Д. Ђорић Р. Лазовић Ђ. Јованов

МАТЕМАТИКА

2

ЗБИРКА ЗАДАТАКА И ПРИМЕРИ КОЛОКВИЈУМА

Факултет организационих наука

Београд, 2009.

4. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Парцијални изводи

У задацима **1.-12.** за дату функцију $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subset \mathbb{R}^2$) одредити парцијалне изводе.

1. $f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + y^3 + 3x^2y^3$.

2. $f\ :\ (x,y) \mapsto (2x^2y^2 - x + 1)^3$.

3. $f\ :\ (x,y) \mapsto \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2+1}$.

4. $f\ :\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2-x+1}$.

5. $f\ :\ (x,y) \mapsto 2^{x-y}$. **6.** $f\ :\ (x,y) \mapsto e^{-x^3y}$.

7. $f\ :\ (x,y) \mapsto (x+1)^{2y+1}$.

8. $f\ :\ (x,y) \mapsto sin(xy)$. **9.** $f\ :\ (x,y) \mapsto \dfrac{cos\,x}{cos\,y}$.

10. $f\ :\ (x,y) \mapsto sin\,\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$. **11.** $f\ :\ (x,y) \mapsto arctan\,\dfrac{y}{x}$.

12. $f\ :\ (x,y) \mapsto xy\,ln(xy)$.

У задацима **13.-22.** за дату функцију $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subset \mathbb{R}^3$) одредити парцијалне изводе.

13. $f\ :\ (x,y,z) \mapsto ln(xy^2z^3)$.

14. $f\ :\ (x,y,z) \mapsto sin(xy+yz)$.

15. $f\ :\ (x,y,z) \mapsto (xy)^z$. **16.** $f\ :\ (x,y,z) \mapsto z^{xy}$.

17. $f\ :\ (x,y,z) \mapsto z^{x/y}$. **18.** $f\ :\ (x,y,z) \mapsto x^{y^z}$.

19. $f\ :\ (x,y,z) \mapsto \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$. **20.** $f\ :\ (x,y,z) \mapsto x^yy^zz^x$.

21. $f\ :\ (x,y,z) \mapsto e^{xyz}$. **22.** $f\ :\ (x,y,z) \mapsto xyze^{x+y+z}$.

У задацима **23.-24.** доказати да дата функција $f\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има парцијалне изводе у свакој тачки равни $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

23. $f\ :\ (x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

24. $f\ :\ (x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

У задацима **25.-26.** доказати да дата функција $f\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ нема парцијалне изводе у тачки $(0,0)$.

25. $f\ :\ (x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$. **26.** $f\ :\ (x,y)\mapsto\sqrt[4]{x^4+y^4}$.

27. Доказати да за функцију

$$f\ :\ (x,y)\mapsto\sqrt{1-x^2-y^2}$$

не постоји $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

28. Ако је $x=\rho\,cos\,\phi$ а $y=\rho\,sin\,\phi$, израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\phi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\phi} \end{vmatrix}.$$

29. Ако је $x=\rho\,sin\,\phi\,cos\,\theta$, $y=\rho\,sin\,\phi\,sin\,\theta$ а $z=\rho\,cos\,\phi$, израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\phi} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\phi} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\phi} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix}.$$

30. Доказати да за функцију $f:(x,y)\mapsto x^yy^x$ важи једнакост

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x+y+ln\,f(x,y))f(x,y).$$

31. Доказати да за функцију $f:(x,y)\mapsto\sqrt{xy+x/y}$ важи једнакост

$$f(x,y)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=xy.$$

32. Доказати да за функцију $f:(x,y,z)\mapsto ln(e^x+e^y+e^z)$ важи једнакост

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=1.$$

33. Ако је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција

$$f\,:\,(x,y) \mapsto g\left(\frac{x}{y}\right)$$

задовољава једначину

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

34. Ако је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција

$$f\,:\,(x,y) \mapsto xy + g\left(\frac{x}{y}\right)$$

задовољава једначину

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

35. Ако је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција

$$f\,:\,(x,y) \mapsto g\left(xy + y^2\right)$$

задовољава једначину

$$(x+2y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

36. Ако је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција

$$f\,:\,(x,y) \mapsto x^n g\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

задовољава једначину

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y).$$

37. Ако је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција

$$f\,:\,(x,y) \mapsto yg\left(x^2 - y^2\right)$$

задовољава једначину

$$y^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xf(x,y).$$

38. Ако је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција

$$f : (x,y) \mapsto xg\left(x^2+y^2\right)$$

задовољава једначину

$$xy\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yf(x,y).$$

Диференцијабилност

39. Доказати да је функција

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

диференцијабилна у свим тачкама равни $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

У задацима **40.-42.** доказати да је дата функција $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки $(0,0)$, иако парцијални изводи у тој тачки имају прекид.

40. $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\, sin\, \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

41. $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} (x+y)^2\, sin\, \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

42. $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2\, sin\, \dfrac{1}{x} + y^2\, sin\, \dfrac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ x^2\, sin\, \dfrac{1}{x}, & x \neq 0,\ y = 0 \\ y^2\, sin\, \dfrac{1}{y}, & y \neq 0,\ x = 0 \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

У задацима **43.-47.** доказати да дата функција $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у тачки $(0,0)$ није диференцијабилна, иако има парцијалне изводе.

43. $f : (x,y) \mapsto \sqrt{|xy|}$. **44.** $f : (x,y) \mapsto \sqrt[3]{xy}$.

45. $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

46. $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

47. $f\ :\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Диференцијал

У задацима **48.-54.** за дату функцију $f:D_f\to\mathbb{R}$ $(D_f\subset\mathbb{R}^2)$ одредити тотални диференцијал.

48. $f\ :\ (x,y)\mapsto x^2y-xy^2+1.$

49. $f\ :\ (x,y)\mapsto (x^2+y^2)^3.$

50. $f\ :\ (x,y)\mapsto \dfrac{2x+3y}{x-y}.$

51. $f\ :\ (x,y)\mapsto (sin\,x)^{cos\,y}.$

52. $f\ :\ (x,y)\mapsto arctan\,\sqrt{xy}.$

53. $f\ :\ (x,y)\mapsto ln\,\sqrt{x^2+y^2}.$ **54.** $f\ :\ (x,y)\mapsto \left(\dfrac{y}{x}\right)^x.$

У задацима **55.-57.** за дату функцију $f:D_f\to\mathbb{R}$ $(D_f\subset\mathbb{R}^3)$ одредити тотални диференцијал.

55. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

56. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto arcsin\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

57. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x^{y^z}.$

У задацима **58.-60.** апроксимирати дату функцију $f:D_f\to\mathbb{R}$ $(D_f\subset\mathbb{R}^2)$ диференцијалом за вредности x и y блиске нули.

58. $f\ :\ (x,y)\mapsto (1+x)^m(1+y)^n,\quad m,n\in\mathbb{N}.$

59. $f\ :\ (x,y)\mapsto ln(1+x+y).$

60. $f\ :\ (x,y)\mapsto arctan\,\dfrac{x+y}{1+xy}.$

У задацима **61.-64.**, користећи диференцијал, израчунати приближну вредност датог израза.

61. $1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^3$

62. $\dfrac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{1.05^3}}}$

63. $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$

64. $0.97^{1.05}.$

Изводи и диференцијали имплицитне функције

У задацима **65.-67.** израчунати извод функције $f\ :\ x \mapsto y$ дефинисане датом једнакошћу.

65. $x^2 + xy + y^2 = 3.$

66. $x^2\, ln\, y - y^2\, ln\, x = 0.$

67. $ln\, \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = arctan\, \dfrac{y}{x}.$

68. За функције $f\ :\ x \mapsto y$ и $g\ :\ x \mapsto z$ дефинисане системом једначина

$$x + y + z = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

одредити $\dfrac{df}{dx}$ и $\dfrac{dg}{dx}$.

69. Одредити парцијалне изводе функције $f : (x, y) \mapsto z$ дефинисане једнакошћу

$$x^2y - y^2z + zx = 0.$$

70. Израчунати $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ ако је функција $f : (x, y) \mapsto z$ дефинисана једнакошћу

$$z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y = 0.$$

У задацима **71.-74.** за функцију $f\ :\ (x, y) \mapsto z$ дефинисану датом једнакошћу одредити тотални диференцијал.

71. $x^2 + y^2 + z^2 = 2x.$

72. $z^3 - 3xyz = a^3, \quad a \in \mathbb{R}.$

73. $\dfrac{x}{z} = ln\, \dfrac{z}{y} + 1.$

74. $z - x = arctan\, \dfrac{y}{z-x}.$

75. Ако су функције $f\ :\ (y, z) \mapsto x$, $g\ :\ (x, z) \mapsto y$ и $h\ :\ (x, y) \mapsto z$ дефинисане једнакошћу $F(x, y, z) = 0$, доказати да је

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x} = -1.$$

76. Ако је функција $F\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција $f : (x, y) \mapsto z$ дефинисана једнакошћу

$$x = zF\left(\frac{y}{z}\right)$$

задовољава једначину

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y).$$

77. Ако је функција $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција $f:(x,y)\mapsto z$ дефинисана једнакошћу

$$F\left(x+\frac{z}{y},\ y+\frac{z}{x}\right)=0$$

задовољава једначину

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)-xy.$$

78. Ако је функција $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција $f:(x,y)\mapsto z$ дефинисана једнакошћу

$$F\left(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2\right)=0$$

задовољава једначину

$$(y-f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(f(x,y)-x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x-y.$$

79. Ако је функција $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна, доказати да функција $f:(x,y)\mapsto z$ дефинисана једнакошћу

$$F\left(z,\ x^2-y^2z\right)=0$$

задовољава једначину

$$yf(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

80. За функције $f : (x,y)\mapsto u$ и $g : (x,y)\mapsto v$ дефинисане системом једначина

$$xy+uv=1$$

$$xv-yu=3$$

одредити диференцијал у тачки $(1,-1)$ ако је $u(1,-1)=1$ и $v(1,-1)=2$.

Извод у правцу. Градијент

81. За функцију $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2-3xy+y-1$

(1) одредити градијент у тачки $A(1,-1)$ и тачки $B(2,1)$,

(2) израчунати извод $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{AB}}(1,-1)$.

82. За функцију $f:(x,y)\mapsto x^2-y^2$

(1) одредити градијент у тачки $A(1,1)$,

(2) израчунати извод $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(1,1)$ ако вектор $\vec{l}$ са позитивним смером осе Ox гради угао величине $\pi/3$.

83. За функцију $f:(x,y,z)\mapsto xyz$

(1) одредити градијент у тачки $A(1,1,1)$,

(2) израчунати извод $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ ако је $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

84. Израчунати угао између градијената функције

$$f\ :\ (x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2$$

у тачкама $A(a,0,0)$ и $B(0,a,0)$.

85. Одредити извод функције

$$f\ ;\ (x,y,z)\mapsto \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\quad a,b,c\in\mathbb{R}^+$$

у правцу радијус вектора тачке $P(x,y,z)$. За које вредности a,b и c је $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}=|\nabla f|$?

86. Доказати да функција

$$f\ :\ (x,y)\mapsto \sqrt{|x^2-y^2|}$$

у тачки $(0,0)$ има извод једино у правцу $y=x$ и $y=-x$.

87. Доказати да функција

$$f\ :\ (x,y)\mapsto \sqrt[3]{xy}$$

у тачки $(0,0)$ има извод једино у правцу координатних оса.

У задацима **88.-90.** доказати да дата функција у тачки $(0,0)$ има извод у произвољном правцу, али да није у тој тачки диференцијабилна.

