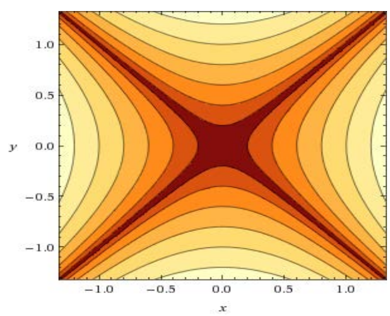
$$x^2y^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 + y^2z^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2 + z^2x^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)^2 = 0.$$

За $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ ова једнакост важи само у случају $a = b = c$. Према томе, једнакост $f'_l(P) = |\nabla f(P)|$ важи за $a = b = c$.

86. Како је

$$\frac{f(0 + tl_x, 0 + tl_y) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tl_x, tl_y) - 0}{t} = \frac{\sqrt{|t^2 l_x^2 - t^2 l_y^2|}}{t} = \frac{\sqrt{t^2 |l_x^2 - l_y^2|}}{t} = \frac{|t|}{t} \cdot \sqrt{|l_x^2 - l_y^2|},$$





извод $f'_l(0,0)$ постоји ако је $\sqrt{|l_x^2 - l_y^2|} = 0$, односно ако је $l_x^2 = l_y^2$. Према томе, функција $f'_l(0,0)$ постоји у правцима $y = x$ и $y = -x$

87. $f'_l(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(tl_x, tl_y) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 l_x l_y}}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{l_x l_y}}{t^{1/3}}$ Овај лимес постоји само ако је $l_x = 0$ или $l_y = 0$. Према томе, извод дате функције постоји само у правцима координатних оса.

88. (1) $\dfrac{f(tl_x,tl_y)-f(0,0)}{t}=\dfrac{\sqrt[3]{t^2l_x^2\cdot tl_y}-0}{t}=\dfrac{\sqrt[3]{t^3l_x^2l_y}}{t}=\sqrt[3]{l_x^2l_y}$

Према томе, $\quad f'_{\vec{l}}(0,0)=\sqrt[3]{l_x^2l_y}$

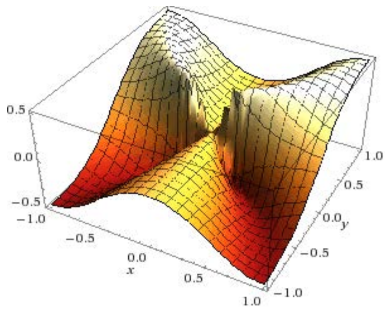
(2) $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0, \quad f(x,y)-f(0,0)-0\cdot x-0\cdot y=\sqrt[3]{x^2y}$

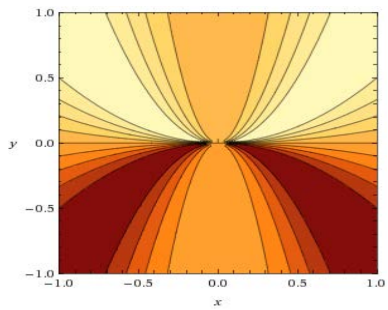
$$\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\begin{cases}0, & x=0, y\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & x=y>0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \sqrt[3]{x^2y}\neq o(\sqrt{x^2+y^2}) \text{ када } (x,y)\to(0,0)$$

Према томе, f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

89. Ако је $l=(l_x,l_y)$ јединични вектор и $l_y\neq 0$, тада је

$$\lim_{t\to 0_+}\frac{f(tl_x,tl_y)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0_+}\frac{t^2l_x^2tl_y}{t(t^2l_x^2+t^2l_y^2)}=\frac{l_x^2l_y}{l_y^2}=\frac{l_x^2}{l_y}$$





Како је још и $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, функција f има извод у смеру произвољног вектора.

Да ли је функција f и диференцијабилна у тачки $(0,0)$? За $y=x\to 0_+$ имамо да је

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^3}{(x^4+x^2)\sqrt{2x^2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Према томе, $f(x,y)$ није $o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$, па функција није диференцијабилна у $(0,0)$.

90. $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=1, \quad f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0, \quad f(0,0)=0$

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=\frac{x^3}{x^2+y^2}-x=\frac{x^3-x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

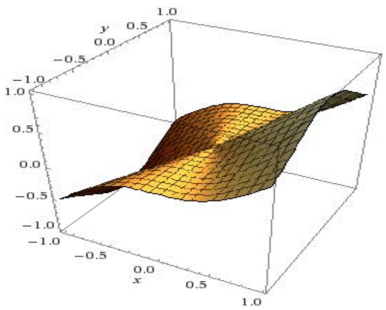
Да ли је $\dfrac{x^3-x^2-y^2}{x^2+y^2}=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$? Није, јер за $x=0$ и $y\to 0_+$ важи

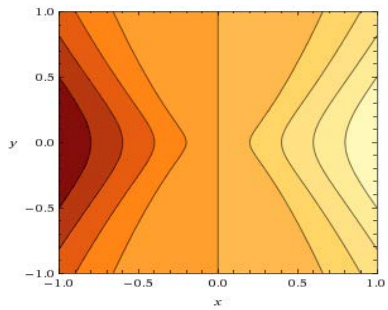
$$\frac{x^3-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=-\frac{y^2}{y^3}=-\frac{1}{y}\to-\infty.$$

Према томе, функција није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

У ком смеру функција има извод у тачки $(0,0)$? За јединични вектор $v=(v_x,v_y)$ имамо да је

$$\frac{f(tv_x,tv_y)-f(0,0)}{t}=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3v_x^3}{t^2v_x^2+t^2v_y^2}=\frac{v_x^3}{v_x^2+v_y^2}.$$





То значи да извод функције f у тачки $(0,0)$ постоји у смеру произвољног вектора v и једнак је $\dfrac{v_x^3}{v_x^2+v_y^2}$. Дакле, функција у тачки $(0,0)$ има извод у смеру сваког вектора, а није диференцијабилна у тој тачки.