88. $f\ :\ (x,y) \mapsto \sqrt[3]{x^2y}.$

89. $f\ :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

90. $f\ :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Тангентна раван и нормала површи

У задацима **91.-96.** написати једначину тангентне равни и једначину нормале у тачки M површи дефинисане датом једначином

91. $z = x^2 + y^2, \quad M(1,2,5).$

92. $x^2 + y^2 + z^2 = 169, \quad M(3,4,12).$

93. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M(2,2,1).$

94. $z = xy, \quad M(1,1,1).$

95. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6, \quad M(1,2,-1).$

96. $xy^2 + z^3 = 12, \quad M(1,2,2).$

97. Доказати да се површи дефинисане једначинама

$$x + 2y - ln\, z + 4 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$$

додирују у тачки $M(2,-3,1)$.

98. Одредити тачку M површи дефинисане једначином

$$xy + z^2 + xz = 1$$

у којој је тангентна раван паралелна равни $\Pi : x - y + 2z = 0$.

6. ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ

Локални екстремум функције две променљиве

У задацима **1.-19.** за дату функцију $f : D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subset \mathbb{R}^2)$ одредити све локалне екстремуме.

1. $f\ :\ (x,y) \mapsto 4(x-y) - x^2 - y^2.$

2. $f\ :\ (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy + 1.$

3. $f\ :\ (x,y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

4. $f\ :\ (x,y) \mapsto x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$

5. $f\ :\ (x,y) \mapsto x^3y^2(12 - x - y), \quad x > 0,\ y > 0.$

6. $f\ :\ (x,y) \mapsto \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y.$

7. $f\ :\ (x,y) \mapsto xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, \quad x > 0,\ y > 0.$

8. $f\ :\ (x,y) \mapsto x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$

9. $f\ :\ (x,y) \mapsto 2 - \sqrt[3]{x^2+y^2}.$

10. $f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2\,ln\,x - 18\,ln\,y.$

11. $f\ :\ (x,y) \mapsto xy\,ln(x^2+y^2).$

12. $f\ :\ (x,y) \mapsto e^{2x}(x + y^2 + 2x).$

13. $f\ :\ (x,y) \mapsto e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2).$

14. $f\ :\ (x,y) \mapsto e^{x+2y}(x^2 - y^2).$

15. $f\ :\ (x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}(x^2 + 2y^2).$

16. $f\ :\ (x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}(x - 2y).$

17. $f\ :\ (x,y) \mapsto sin\,x + sin\,y + cos(x+y), \quad x, y \in [0, \pi/4].$

18. $f\ :\ (x,y) \mapsto sin\,x + sin\,y + sin(x+y), \quad x, y \in [0, \pi/2].$

19. $f\ :\ (x,y)\mapsto sin\,x\,sin\,y\,sin(x+y), \quad x,y\in[0,\pi].$

У задацима **20.-25.** доказати да дата функција $f:D_f\to\mathbb{R}$ $(D_f\subset\mathbb{R}^2)$ нема екстремума.

20. $f\ :\ (x,y)\mapsto x^2-xy-y^2.$

21. $f\ :\ (x,y)\mapsto x^3-2x^2y^2+y^4.$

22. $f\ :\ (x,y)\mapsto xy+\dfrac{1}{2(x+y)}.$

23. $f\ :\ (x,y)\mapsto x^2y\,ln\,x.$

24. $f\ :\ (x,y)\mapsto x-2y+ln\sqrt{x^2+y^2}+3\,arctan\,\dfrac{y}{x}.$

25. $f\ :\ (x,y)\mapsto xe^{y+x\,sin\,y}.$

У задацима **26.-29.** доказати да дата функција $f\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ нема у $(0,0)$ локални екстремум.

26. $f\ :\ (x,y)\mapsto x^2-2xy+4y^3.$

27. $f\ :\ (x,y)\mapsto 3x^2y-x^3-y^4.$

28. $f\ :\ (x,y)\mapsto x^3+y^3-3xy.$

29. $f\ :\ (x,y)\mapsto x^4+y^4-x^2-2xy-y^2.$

У задацима **30.-32.** доказати да дата функција $f\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ има у $(0,0)$ минимум дуж сваке праве која садржи тачку $(0,0)$, али нема локални екстремум у $(0,0)$.

30. $f\ :\ (x,y)\mapsto 2x^2-3xy^2+y^4.$

31. $f\ :\ (x,y)\mapsto x^2-2xy^2+y^4-y^5.$

32. $f\ :\ (x,y)\mapsto y^5-x^2-y^2+2xy.$

33. Доказати да функција

$$f\ :\ (x,y)\mapsto x^2+xy+y^2+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{y}, \quad a\in\mathbb{R}$$

има локални минимум у тачки $M(a/\sqrt[3]{3},a/\sqrt[3]{3})$.

У задацима **34.-36.** одредити све локалне екстремуме функције $f\ :\ (x,y)\mapsto z$ која је дата имплицитно.

34. $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0.$

35. $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0.$

36. $z^2+xyz-xy^2-x^3=0.$

37. Доказати да међу троугловима једнаког обима највећу површину има једнакостранични троугао.

Локални екстремум функције три променљиве

У задацима **38.-48.** за дату функцију $f : D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subset \mathbb{R}^3)$ одредити све локалне екстремуме.

38. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto (x-1)^2 + y^3 + 6y^2 + 2z^2 + 2xz.$

39. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$

40. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x.$

41. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + (4 - x - y - z)^2.$

42. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto xyz(1 - x - y - z).$

43. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z), \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

44. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto \dfrac{2x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2.$

45. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}.$

46. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{2}{z}.$

47. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto 3\, ln\, x + 2\, ln\, y + 5\, ln\, z + ln(22 - x - y - z).$

48. $f\ :\ (x, y, z) \mapsto (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}.$

Условни екстремум функције две променљиве

У задацима **49.-57.** за дату функцију $f : D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subset \mathbb{R}^2)$ одредити све екстремуме при задатом услову.

49. $f\ :\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \qquad x + y = 1.$

50. $f\ :\ (x, y) \mapsto x + 2y, \qquad x^2 + y^2 = 1.$

51. $f\ :\ (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2, \qquad x^2 + y^2 = 1.$

52. $f\ :\ (x, y) \mapsto (x-1)^2 + (y+1)^2, \qquad x^2 + y^2 - 2xy = 0.$

53. $f\ :\ (x, y) \mapsto x^n + y^n, \qquad x + y = 2,\ x > 0,\ y > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

54. $f\ :\ (x, y) \mapsto xy, \qquad x^2 + y^2 = 2.$

55. $f\ :\ (x, y) \mapsto e^{xy}, \qquad x + y = 1.$

56. $f\ :\ (x,y)\mapsto \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\qquad x+y=2.$

57. $f\ :\ (x,y)\mapsto \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\qquad \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1.$

Условни екстремум функције три променљиве

У задацима **58.-64.** за дату функцију $f : D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subset \mathbb{R}^3)$ одредити све екстремуме при задатом услову.

58. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x-y+2z,\qquad x^2+y^2+2z^2=2.$

59. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto 2x+y-2z,\qquad x^2+y^2+z^2=36.$

60. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x^3+y^3+z^3,\qquad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1.$

61. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto 3x^2+3y^2+z^2,\qquad x+y+z=1.$

62. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto xy+2xz+2yz,\qquad xyz=4.$

63. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x+y+z,\qquad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1.$

64. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto xy^2z^3,\qquad x+2y+3z=12,\ x,y,z>0.$

65. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto xyz,\qquad x^2+y^2+z^2=3.$

66. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto sin\,x\,sin\,y\,sin\,z,\qquad x+y+z=\pi/2,\ x,y,z>0.$

67. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto cos\,x\,cos\,y\,cos\,z,\qquad x+y+z=\pi.$

У задацима **68.-71.** за дату функцију $f\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ одредити све екстремуме при задатим условима.

68. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2,\qquad x+z=2,\ y^2+z^2=1.$

69. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto xyz,\qquad x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1.$

70. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto xy+yz,\qquad x^2+y^2=2,\ y+z=2,\ x,y,z>0.$

71. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto xyz,\qquad x+y+z=5,\ xy+xz+yz=8.$

У задацима **72.-73.** доказати да дата функција $f\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ нема екстемума при задатом услову.

72. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x+y+z,\qquad x^2-y^2-x-y-z=0.$

73. $f\ :\ (x,y,z)\mapsto sin\,x+sin\,y-sin\,z,\qquad x+y=\pi/2,$ $x,y,z\in(0,\pi/2).$

74. Дата је раван $\alpha\ :\ 3x-2z=0$ и тачке $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$. Одредити тачку M равни α тако да збир квадрата растојања тачке M од тачака A и B буде минималан.

75. Одредити тачку површи $x^2+2y^2+4z^2=1$ која је најближа равни

$$x+y+z=4.$$

76. Разложити позитиван број a на три сабирка тако да збир квадрата тих сабирака буде минималан.

77. Разложити позитиван број a на три позитивна сабирка x, y и z тако да производ

(1) xyz,

(2) xy^2z^3,

(3) $x^ly^mz^n, \quad l,m,n\in\mathbb{N}$

буде максималан.

78. Разложити позитиван број a на три чиниоца тако да збир њихових реципрочних вредности буде минималан.

Најмања и највећа вредност функције две променљиве

У задацима **79.-89.** одредити најмању и највећу вредност дате функције $f:D_f\to\mathbb{R}$ $(D_f\subset\mathbb{R}^2)$ на скупу $\mathcal{D}$.

79. $f\,:\,(x,y)\mapsto(x-1)^2+(y-2)^2+3,$
$\mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,x+y\le 4,\ x,y\ge 0\}.$

80. $f\,:\,(x,y)\mapsto x+y, \quad \mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 1\}.$

81. $f\,:\,(x,y)\mapsto x^2-y^2, \quad \mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 4\}.$

82. $f\,:\,(x,y)\mapsto y^2+2xy-3x^2+x, \quad \mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,|x|+|y|\le 1\}.$

83. $f\,:\,(x,y)\mapsto x-2y-3,$
$\mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,0\le x\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}.$

84. $f\,:\,(x,y)\mapsto x^2+y^2-4x,$
$\mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,x-4\le -|y-1|,\ x\ge 0\}.$

85. $f\,:\,(x,y)\mapsto x^2+3y^2-x+18y-4,$
$\mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,0\le x\le y\le 4\}.$

86. $f\,:\,(x,y)\mapsto 2x^3+4x^2+y^2-2xy, \quad \mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,x^2\le y\le 4\}.$

87. $f\,:\,(x,y)\mapsto ln(xy), \quad \mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,|x+3|\le 1,\ -4\le y\le x\}.$

88. $f\,:\,(x,y)\mapsto x^2y\,ln\,x,$
$\mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,1\le x\le e,\ 1\le y\le x^2\}.$

89. $f\,:\,(x,y)\mapsto sin\,x+sin\,y+sin(x+y),$
$\mathcal{D}=\{(x,y)\,:\,0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2\}.$

Најмања и највећа вредност функције три променљиве

У задацима **90.-92.** одредити најмању и највећу вредност дате функције $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на скупу $\mathcal{D}$.

90. $f : (x, y, z) \mapsto x + y + z, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

91. $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z$,
$\mathcal{D} = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, \ |y| \leq 2, \ |z - 1| \leq 2\}$.

92. $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + 2y^2 + 3z^2$,
$\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$.

Д. Ђорић Р. Лазовић Ђ. Јованов

МАТЕМАТИКА 2

Збирка задатака и примери колоквијума

РЕШЕЊА ОДАБРАНИХ ЗАДАТАКА

Драган Ђорић

Студентима генерације 2015/2016

Проф Драган Ђорић

Факултет организационх наука, Београд

Садржај

Тема 4

Парцијални изводи и диференцијал

4.1 Парцијални изводи

За функцију $f:(x,y)\mapsto z$ парцијални изводи по x и по y у тачки (a,b) дефинишу се са

$$f'_x(a,b)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a},$$

$$f'_y(a,b)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}.$$

За налажење парцијалних извода користе се сва правила која важе за извод функције једне променљиве, као и правила за парцијалне изводе сложених функција. На пример, ако је $f(x,y)=g(u(x,y),v(x,y))$, онда је $f'_x=g'_u u'_x+g'_v v_x$.

За функцију $f:(x,y,z)\mapsto u$ парцијални изводи по x, по y и по z у тачки $A(a,b,c)$ су

$$f'_x(A)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b,c)-f(a,b,c)}{x-a},\quad f'_y(A)=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y,c)-f(a,b,c)}{y-b},\quad f'_z(A)=\lim_{z\to c}\frac{f(a,b,z)-f(a,b,c)}{z-c}.$$

1. $f'_x=2x+6xy^3,\quad f'_y=3y^2+9x^2y^2$

2. $f'_x=3(2x^2y^2-z+1)^2(4xy^2-1),\quad f'_y=3(2x^2y^2-x+1)^2\cdot 4x^2y=12x^2y(2x^2y^2-x+1)$

3. $f'_x=\dfrac{1\cdot(x^2+y^2+1)-(x+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2}=\dfrac{y^2-x^2+1-2xy^2}{(x^2+y^2+1)^2}$

$$f'_y=\frac{2y(x^2+y^2+1)-(x+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{2x^2y+2y-2xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

4. $f'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-x+1}}\cdot(2x-1),\quad f'_y=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-x+1}}\cdot 2y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-x+1}}$

5. $f'_x=2^{x-y}\ln 2,\quad f'_y=2^{x-y}\ln 2\cdot(-1)=-2^{x-y}\ln 2$

6. $f'_x=e^{-x^2y}\cdot(2xy)=-2xye^{-x^2y},\quad f'_y=e^{-x^2y}\cdot(-x^2)=-x^2e^{-x^2y}$

7. $f'_x=(2y+1)(x+1)^{2y},\quad f'_y=2(x+1)^{2y+1}\ln(x+1)$

8. $f'_x=\cos(xy)\cdot y=y\cos(xy),\quad f'_y=\cos(xy)\cdot x=x\cos(xy)$

9. $f'_x=-\dfrac{\sin x}{\cos y},\quad f'_y=-\dfrac{\cos x}{\cos^2 y}\cdot(-\sin y)=\dfrac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}$

10. $f'_x=\cos\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\dfrac{2x(x^3+y^3)-3x^2(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2}=\dfrac{2xy^3-x^4-3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2}\cos\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$

У изразу за f'_y је x уместо y, а y уместо x.

11. $f'_x = \frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad f'_y = \frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$

12. $f'_x = y\ln(xy) + xy\cdot\frac{1}{xy}\cdot y = y\ln(xy)+y,\quad f'_y = x\ln(xy)+x$

13. $f'_x = \frac{y^2z^3}{xy^2z^3} = \frac{1}{x},\quad f'_y = \frac{2xyz^2}{xy^2z^3} = \frac{2}{y},\quad f'_z = \frac{3xy^2z^2}{xy^2z^3} = \frac{3}{z}$

14. $f'_x = \cos(xy+yz)\cdot y,\quad f'_y = \cos(xy+yz)\cdot(x+z),\quad f'_z = \cos(xy+yz)\cdot y$

15. $f'_x = z(xy)^{z-1}y,\quad f'_y = z(xy)^{z-1}x,\quad f'_z = (xy)^z\ln(xy)$

16. $f'_x = z^{xy}\cdot\ln z\cdot y,\quad f'_y = z^{xy}\cdot\ln z\cdot x,\quad f'_z = xyz^{xy-1}$

17. $f'_x = z^{x/y}\ln z\cdot\frac{1}{y},\quad f'_y = z^{x/y}\ln z\cdot\frac{-x}{y^2},\quad f'_z = \frac{x}{y}z^{x/y-1}$

18. Према правилу $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ имамо да је $f'_x = y^z\cdot x^{y^z-1}$.
Према правилу $(a^x)' = a^x\ln a$ имамо да је $f'_y = x^{y^z}\cdot\ln x\cdot zy^{z-1}$ и $f'_z = x^{y^z}\cdot\ln x\cdot y^z\cdot\ln y$.

19. $f'_x = z\left(\frac{y}{x}\right)^{z-1}\cdot\frac{-y}{x^2} = -\left(\frac{y}{x}\right)^z\cdot\frac{z}{x},\quad f'_y = z\left(\frac{y}{x}\right)^{z-1}\cdot\frac{1}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^z\cdot\frac{z}{y},\quad f'_z = \left(\frac{y}{x}\right)^z\ln\frac{y}{x}$

20. $f'_x = yx^{y-1}y^zz^x + x^yy^zz^x\ln z = x^{y-1}y^{z+1}z^x + f\ln z$
Слично се добија
$$f'_y = y^{z-1}z^{x+1}x^z + f\ln x,\quad f'_z = z^{x-1}x^yy^z + f\ln y.$$

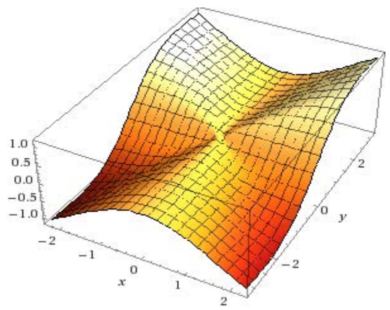
21. $f'_x = e^{xyz}yz = yzf,\quad f'_y = xzf,\quad f'_z = xyf$

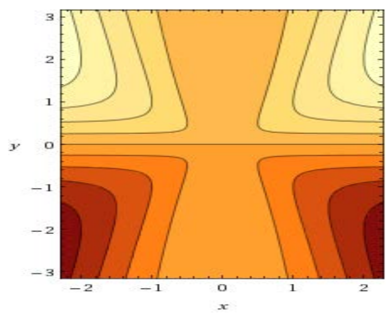
22. Због симетрије израза за f у односу на аргументе, довољно је одредити само један парцијални извод.

$$f'_x = yze^{x+y+z} + xyze^{x+y+z} = (1+x)yze^{x+y+z},\quad f'_y = (1+y)xze^{x+y+z},\quad f'_z = (1+z)xye^{x+y+z}$$

23. За $(x,y)\neq(0,0)$ парцијални изводи постоје јер је функција количник полинома,

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\quad f'_y(x,y) = \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$





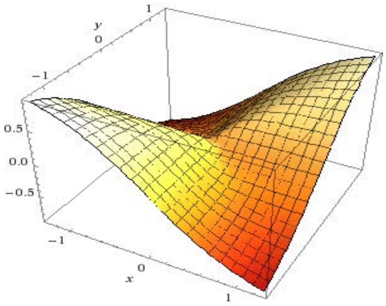
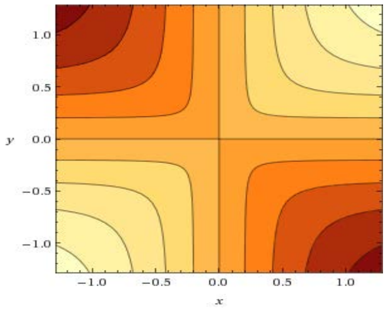
У тачки $(0,0)$ према дефиницији парцијалних извода имамо да је

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to0}\frac{0}{\Delta y} = 0$$

24. За $(x, y) \neq (0,0)$ парцијални изводи постоје јер је функција количник полинома,

$$f'_x(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f'_y(x,y) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

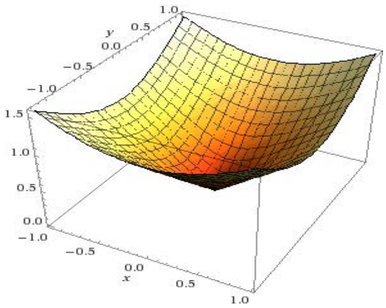
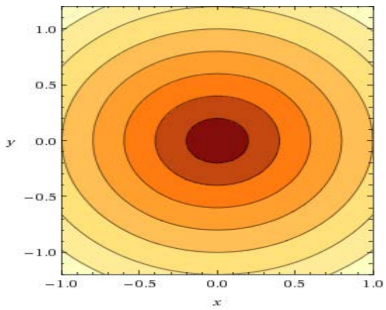
У тачки $(0,0)$ према дефиницији парцијалних извода имамо да је

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

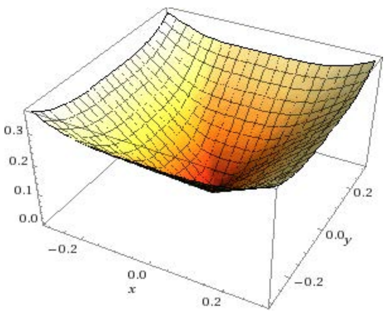
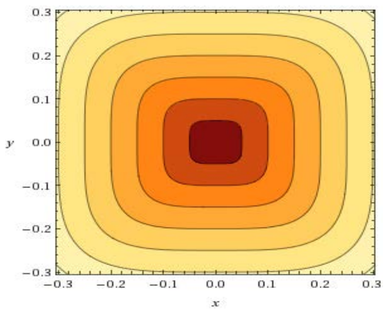
25.

$$\frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \frac{\sqrt{(\Delta y)^2}}{\Delta y} = \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = \begin{cases} 1, & \Delta y > 0 \\ -1, & \Delta y < 0 \end{cases}$$

26. Како је $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x} = \dfrac{|x|}{x}$ и како гранична вредност за $|x|/x$ не постоји када $x \to 0$, не постоји ни парцијални извод $f'_x(0,0)$.

Слично закључујемо да не постоји ни парцијални извод $f'_y(0,0)$.

27. Област дефинисаности дате функције је $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$. У тачкама $(x,1)$ за $x \ne 0$ и $(1,y)$ за $y \ne 0$ функција f није дефинисана, па према томе, не постоје парцијални изводи $f'_x(0,1)$ $f'_y(1,0)$.