4.6 Тангентна раван и нормала површи

Ако је је површ дефинисана функцијом $(x,y) \mapsto z$ која је дата имплицитно једнакошћу $F(x,y,z)=0$, онда је

$$F'_x(A)(x-x_0)+F'_u(A)(y-y_0)+F'_z(A)(z-z_0)=0$$

једначина тангентне равни те површи која садржи тачку $A(x_0,y_0,z_0)$, а

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}$$

је једначина нормале на површ у тачки A.

За површ дефинисану са $z=f(x,y)$ једначине тангентне равни и нормале су

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_)(y-y_0), \qquad \frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

91. $z-5=f'_x(1,2)(x-1)+f'_y(1,2)(y-2), \quad f'_x=2x,\ f'_y=2y,\ f'_x(1,2)=2,\ f'_y(1,2)=4$

$$z+2x+4y+5=0, \qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$$

92. $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-169, \quad F'_x=2x,\ F'_y=2y,\ F'_z=2z, \quad F'_x(M)=6,\ F'_y(M)=8,\ F'_z(M)=24$
Једначина тангенте је $6(x-3)+8(y-4)+24(z-12)=0$, односно $3x+4y+12z-169=0$.
Једначина нормале је $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-12}{12}$

93. $F(x,y,z)=2^{x/z}+2^{y/z}-8, \quad M(2,2,1)$

$$f'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\frac{\ln 2}{z}2^{x/z}}{-\frac{x\ln 2}{z^2}2^{x/z}-\frac{y\ln 2}{z^2}2^{y/z}}=\frac{2^{x/z}}{x2^{x/z}+y2^{y/z}}$$

$$f'_x(2,2)=\frac{2^2}{2\cdot 2^2+2\cdot 2^2}=\frac{1}{4}, \qquad f'_y(2,2)=\frac{1}{4}$$

$$z-1=\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(y-2), \qquad 4z-4=x-2+y-2, \qquad x+y-4z=0$$

$$\frac{x-2}{1/4}=\frac{y-2}{1/4}=\frac{z-1}{-1}, \qquad \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$$

94. $z = xy, \quad M(1,1), \quad z'_x = y, \quad z'_y = x, \quad z - 1 = 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1)$

$$z = x + y - 1, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

95. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6, \quad F'_x = 3x^2 + yz, \quad F'_y = 3y^2 + xz, \quad F'_z = 3z^2 + xy$

$$F'_x(M) = 1, \ F'_y(M) = 11, F'_z(M) = 5, \quad 1(x-1) + 11(y-2) + 5(z+1) = 0$$

$$x + 11y + 5z - 18 = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$$

96. $\underbrace{xy^2 + z^3 - 12}_{F(x,y,z)} = 0, \quad F'_x(x,y,z) = y^2, \quad F'_y(x,y,z) = 2xy, \quad F'_z(x,y,z) = 3z^2$

$$F'_x(M) = 4, \quad F'_y(M) = 4, \quad F'_z(M) = 12, \quad n_\alpha = (1,1,3), \quad 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 3 \cdot (z-2) = 0$$

$$x + y + 3z - 9 = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}$$

97. $F(x,y,z) = x + 2y - \ln z + 4, \quad G(x,y,z) = x^2 - xy - 8x + z$

$$F'_x = 1, \quad F'_y = 2, \quad F'_z = -\frac{1}{z}, \quad G'_x = 2x - y - 8, \quad G'_y = -x, \quad G'_z = 1$$

Тангентна раван прве површи у тачки $M(2,-3,1)$ је

$$x - 2 + 2(y+3) - 1(z-1) = 0,$$

а тангентна раван друге површи у тачки M је

$$-1(x-2) - 2(y+3) + z - 1 = 0.$$

Како обе површи имају исту тангентну раван у тачки M, оне се у тој тачки додирују.

98. $F(x,y,z) = xy + z^2 + xz - 1, \quad F'_x = y + z, \quad F'_y = x, \quad F'_z = 2z + x$

Из услова паралелности тангентне равни и равни $x - y + 2z = 0$ следи да је

$$\frac{y+z}{1} = \frac{x}{-1} = \frac{2z+x}{2} = t,$$

односно $x = -t$, $y = -t/2$ и $z = 3t/2$. Заменом ових израза у $x - y + 2z = 0$ добијамо да је $t^2 = 4/5$.

За $t = 2/\sqrt{5}$ имамо тачку $A\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, а за $t = -2/\sqrt{5}$ имамо тачку $B\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

Дакле, за дату површ тангентне равни $x - y + 2z - \sqrt{5} = 0$ (садржи тачку A) и $x - y + 2z + \sqrt{5} = 0$ (садржи тачку B) паралелне су датој равни $x - y + 2z = 0$.