28. $x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi$

$$\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\phi \\ y'_\rho & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho.$$

29. $x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\phi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\phi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\phi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & -\rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix}& \\ = \cos\phi \begin{vmatrix} \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} + \rho\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix}& \\ = \cos\phi\rho^2\cos\phi\sin\phi + \rho\sin\phi\rho\sin^2\phi& \\ = \rho^2\sin\phi&\end{aligned}$$

30. $f'_x = yx^{y-1}y^x + x^y y^x \ln y = \dfrac{y}{x}f + f\ln y, \quad f'_y = x^y\ln x \cdot y^x + x^y \cdot xy^{x-1} = f\ln x + \dfrac{x}{y}f$

$$\begin{aligned} xf'_x + yf'_y &= yf + xf\ln y + yf\ln x + xf = f(x+y+x\ln y + y\ln x) \\ &= f(x+y+\ln y^x + \ln x^y) = f(x+y+\ln f) \end{aligned}$$

31. $f'_x = \dfrac{1}{2}\left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^{-1/2}\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1+y^2}{2yf}, \quad f'_y = \dfrac{x(y^2-1)}{2y^2 f}$

$$f(x,y)(xf'_x + yf'_y) = f(x,y)\left(\frac{x}{2y}\cdot\frac{1+y^2}{f(x,y)} + \frac{x}{2y}\cdot\frac{y^2-1}{f(x,y)}\right) = f(x,y)\cdot\frac{xy^2}{yf(x,y)} = xy.$$

32. $f'_x = \dfrac{e^x}{e^x+e^y+e^z}, \quad f'_y = \dfrac{e^y}{e^x+e^y+e^z}, \quad f'_z = \dfrac{e^z}{e^x+e^y+e^z}, \quad f'_x + f'_y + fz = \dfrac{e^x+e^y+e^z}{e^x+e^y+e^z} = 1.$

33. $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{y}\right), \ fx = g'\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\dfrac{1}{y}, \quad f'_y = -g'\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\dfrac{x}{y^2}, \quad xf'_x + yf'_y = \dfrac{x}{y}g'\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x}{y}g'\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0.$

34. $f'_x = y + g'\cdot\dfrac{1}{y}, \quad f'_y = x + g'\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right), \quad xf'_x + yf'_y = xy + \dfrac{x}{y}g' + xy - \dfrac{x}{y}g' = 2xy$

35. $f(x,y) = g(xy+y^2), \ fx = g'\cdot y, \ f'_y = g'\cdot(x+2y), \ (x+2y)f'_x - yf'_y = (x+2y)yg' - y(x+2y)g' = 0.$

36. $f(x,y) = x^n g\left(\dfrac{y}{x^2}\right), \quad f'_x = nx^{n-1}g\left(\dfrac{y}{x^2}\right) - 2x^n g'\left(\dfrac{y}{x^2}\right)\dfrac{y}{x^3}, \quad f'_y = x^n g'\left(\dfrac{y}{x^2}\right)\dfrac{1}{x^2}$

$$xf'_x + 2yf'_y = nx^n g\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2x^{n-2}yg'\left(\frac{y}{x^2}\right) + 2yx^{n-2}g'\left(\frac{y}{x^2}\right) = nx^n g\left(\frac{y}{x^2}\right) = nf(x,y)$$

37. $f(x,y) = yg(x^2-y^2), \quad f'_x = yg'(x^2-y^2)\cdot 2x, \quad f'_y = y + yg'(x^2-y^2)\cdot(-2y)$

$$y^2 f'_x + xyf'_y = 2xy^3g' + xy(g - 2y^2g') = 2xy^3 + xyg - 2xy^3g' = xyg(x^2-y^2) = xf(x,y).$$

38. $f(x,y)=xg(x^2+y^2),\quad f'_x=g+xg'(x^2+y^2)\cdot 2x,\quad f'_y=xg'(x^2+y^2)\cdot 2y$

$$xyf'_x-x^2f'_y=xy(g+2x^2g')-2x^3tg'=xyg+2x^3yg'-2x^3yg'=xyg(x^2+y^2)=yf(x,y).$$

4.2 Диференцијабилност

Функција две променљиве је диференцијабилна у тачки (a,b) ако је

$$\Delta f(a,b)=f'_x(a,b)\Delta x+f'_y(a,b)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

када $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Специјално, фунција је диференцијабилна у тачки $(0,0)$ ако је

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=o(\sqrt{x^2+y^2})$$

када $(x,y)\to(0,0)$.

Ако су парцијални изводи f'_x и f'_y непрекидни у тачки (a,b), тада је функција f диференцијабилна у тој тачки. Наравно, функција може да буде диференцијабилна у некој тачки и у случају када парцијални изводи нису непрекидни у тој тачки.

39. $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}e^{-1/x^2}=0,\quad f'_y(0,0)=0$

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)$$

Како је

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}e^{-1/\rho^2}=0,$$

то је $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$, па је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

40. $f'_x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0,\quad f'_y(0,0)=0$

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y),\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

Према томе, $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$, што значи да је функција диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Да ли је парцијални извод f'_x непрекидан у тачки $(0,0)$? Како је за $(x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

гранична вредност за f'_x у тачки $(0,0)$ не постоји. На пример, за низ $(x_n,y_n)=(1/2\sqrt{n\pi},1/2\sqrt{n\pi})$ који тежи ка $(0,0)$ када $n\to\infty$ имамо да је $f(x_n,y_n)=-\sqrt{n\pi}\to-\infty$. Према томе, парцијални извод f'_x није непрекидан у тачки $(0,0)$. Слично важи и за парцијални извод f'_y.

41. $f'_x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{|x|}=0,\quad f'_y(0,0)=0,$

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

(јер је $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$). Према томе, $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$, што значи да је функција диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Да ли је парцијални извод f'_x непрекидан у тачки $(0,0)$? Како је за $(x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(x,y)=2(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

гранична вредност за f'_x у тачки $(0,0)$ не постоји. На пример, за низ $(x_n, y_n) = (1/2\sqrt{2}n\pi, 1/2\sqrt{2}n\pi)$ који тежи ка $(0,0)$ када $n \to \infty$ имамо да је $f(x_n, y_n) = -\sqrt{2}$. Према томе, парцијални извод f'_x није непрекидан у тачки $(0,0)$. Слично важи и за парцијални извод f'_y.

42. $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0, \quad f'_y(0,0) = 0$

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = f(x,y)$$

Како је

$$\left|\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|x| \le |x| \to 0 \text{ када } (x,y) \to (0,0),$$

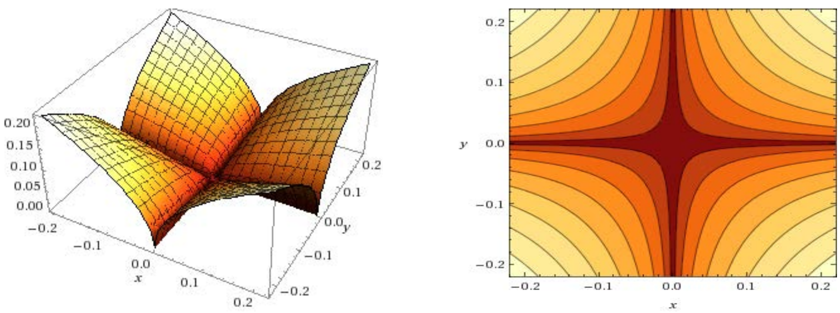
то је $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ и у случају када је $xy \neq 0$ и у случајевима $x \neq 0$, $y = 0$ и $x = 0$, $y \neq 0$. Према томе, функција је диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

За $x \neq 0$ и $y = 0$ је $f'_x = 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$. Како не постоји гранична вредност за $\cos\dfrac{1}{x}$ када $x \to 0$, то значи да не постоји ни гранична вредност за f'_x. Према томе, парцијални извод f'_x није непрекидан у тачки $(0,0)$. Исто важи и за f'_y.

43. За $xy > 0$ је $f(x,y) = \sqrt{xy}$, па је

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Парцијални извод f'_x нема граничну вредност у $(0,0)$, па није непрекиан у $(0,0)$. То значи да се не може из парцијалних извода закључити да ли је (или није) f диференцијабилна у $(0,0)$.



$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

По дефиницији, функција f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако је

$$\begin{aligned}\Delta f(0,0) &= f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})\end{aligned}$$

односно ако

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

Међутим,

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \text{ и } \Delta y > 0 \\ 1/\sqrt{2}, & \Delta x = \Delta y > 0 \end{cases}$$

Дакле, f није диференцијабилна у $(0,0)$.

44. $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0, \quad \Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{xy}$. Да ли је $\Delta f(0,0) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $x \to 0$ и $y \to 0$? Није, јер је $\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}x^{1/3}} \to +\infty$. за $y = x \to 0_+$ Према томе, функција није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

45. Није испуњен неопходан услов за диференцијабилност - функција није непрекидна у тачки $(0,0)$ јер је $f(0,y_=0$, а $f(x,x^3) = 1/2$.

46.

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

У тачки $(x,y) \neq (0,0)$ функције f'_x и f'_y су непрекидне, па је f у тој тачки диференцијабилна.

Како је

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ и } y \neq 0 \\ 1/2, & x = y \neq 0 \end{cases}$$

функција f'_x у $(0,0)$ нема граничну вредност, па се не може закључити да је f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y} = 0$$

По дефиницији, f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако је

$$\begin{aligned}\Delta f(0,0) &= f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})\end{aligned}$$

односно ако

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

Међутим,

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \text{ и } \Delta y > 0 \\ 1/2\sqrt{2}, & \Delta x = \Delta y > 0 \end{cases}$$

Дакле, функција f није диференцијабилна у $(0,0)$.

47. $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad f'_y(0,0) = 0, \quad f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = f(x,y)$

Како је $\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$ за $y = x$, то значи да није $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y) \to (0,0)$. Према томе, функција није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

4.3 Диференцијал

Ако је функција диференшијабилна у тачки (a,b), тада је $\Delta f(a,b) \approx df(a,b)$. Специјално за тачку $(0,0)$ је

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y$$

48. $f'_x = 2xy - y^2, \quad f'_y = x^2 - 2xy, \quad df = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$

49. $f'_x = 3(x^2+y^2)^2\cdot 2x, \quad f'_y = 3(x^2+y^2)^2\cdot 2y, \quad df(x,y) = 6x(x^2+y^2)dx + 6y(x^2+y^2)dy$

Друго решење. Ако је $f(x,y)=g(x,y)^3$, где је g функција $(x,y)\mapsto x^2+y^2$, тада је

$$df(x,y)=3g^2dg=3g^2d(x^2+y^2)=6g(x,y)(xdx+ydy)$$

50. $f'_x=\dfrac{2(x-y)-(2x+3y)}{(x-y)^2}=-\dfrac{5y}{(x-y)^2},\quad f'_y=\dfrac{3(x-y)+2x+3y}{(x-y)^2}=\dfrac{5x}{(x-y)^2},\quad df=f'_xdx+f'_ydy$

51. $f'_x=\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\cos x,\quad f'_y=(\sin x)^{\cos y}\ln(\sin x)(-\sin y)$

$$df=(\sin x)^{\cos y}\left[\cos y\cot x dx-\sin y\ln(\sin x)dy\right]$$

52. $f'_x=\dfrac{1}{1+xy}\cdot\dfrac{y}{2\sqrt{xy}},\quad f'_y=\dfrac{1}{1+xy}\cdot\dfrac{x}{2\sqrt{xy}},\quad df=\dfrac{ydx+xdy}{2\sqrt{xy}(1+xy)}$

53. $f'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2},\quad f'_y=\dfrac{y}{x^2+y^2},\quad df=f'_xdx+f'_ydy$

55. Ако је $f=\sqrt{g}$, тада је

$$df=\frac{1}{2\sqrt{g}}dg=\frac{1}{2\sqrt{g}}d(x^2+y^2+z^2)=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

56. $f'_x=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2/(x^2+y^2+z^2)}}\cdot\dfrac{-yx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2)}}$ Слично налазимо

$$f'_y=\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2},\quad f'_z=-\frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2)}},\quad df=f'_xdx+f'_ydy+f'_zdz$$

57. $f'_x=y^z\cdot x^{y^z-1},\quad f'_y=x^{y^z}\cdot\ln x\cdot z\cdot y^{z-1},\quad f'_z=x^{y^z}\cdot\ln x\cdot y^z\cdot\ln y,\quad df=f'_xdx+f'_ydy+f'_zdz$

58. $f'_x=m(1+x)^{m-1}(1+y)^n,\quad f'_y=n(1+x)^m(1+y)6n-1$

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=1+mx+ny$$

59. $f'_x=\dfrac{1}{1+x+y},\quad f'_y=\dfrac{1}{1+x+y},\quad f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=1$

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=x+y$$

60. $f'_x=\dfrac{1}{1+(x+y)^2/(1+xy)^2}\cdot\dfrac{1+xy-(x+y)y}{(1+xy)^2}=\dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2},\quad f'_y=\dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2}$

$$f(0,0)=0,\ f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=1,\quad f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=x+y$$

61. Ако је $f(x,y,z)=(1+x)(2+y)^2(3+z)^3$, тада је дати израз једнак $f(0.002,0.003,0.004)$.

$$f'_x=(2+y)^2(3+z)^3,\quad f'_y=2(1+x)(2+y)(3+z)^3,\quad f'_z=3(1+x)(2+y)^2(3+z)^2$$
$$f(x,y,z)\approx f(0,0,0)+df(0,0,0)=1\cdot 2^2\cdot 3^3+2^23^3x+2^23^3+2^23^3z$$
$$1.001\cdot 2.003^2\cdot 3.004^3=f(0.002,0.003,0.004)\approx 108+0.216+0.324+0.432=108.972$$

62. Ако је $f(x,y,z)=\dfrac{(1+x)^2}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}$, дати израз једнак је $f(0.03,0.02,0.05)$

$$f'_x = \frac{2(1+x)}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}, \quad f'_y = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+x)^2}{(1-y)^{4/3}(1+z)^{1/4}}, \quad f'_z = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+x)^2}{(1-y)^{1/3}(1+z)^{5/4}}$$

$$f(x,y,z) \approx f(0,0,0) + df(0,0,0), \quad f'_x(0,0,0)1,\ f'_y(0,0,0) = \frac{1}{3},\ f'_z(0,0,0) = -\frac{1}{4}$$

$$f(x,y,z) \approx 1 + 2x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z, \quad f(0.03, 0.02, 0.05) \approx 1 + 0.06 + 0.0066 - 0.0125 = 1.054$$

63. Ако је $f(x,y) = \sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}$, онда је дати израз једнак $f(\Delta x, \Delta y)$ за $\Delta x = 0.02$ и $\Delta y = -0.03$

Из

$$f'_x = \frac{3(1+x)^2}{2\sqrt{(1+x)^3+(2+y)^3}}, \quad f'_y = \frac{3(2+y)^2}{2\sqrt{(1+x)^3+(2+y)^3}}$$

добијамо $f'_x(0,0) = 1/2$ и $f'_y(0,0) = 2$, па је

$$f(\Delta x, \Delta y) \approx f(0,0) + df(0,0) = 3 + \frac{1}{2}\Delta x + 2\Delta y = 3 + 0.01 - 0.06$$

Дати израз је приближно једнак 2.95

64. Ако је $f(x,y) = (1-x)^{1+y}$, онда је $0.97^{1.05} = f(0.03, 0.05)$

$$f'_x = -(1+y)(1-x)^y,\ f'_x(0,0) = -1, \quad f'_y = (1-x)^{1+y}\ln(1-x),\ f'_y(0,0) = 0$$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y = 1 - x, \quad 0.97^{1.05} = f(0.03, 0.05) \approx 1 - 0.03 = 0.97$$

4.4 Изводи и диференцијали имплицитне функције

Ако је функција $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto y$ дефинисана једнакошћу $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, тада је

$$y'_{x_j} = -\frac{F'_{x_j}}{F'_y} \text{ за } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Специјално, ако је функција $(x,y) \mapsto z$ дата једнакошћу $F(x,y,z) = 0$, тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Ако су функције $x \mapsto y$ и $x \mapsto z$ дефинисане имплицитно једнакостима $F(x,y,z) = 0$ и $G(x,y,z) = 0$, тада је

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_x \\ G'_x \end{bmatrix}$$

Ако су фунцкције $f : (x,y) \mapsto u$ и $g : (x,y) \mapsto v$ дефинисане имплицитно једнакостима

$$F(x,y,u,v) = 0, \quad G(x,y,u,v) = 0,$$

тада је

$$\begin{bmatrix} f'_x \\ g'_x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_x \\ G'_x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f'_y \\ g'_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_y \\ G'_y \end{bmatrix}$$

65. $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3, \quad f'(x) = -\dfrac{F'_(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\dfrac{2x+y}{2y+x}$ за $2y + x \neq 0$

66.

$$F(x,y)=x^2\ln y-y^2\ln x,\quad F'_x=2x\ln y-\frac{y^2}{x},\quad F'_y=\frac{x^2}{y}-2y\ln x$$

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{2x\ln y-y^2/x}{x^2/y-2y\ln x}=\frac{y^3-2xy\ln y}{x^3-2xy\ln x}$$

Друго решење. Диференцирањем једнакости $x^2\ln y-y^2\ln x=0$ по x добијамо

$$2x\ln y+\frac{x^2}{y}\cdot y'-2y\cdot y'\cdot\ln x-y^2\cdot\frac{1}{x}=0$$

$$y'\left(\frac{x^2}{y}-2y\ln x\right)=\frac{y^2}{x}-2x\ln y$$

Треће решење. Применом диференцијала на леву и десну страну једнакости $x^2\ln y-y^2\ln x=0$ добијамо

$$2xdx\ln y+x^2\frac{dy}{y}-2ydy\ln x-y^2\frac{dx}{x}=0$$

$$dy\left(\frac{x^2}{y}-2y\ln x\right)=\left(\frac{y^2}{x}-2x\ln y\right)dx$$

па je $y'=\dfrac{dy}{dx}$

67. $F(x,y)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}-\arctan\dfrac{y}{x}$

$$f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}}{\frac{y}{c^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}}=\frac{x+y}{x-y}$$

68. $1+f'+g'=0,\ 2x+2ff'+2gg'=0$

$$f'=-1-g',\ x+f(-1-g')+gg'=0,\ g'(g-f)=f-x,\ g'=\frac{f-x}{g-f},\quad f'=1-\frac{f-x}{g-f},\ f'=\frac{x-g}{g-f}$$

Други начин. $F=x+y+z,\ G=x^2+y^2+z^2-1$

$$\begin{bmatrix}f'\\g'\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F'_y & F'_z\\G'_y & G'_z\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F'_x\\G'_x\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 1\\2y & 2z\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2x\end{bmatrix}=-\frac{1}{2z-2y}\begin{bmatrix}2z & -1\\-2y & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2x\end{bmatrix}=-\frac{1}{2z-2y}\begin{bmatrix}2z-2x\\-2y+2x\end{bmatrix}$$

$$f'(x)=-\frac{z-x}{z-y}=\frac{x-z}{z-y},\quad f'(y)=-\frac{-y+x}{z-y}=\frac{x-y}{y-z}$$

69. $x^2y-y^2z+zx=0,\quad 2xydx+x^2dy-2yzdy-y^2dz+zdx+xdz=0$

$$(2xy+z)dx+(x^2-2yz)dy=(y^2-x)dz,\quad f'_x=\frac{2xy+z}{y^2-x},\ f'_y=\frac{x^2-2yz}{y^2-z}$$

Други начин. $F(x,y,z)=x^2y-y^2z+zx$

$$f'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2xy+z}{-y^2+x},\quad f'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{x^2-2yz}{-y^2+x}$$

70.

$$F'_x=z^2-2xy+2,\quad F'_y=-x^2+2yz-1,\quad F'_z=2zx+y^2$$

Како је $z(0,1)=1$, то је

$$z'_x=-\frac{F'_x(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)}=-\frac{1-0+2}{1}=-3,\quad z'_y=-\frac{F'_y(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)}=-\frac{-0+2\cdot1\cdot1-1}{1}=-1.$$

71. $x^2+y^2+z^2=2x,\quad 2xdx+2ydy+2zdz=2dx,\quad dz=\frac{1-x}{z}dx-\frac{y}{z}dy$

72. $F(x,y,z)=z^3-3zyz-a^3$

$$f'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},\quad f'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{xz}{z^2-xy},\quad dz=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy$$

73. $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}+1,\quad f'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{z}{x+z}$

$$f'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y^2}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{yx+yz},\quad dz=\frac{z}{x+z}dx+\frac{z^2}{yx+yz}dy$$

74. $dz-dx=\frac{1}{1+\frac{y^2}{(z-x)^2}}d\left(\frac{y}{z-x}\right)=\frac{(z-x)^2}{(z-x)^2+y^2}\cdot\frac{(z-x)dy-yd(z-x)}{(z-x)^2}$

$$((z-x)^2+y^2+y)d(z-x)=(z-x)dy,\quad dz=dx+\frac{z-x}{(z-x)^2+y^2+y}dy$$

75. $f'_y=-\frac{F'_y}{F'_x},\ g'_z=-\frac{F'_z}{F'_y},\ h'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad f'_yg'_zh'_x=-\frac{F'_y}{F'_x}\cdot\frac{F'_z}{F'_y}\cdot\frac{F'_x}{F'_z}=-1$

76. Диференциањем по x добијамо

$$1=z'_xG+zG'y\frac{z'_x}{-z^2},\quad z=zz'_xG-yz'_xG'$$

одакле је

$$z'_x=\frac{z}{zG-yG'}$$

Диференцирањем по y добијамо

$$0=z'_yG+zG'\frac{z-yz'_y}{z^2},\quad (yG'-zG)z'_y=G'z$$

одакле је

$$z'_y=\frac{zG'}{yG'-zG}$$

Заменом z'_x и z'_y имамо

$$xz'_x+yz'_y=\frac{xz}{zG-yG'}+\frac{yzG'}{yG'-zG}=\frac{zx-yzG'}{zG-yG'}=\frac{z\cdot zG-yzG'}{zG-yG'}=z$$

Друго решење. Из дате једнакости имамо

$$\begin{aligned}dx&=Gdz+zdG=Gdz+zG'd\left(\frac{y}{z}\right)\\&=Gdz+zG'\frac{zdy-ydz}{z^2}\\&=Gdz+G'dy-G'\frac{y}{z}dz\end{aligned}$$

Из последње једнакости следи

$$zdx-zG'dy=(zG-yG')dz$$

односно

$$\frac{z}{zG-yG'}dx+\frac{-zG'}{zG-yG'}dy=dz$$

Према томе,

$$z'_x=\frac{z}{zG-yG'},\quad z'_y=\frac{zG'}{yG'-zG}$$

Даље исто као у првом решењу

Трећи начин.

$$F(x,y,z)=x-zG\left(\frac{y}{z}\right),\quad z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

где је

$$F'_x=1,\quad F'_y=-zG'\frac{1}{z}=-G',\quad F'_z=-G-zG'y\frac{-1}{z^2}=\frac{-zG+yG'}{z}$$

77. $dF=0,\quad F'_udu+F_vdv=0,\quad (dx+d(z/y))F'_u+(dy+d(z/x))F_v=0$

$$\left(dx+\frac{ydz-zdy}{y^2}\right)F'_u+\left(dy+\frac{xdz-zdx}{x^2}\right)F'_v=0$$

$$\left(F'_u-\frac{z}{x^2}F'_v\right)dx+\left(F'_v-\frac{z}{y^2}F'_v\right)dy+\left(\frac{F'_u}{y}+\frac{F'_v}{x}\right)dz=0$$

$$dz=\frac{y}{x}\cdot\frac{zF'_v-x^2F'_u}{xF'_u+yF'_v}dx+\frac{x}{y}\cdot\frac{zF'_u-y^2F'_v}{xF'_u+yF'_v}dy$$

$$f'_x=\frac{y}{x}\cdot\frac{zF'_v-x^2F'_u}{xF'_u+yF'_v},\quad f'_y=\frac{x}{y}\cdot\frac{zF'_u-y^2F'_v}{xF'_u+yF'_v}$$

$$xf_x+yf'_y=\frac{z(xF'_u+yF'_v)=xy(xF'_u+yF'_v)}{xF'_u+yF'_v}=z-xy$$

Друго решење. $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=G(x,y,z)=0$

$$f'_x=-\frac{G'_x}{G'_z}=-\frac{F'_u-\frac{z}{x^2}F'_v}{\frac{1}{y}F'_u+\frac{1}{x}F'_v}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{x^2F'_u-zF'_v}{xF'_u+yF'_v}$$

Слично се добија f'_y, а даље исто као у првом решењу.

Треће решење. $\left(1+\dfrac{f'_x}{y}\right)F'_u+\dfrac{xf'_x-z}{x^2}F'_v=0$

$$\left(\frac{F'_u}{y}+\frac{F'_v}{x}\right)f'_x=\frac{z}{x^2}F'_v-F'_u,\quad f'_x=\frac{y}{x}\cdot\frac{xF'_v-x^2F'_u}{xF'_u+yF'_v}$$

Слично се добија f'_y, а даље исто као у првом решењу.

78. $dF=0,\quad (dx+dy+dz)F'_u+(2zdz+2ydy+2zdz)F'_v=0$

$$(F'_u+2xF'_v)dx+(F'_u+2yF'_v)dy=(F'_u+2zF'_v)dz$$

$$f'_x=\frac{F'_u+2xF'_v}{F'_u+2zF'_v},\quad f'_y=\frac{F'_u+2yF'_v}{F'_u+2zF'_v}$$

$$(y-f)f'_x+(f-x)f'_y=\frac{yF'_u+2xyF'_v-2xfF'_v+2yfF'_v-xF'_u-2xyF'_v}{F'_u+2zF'_v}$$

$$(y-f)f'_x+(f-x)f'_y=\frac{(y-x)F'_u+2(y-x)fF'_v}{F'_u+2zF'_v}=y-x$$

79. $dF = 0, \quad F'_u du + F'_v dv = 0, \quad F'_u dz + (2xdx - 2yzdy - y^2dz)F'_v = 0$

$$2xF'_v dx - 2yzF'_v dy + (F'_u - y^2F'_v)dz = 0, \quad dz = \frac{2xF'_v}{y^2F'_v - F'_u}dx - \frac{2yzF'_v}{y^2F'_v - F'_u}dy$$

$$yff'_x + xf = \frac{2xyzF'_v - 2xyzF'_v}{y^2F'_v - F'_u} = 0$$

80. Диференцирањем датих једнакости по x добијамо

$$y + u'_x v + uv'_x = 0, \quad v + v'_x - yu'_x = 0$$

За тачку $(1, -1)$ имамо систем

$$2u'_x + v'_x = 1, \quad u'_x + v'_x = -2$$

из којег следи $u'_x(1, -1) = 3$ и $v'_x(1, -1) = -5$.

Диференцирањем датих једнакости по y добијамо

$$x + u'_y v + uv'_y = 0, \quad v'_y - u - yu'_y = 0$$

За тачку $(1, -1)$ имамо систем

$$2u'_y + v'_y = -1, \quad u'_y + v'_y = 1$$

из којег следи $u'_y = -2$ и $v'_y = 3$. Дакле,

$$du(1, -1) = u'_x dx + u'_y dy = 3dx - 2dy$$

$$dv(1, -1) = v'_x dx + v'_y dy = -5dx + 3dy$$

Други начин.

$$\left.\begin{aligned} ydx + xdy + vdu + udv &= 0 \\ vdx + xdv - udy - ydu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} vdu + udv &= -ydx - xdy \\ ydu - xdv &= vdx - udy \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} xvdu + xudv &= -xydx - x^2dy \\ yudu - xudv &= vudx - u^2dy \end{aligned}\right\}$$

$$(xv + yu)du = (vu - xy)dx - (x^2 + u^2)dy, \quad du = \frac{vu - xy}{xv + yu}dx - \frac{x^2 + u^2}{xv + yu}dy$$

Трећи начин. $F(x, y, u, v) = xy + uv - 1, \quad G(x, y, u, v) = xv - yu - 3$

$$\begin{bmatrix} f'_x \\ g'_x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_x \\ G'_x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} v & u \\ -y & x \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = -\frac{1}{xv + yu}\begin{bmatrix} xy & -uv \\ y^2 + v^2 & \end{bmatrix}$$

$$f'_x = \frac{uv - xy}{xv + yu}, \quad g'_x = -\frac{y^2 + v^2}{xv + yu}, \quad f'_x(1, -1) = 3, \quad g'_x(1, -1) = -5$$

Слично, за f'_y и g'_y имамо да је $\begin{bmatrix} f'_y \\ g'_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F'_y \\ G'_y \end{bmatrix}$

4.5 Извод у правцу. Градијент

Нека је $l = (l_x, l_y)$ јединични вектор. Извод функције f у смеру вектора l дефинисан је са

$$f'_l(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tl_x, b + tl_y) - f(a, b)}{t}$$

уколико наведени лимес постоји.

Ако је f диференцијабилна функција у тачки (a, b), тада је

$$f'_l(a, b) = f'_x(a, b)l_x + f'_y(a, b)l_y = \nabla f(a, b) \cdot l.$$

81. f је диференцијабилна у R^2, $\overrightarrow{AB} = (1,2)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, $\quad f'_{\overrightarrow{AB}}(A) = \nabla f(A)\cdot l$, $\quad l = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$

$$\nabla f(x,y) = (2x-3y, 2y-3x+1), \quad \nabla f(A) = (2\cdot 1 - 3\cdot(-1), 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 + 1) = (5,-4)$$

$$f'_{\overrightarrow{AB}}(A) = (5,-4)\cdot(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

82. (1) $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$, $\nabla f(x,y) = (2x,-2y)$, $\quad \nabla f(1,1) = (2,-2) = 2i - 2j$

(2) $l = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $f'_l(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot l = (2,-2)\cdot(1/2,\sqrt{3}/2) = 1 - \sqrt{3}$

83. (1) $\nabla f(x,y,z) = (yz, zx, xy)$, $\quad \nabla f(1,1,1) = (1,1,1)$

(2) $v = (1,1,1)$, $\quad |v| = \sqrt{3}$, $\quad f'_v(A) = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $\quad f'_v(A) = \sqrt{3}$

84. $\nabla f(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, $\nabla f(A) = (2a,0,0)$, $\nabla f(B) = (0,2a,0)$, $\nabla f(A)\cdot\nabla f(B) = 0$
Према томе, угао између градијената је $\pi/2$.

85. $l = (x,y,z)$, $|l| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$

$$f'_l(P) = \frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

Како је $|\nabla f(P)| = \sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}}$, једнакост $f'_l(P) = |\nabla f(P)|$ еквивалентна је једнакости

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)(x^2+y^2+z^2),$$

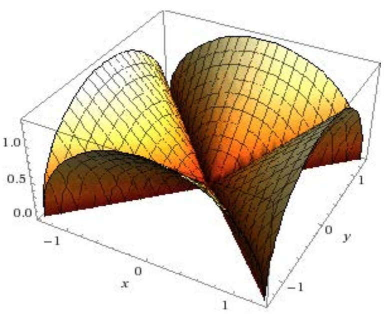
односно једнакости

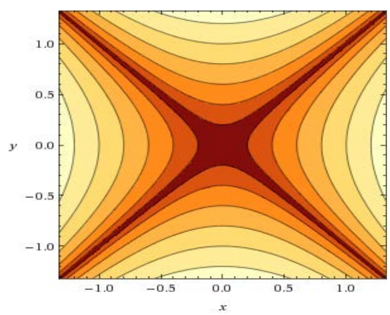
$$x^2y^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2 + y^2z^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2 + z^2x^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2 = 0.$$

За $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ ова једнакост важи само у случају $a=b=c$. Према томе, једнакост $f'_l(P) = |\nabla f(P)|$ важи за $a=b=c$.

86. Како је

$$\frac{f(0+tl_x, 0+tl_y) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tl_x,tl_y)-0}{t} = \frac{\sqrt{|t^2l_x^2 - t^2l_y^2|}}{t} = \frac{\sqrt{t^2|l_x^2-l_y^2|}}{t} = \frac{|t|}{t}\cdot\sqrt{|l_x^2-l_y^2|},$$





извод $f'_l(0,0)$ постоји ако је $\sqrt{|l_x^2-l_y^2|} = 0$, односно ако је $l_x^2 = l_y^2$. Према томе, функција $f'_l(0,0)$ постоји у правцима $y=x$ и $y=-x$

87. $f'_l(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(tl_x,tl_y)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2l_xl_y}}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{l_xl_y}}{t^{1/3}}$ Овај лимес постоји само ако је $l_x = 0$ или $l_y = 0$. Према томе, извод дате функције постоји само у правцима координатних оса.

88. (1) $\dfrac{f(tl_x,tl_y)-f(0,0)}{t}=\dfrac{\sqrt[3]{t^2l_x^2\cdot tl_y}-0}{t}=\dfrac{\sqrt[3]{t^3l_x^2l_y}}{t}=\sqrt[3]{l_x^2l_y}$

Према томе, $\quad f'_{\vec{l}}(0,0)=\sqrt[3]{l_x^2l_y}$

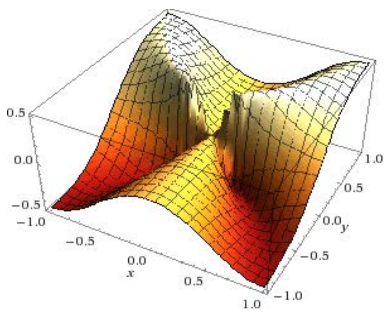
(2) $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0,\quad f(x,y)-f(0,0)-0\cdot x-0\cdot y=\sqrt[3]{x^2y}$

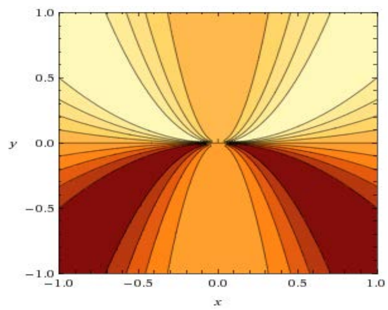
$$\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\begin{cases}0, & x=0, y\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & x=y>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \sqrt[3]{x^2y}\neq o(\sqrt{x^2+y^2})\text{ када }(x,y)\to(0,0)$$

Према томе, f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

89. Ако је $l=(l_x,l_y)$ јединични вектор и $l_y\neq 0$, тада је

$$\lim_{t\to 0_+}\frac{f(tl_x,tl_y)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0_+}\frac{t^2l_x^2tl_y}{t(t^2l_x^2+t^2l_y^2)}=\frac{l_x^2l_y}{l_y^2}=\frac{l_x^2}{l_y}$$





Како је још и $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, функција f има извод у смеру произвољног вектора.

Да ли је функција f и диференцијабилна у тачки $(0,0)$? За $y=x\to 0_+$ имамо да је

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^3}{(x^4+x^2)\sqrt{2x^2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Према томе, $f(x,y)$ није $o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$, па функција није диференцијабилна у $(0,0)$.

90. $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=1,\quad f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,\quad f(0,0)=0$

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=\frac{x^3}{x^2+y^2}-x=\frac{x^3-x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

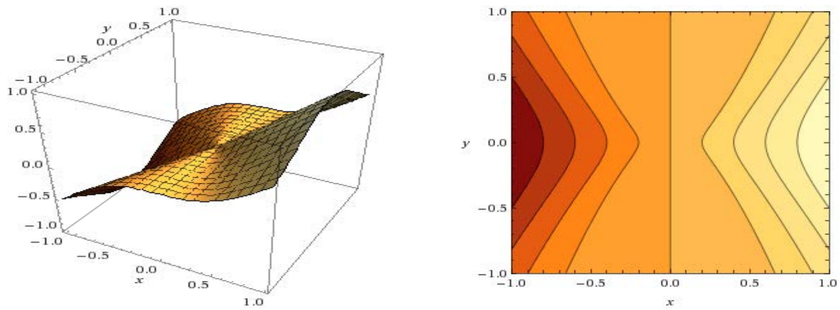
Да ли је $\dfrac{x^3-x^2-y^2}{x^2+y^2}=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $(x,y)\to(0,0)$? Није, јер за $x=0$ и $y\to 0_+$ важи

$$\frac{x^3-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=-\frac{y^2}{y^3}=-\frac{1}{y}\to-\infty.$$

Према томе, функција није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

У ком смеру функција има извод у тачки $(0,0)$? За јединични вектор $v=(v_x,v_y)$ имамо да је

$$\frac{f(tv_x,tv_y)-f(0,0)}{t}=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3v_x^3}{t^2v_x^2+t^2v_y^2}=\frac{v_x^3}{v_x^2+v_y^2}.$$



То значи да извод функције f у тачки $(0,0)$ постоји у смеру произвољног вектора v и једнак је $\dfrac{v_x^3}{v_x^2+v_y^2}$. Дакле, функција у тачки $(0,0)$ има извод у смеру сваког вектора, а није диференцијабилна у тој тачки.

4.6 Тангентна раван и нормала површи

Ако је је површ дефинисана функцијом $(x,y)\mapsto z$ која је дата имплицитно једнакошћу $F(x,y,z)=0$, онда је

$$F'_x(A)(x-x_0)+F'_u(A)(y-y_0)+F'_z(A)(z-z_0)=0$$

једначина тангентне равни те површи која садржи тачку $A(x_0,y_0,z_0)$, а

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}$$

је једначина нормале на површ у тачки A.

За површ дефинисану са $z=f(x,y)$ једначине тангентне равни и нормале су

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_)(y-y_0),\qquad \frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

91. $z-5=f'_x(1,2)(x-1)+f'_y(1,2)(y-2),\quad f'_x=2x,\ f'_y=2y,\ f'_x(1,2)=2,\ f'_y(1,2)=4$

$$z+2x+4y+5=0,\qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$$

92. $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-169,\quad F'_x=2x,\ F'_y=2y,\ F'_z=2z,\quad F'_x(M)=6,\ F'_y(M)=8,\ F'_z(M)=24$

Једначина тангенте је $6(x-3)+8(y-4)+24(z-12)=0$, односно $3x+4y+12z-169=0$.

Једначина нормале је $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-12}{12}$

93. $F(x,y,z)=2^{x/z}+2^{y/z}-8,\quad M(2,2,1)$

$$f'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\frac{\ln 2}{z}2^{x/z}}{-\frac{x\ln 2}{z^2}2^{x/z}-\frac{y\ln 2}{z^2}2^{y/z}}=\frac{2^{x/z}}{x2^{x/z}+y2^{y/z}}$$

$$f'_x(2,2)=\frac{2^2}{2\cdot 2^2+2\cdot 2^2}=\frac{1}{4},\qquad f'_y(2,2)=\frac{1}{4}$$

$$z-1=\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(y-2),\quad 4z-4=x-2+y-2,\quad x+y-4z=0$$

$$\frac{x-2}{1/4}=\frac{y-2}{1/4}=\frac{z-1}{-1},\qquad \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$$

94. $z = xy, \quad M(1,1), \quad z'_x = y, \quad z'_y = x, \quad z - 1 = 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1)$

$$z = x + y - 1, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

95. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6, \quad F'_x = 3x^2 + yz, \quad F'_y = 3y^2 + xz, \quad F'_z = 3z^2 + xy$

$$F'_x(M) = 1, \ F'_y(M) = 11, F'_z(M) = 5, \quad 1(x-1) + 11(y-2) + 5(z+1) = 0$$

$$x + 11y + 5z - 18 = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$$

96. $\underbrace{xy^2 + z^3 - 12}_{F(x,y,z)} = 0, \quad F'_x(x,y,z) = y^2, \quad F'_y(x,y,z) = 2xy, \quad F'_z(x,y,z) = 3z^2$

$$F'_x(M) = 4, \quad F'_y(M) = 4, \quad F'_z(M) = 12, \quad n_\alpha = (1,1,3), \quad 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 3 \cdot (z-2) = 0$$

$$x + y + 3z - 9 = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}$$

97. $F(x,y,z) = x + 2y - \ln z + 4, \quad G(x,y,z) = x^2 - xy - 8x + z$

$$F'_x = 1, \quad F'_y = 2, \quad F'_z = -\frac{1}{z}, \quad G'_x = 2x - y - 8, \quad G'_y = -x, \quad G'_z = 1$$

Тангентна раван прве површи у тачки $M(2,-3,1)$ је

$$x - 2 + 2(y+3) - 1(z-1) = 0,$$

а тангентна раван друге површи у тачки M је

$$-1(x-2) - 2(y+3) + z - 1 = 0.$$

Како обе површи имају исту тангентну раван у тачки M, оне се у тој тачки додирују.

98. $F(x,y,z) = xy + z^2 + xz - 1, \quad F'_x = y + z, \quad F'_y = x, \quad F'_z = 2z + x$

Из услова паралелности тангентне равни и равни $x - y + 2z = 0$ следи да је

$$\frac{y+z}{1} = \frac{x}{-1} = \frac{2z+x}{2} = t,$$

односно $x = -t$, $y = -t/2$ и $z = 3t/2$. Заменом ових израза у $x - y + 2z = 0$ добијамо да је $t^2 = 4/5$.

За $t = 2/\sqrt{5}$ имамо тачку $A\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, а за $t = -2/\sqrt{5}$ имамо тачку $B\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

Дакле, за дату површ тангентне равни $x - y + 2z - \sqrt{5} = 0$ (садржи тачку A) и $x - y + 2z + \sqrt{5} = 0$ (садржи тачку B) паралелне су датој равни $x - y + 2z = 0$.

Тема 6

Екстремне вредности

6.1 Локални екстремуми функције две променљиве

Нека је f реална функција две променљиве која има непрекидне парцијалне изводе другог реда и нека је A стационарна тачка (С.Т.) функције f, а m_1 и m_2 главни минори Хесеове матрице функције f у тачки A.

- Довољан услов да f у тачки A има локални минимум је $d^2f(A) > 0$ за $dx^2 + dy^2 \neq 0$. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако је $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$.
- Довољан услов да f у тачки A има локални максимум је $d^2f(A) < 0$ за $dx^2 + dy^2 \neq 0$. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако је $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$.
- Довољан услов да f у тачки A нема локални екстремум (ЛЕ) је да $d^2f(A)$ мења знак. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако је $m_2 < 0$

У осталим случајевима, као и у случају критичне тачке која није стационарна, постојање локалног екстремума се проверава на основу дефиниције.

Наведени довољни услови се често изражавају помоћу a, b и c (уместо m_1 и m_2), где је $a = f''_{x^2}(A)$, $b = f''_{xy}(A)$ и $c = f''_{y^2}(A)$. Тада је $m_1 = a$ и $m_2 = ac - b^2$, па важи:

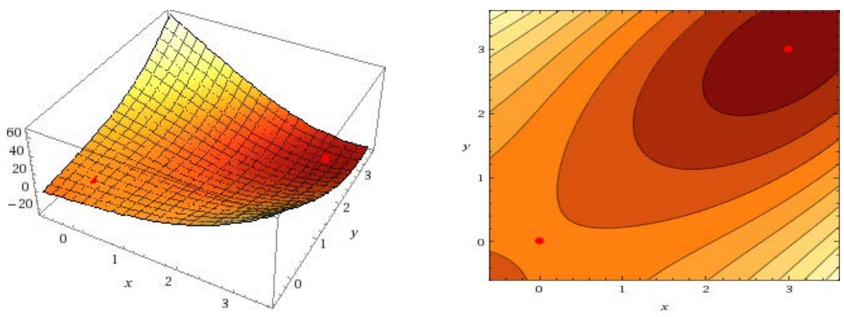
- у тачки A је строги локални минимум ако је $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$,
- у тачки A је строги локални максимум ако је $a < 0$ и $ac - b^2 > 0$,
- у тачки A нема локалног екстремума ако је $ac - b^2 < 0$.

1. $f'_x = 4 - 2x, \quad f'_y = -4 - 2y, \quad f''_{x^2} = f''_{y^2} = -2, \quad f''_{xy} = 0$

Стационарна тачка је $A(2, -2)$. Како је $d^2f(A) = -2dx^2 - 2dy^2 < 0$ за $dx^2 + dy^2 \neq 0$, функција f у тачки A има локални максимум, $f_{\max} = f(A) = 8$.

2. $f'_x = 3(x^2 - 3y), \quad f'_y = 3(y^2 - 3x), \quad f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{y^2} = 6y, \quad f''_{xy} = -9$

Из $f'_x = f'_y = 0$ следи да је $x^4 = 9y^2 = 27x$, односно да је $x(x-3)(x^2+3x+9) = 0$. За $x = 0$ имамо стационарну тачку $A(0, 0)$, а за $x = 3$ имамо стационарну тачку $B(3, 3)$.



У тачки A није локални екстремум јер је $d^2f(A) = -18dxdy = \begin{cases} -18dx^2, & dy = dx \\ 18dx^2, & dy = -dx. \end{cases}$

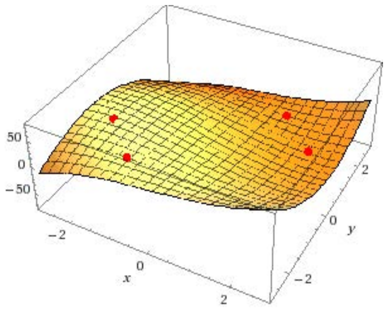
У тачки B је локални минимум, $f_{\min} = f(B) = -26$, јер је $H_f(B) = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}$ $(m_1 > 0,\ m_2 > 0)$.

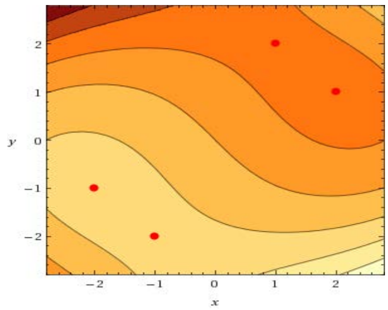
3. $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad f'_y = 6xy - 12 \quad f''_{x^2} = f''_{y^2} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y$

За стационарне тачке имамо

$$xy = 2, \quad x^2 + y^2 = 5; \qquad 2xy = 4, \quad (x+y)^2 = 9; \qquad x + y = \pm 3$$

1. $x + y = 3,\ y = 3 - x,\ x(3 - x) = 2,\ x^2 - 3x + 2 = 0,\ (x-2)(x-1) = 0,\ x \in \{1, 2\}$
2. $x + y = -3,\ y = -3 - x,\ x(3 - x) = -2,\ x^2 + 3x + 2 = 0,\ (x+2)(x+1) = 0,\ x \in \{-1, -2\}$





С.Т. $A(1,2),\ B(2,1),\ C(-1,-2),\ D(-2,-1)$.

У тачкама A и C је $ac - b^2 = 36 - 12 \cdot 12 < 0$, па у њима није ЛЕ.

У тачкама B и D је $ac - b^2 = 12 \cdot 12 - 36 > 0$, па је у њима ЛЕ.

У тачки B је $a = 12 > 0$, па је $f_{\min} = f(B) = -28$, а у тачки D је $a = -12 < 0$, па је $f_{\max} = f(D) = 28$.

4. $f'_x = 3x^2 - 3, \quad f'_y = -6y^2 + 6$

За стационарне тачке $3x^2 - 3 = 0,\ -6y^2 + 6 = 0; \quad x^2 = y^2 = 1$

Стационарне тачке су $A(1,1),\ B(1,-1),\ C(-1,1),\ D(-1,-1)$.

Да ли су у њима ЛЕ? $f''_{x^2} = 6x,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{y^2} = -12y$

У тачки A: $d^2f = 6dx^2 - 12dy^2$ мења знак — нема ЛЕ

У тачки B: $d^2f = 6dx^2 + 12dy^2 > 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) — min

У тачки C: $d^2f = -6dx^2 - 12dy^2 < 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) — max

У тачки D: $d^2f = -6dx^2 + 12dy^2$ мења знак — нема ЛЕ

Дакле, $f_{\min} = f(B) = -6,\ f_{\max} = f(C) = 6$

5. $f'_x = x^2y^2(-4x - 3y + 36), \quad f'_y = x^3y(-2x - 3y + 24)$

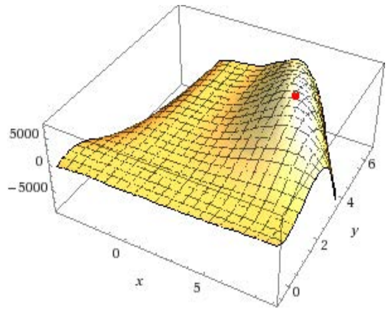
Из услова $f'_x = f'_y = 0$ имамо систем $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 36 \\ 2x + 3y = 24 \end{array}\right\}$ из којег добијамо стационарну тачку $A(6,4)$.

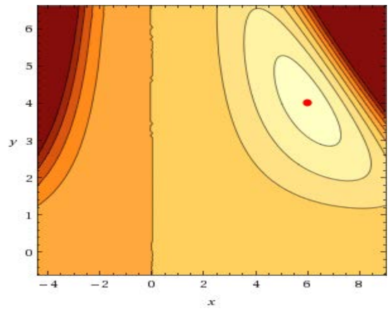
За проверу довољног услова налазимо парцијалне изводе другог реда,

$$f''_{x^2} = -6xy^2(2x + y - 12), \quad f''_{y^2} = -2x^3(x + 3y - 12), \quad f''_{xy} = x^2y(-8x - 9y + 72).$$

У тачки A је

$$a = f''_{x^2}(A) = -2304 < 0, \quad c = f''_{y^2}(A) = -2592, \quad b = f''_{xy}(A) = -1728, \quad ac - b^2 > 0.$$





Према томе, функција f у тачки A има локални максимум, $f_{\max} = f(A) = 6912$.

6. $f'_x = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2}, \quad f'_y = -\dfrac{x}{y^2} + 1, \quad f''_{x^2} = \dfrac{2}{x^3}, \quad f''_{y^2} = \dfrac{2x}{y^3}, \quad f''_{xy} = -\dfrac{1}{y^2}$

За С.Т. $f'_x = f'_y = 0, \quad x^2 = y,\ x = y^2, \quad x = y^2 = x^4, \quad x^4 - x = 0, \quad x(x-1)(x^2+x+1) = 0$

Како је $x \neq 0$, стационарне тачке су $A(1,1)$ и $B(1,-1)$.

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ f_{\min} = f(A) = 3, \quad H_f(B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ m_2 = -5 < 0 \text{ нема екстремума}$$

7. $f'_x = y - \dfrac{50}{x^2}, \quad f'_y = x - \dfrac{20}{y^2}, \quad f''_{x^2} = \dfrac{100}{x^3}, \quad f''_{y^2} = \dfrac{40}{y^3}, \quad f''_{xy} = 1$

За С.Т. $yx^2 = 50,\ xy^2 = 20, \quad \dfrac{50}{x} = \dfrac{20}{y}, \quad y = \dfrac{2}{5}x, \quad x^3 = 125, \quad x = 5$

Једина стационарна тачка је $A(5,2)$.

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},\ m_1 = \frac{4}{5} > 0,\ m_2 = 3 > 0,\ f_{\min} = f(A) = 30.$$

8. $f'_x = \sqrt{1+y} + \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'_y = \dfrac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x}, \quad \left.\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2\sqrt{1+y}\sqrt{1+x} + y &= 0 \\ 2\sqrt{1+y}\sqrt{1+x} + x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = x$

Функција има само једну стационарну тачку $A(-2/3, -2/3)$. Да ли је у овој тачки локални екстремум?

$$f''_{x^2} = -\frac{y}{4(x+1)^{3/2}}, \quad f''_{y^2} = -\frac{x}{4(y+1)^{3/2}}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$$

У тачки A је

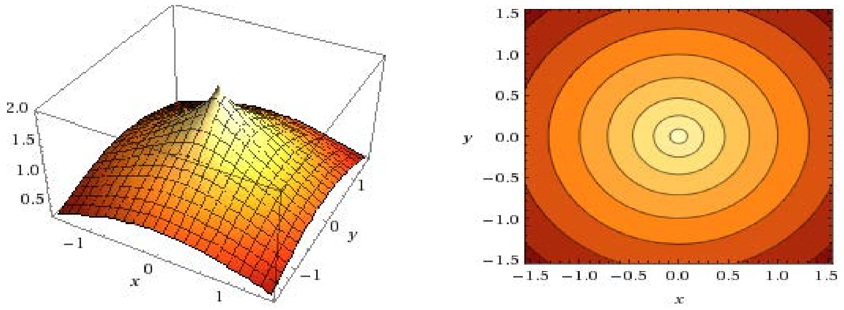
$$a = f''_{x^2}(A) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c = f''_{y^2}(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = f''_{xy}(A) = \sqrt{3}, \quad ac - b^2 = \frac{3}{4} - 3 < 0.$$

Према томе, функција f у тачки A нема локални екстремум.

9. За $(x,y) \neq (0,0)$ је $f'_x = -\dfrac{2x}{3(x^2+y^2)^{2/3}}, \quad f'_y = -\dfrac{2y}{3(x^2+y^2)^{2/3}}$. Пошто је

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

функција f нема парцијални извод f'_x у тачки $(0,0)$.



Према томе, функција нема стационарних тачака, али има критичну тачку $(0,0)$. Како је $f(x,y) < f(0,0)$ за свако $(x,y) \neq (0,0)$, у тачки $(0,0)$ је не само локални, већ и глобални (апсолутни) екстремум функције f.

10. $f'_x = 2x - \dfrac{2}{x}, \quad f'_y = 2y - \dfrac{18}{y}, \quad f''_{x^2} = \dfrac{2}{x^2} + 2, \quad f''_{y^2} = \dfrac{18}{y^2} + 2, \quad f''_{xy} = 0$

Из $f'_x = 0$ следи да је $x^2 = 1$. Како је $x > 0$ (због $\ln x$), једина стационарна тачка је $A(1,3)$.

У тачки A функција има локални минимум јер је $d^2 f(A) = 4dx^2 + 4dy^2 > 0$ за $dx^2 + dy^2 > 0$.

11. Из једнакости $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, где је

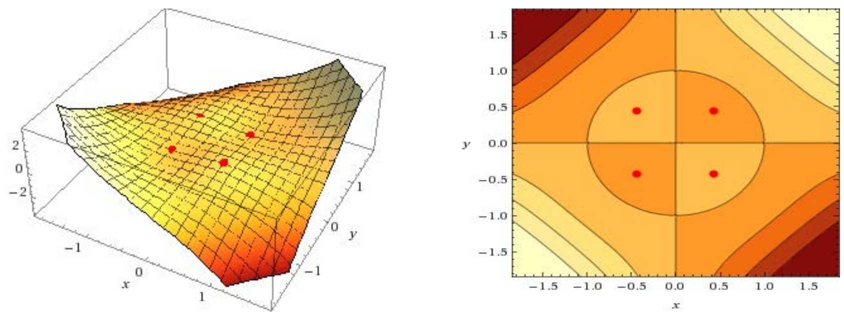
$$f'_x(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \quad f'_y(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2},$$

добијамо систем

$$y\ln(x^2+y^2) = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \quad x\ln(x^2+y^2) = -\frac{2xy^2}{x^2+y^2}.$$

Ако је $y = 0$, онда из друге једначине система следи да је $x = 0$ или $\ln x^2 = 0$. Како за $(0,0)$ функција није дефинисана, остаје $x^2 = 1$, па имамо две стационарне тачке $A(0,1)$ и $B(0,-1)$. Слично добијамо и стационарне тачке $C(1,0)$ и $D(-1,0)$.

Ако је $xy \neq 0$, онда из система добијамо $x^2 = y^2$, односно $|x| = |y|$. За $y = x$ имамо стационарне тачке $E(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$ и $F(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$, а за $y = -x$ имамо стационарне тачке $G(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$ и $H(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$.



За тачке A, B, C и D можемо на основу дефиниције локалног екстремума да закључимо да нема екстремума. На пример, из $f(x,1) = x\ln(x^2+1)$ следи да је $f(x,1) > 0$ за $x > 0$ и $f(x,1) < 0$ за $x < 0$, док је $f(0,1) = 0$. За остале тачке одредићемо други диференцијал. Како је

$$f''_{x^2} = \frac{2x^3y + 6xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{2y^3x + 6yx^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \ln(x^2+y^2) + 2\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2},$$

то је

$$f''_{x^2}(x,x) = f''_{y^2}(x,x) = 2, \quad f''_{x^2}(x,-x) = f''_{y^2}(x,-x) = -2$$

и

$$f''_{xy}(x,x) = f''_{xy}(x,-x) = 0,$$

па је

$$d^2f(E) = d^2f(F) = 2(dx^2+dy^2), \quad d^2f(G) = d^2f(H) = -2(dx^2+dy^2).$$

Према томе, $f_{\min} = f(E) = f(F) = -\dfrac{1}{2e}$ и $f_{\max} = f(G) = f(H) = \dfrac{1}{2e}$.

12. У Збирци постоји грешка у тексту задатка - треба $f(x,y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$.

$f'_x = (2x+2y^2+4y+1)e^{2x}, \quad f'_y = 2(y+1)e^{2x}, \quad f''_{x^2} = 4(x+y^2+2y+1)e^{2x}, \quad f''_{y^2} = 2e^{2x}, \quad f''_{xy} = 4(y+1)e^{2x}$

Стационарна тачка је $A(1/2,-1)$. Како је

$$f''_{x^2}(A) = f''_{y^2}(A) = 2e, \quad f''_{xy}(A) = 0, \quad d^2F(A) = 2e(dx^2+dy^2) > 0 \text{ за } dx^2+dy^2 > 0,$$

функција f у тачки A има локални минимум.

13. $f(x,y) = (x^2-2xy+2y^2)g(x,y), \quad f'_x = (2x-2y+x^2-2xy+2y^2)g, \quad f'_y = (-2x+4y-x^2+2xy-2y^2)g$

Из $f'_x = f'_y = 0$ следи да је $y = 0$ и $2x+x^2 = 0$. То значи да функција има две стационарне тачке: $A(0,0)$ и $B(-2,0)$.

Довољни услови

$f''_{x^2} = (x^2-2xy+4x+2y^2-4y+2)g, \; f''_{y^2} = (x^2-2xy+4x+2y^2-8y+4)g, \; f''_{xy} - (x^2-2xy+4x+2y^2-6y+2)g$

У стационарним тачкама је

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \; m_1 = 2 > 0, \; m_2 = 4 > 0, \quad H_f(B) = \begin{bmatrix} -2/e^2 & 2/e^2 \\ 2/e^2 & 0 \end{bmatrix}, \; m_2 < 0.$$

Према томе, у тачки A функција има локални минимум (једнак нули), а у тачки B нема локални екстремум.

14. $f(x,y) = (x^2-y^2)g(x,y), \quad f'_x = (2x+x^2-y^2)g, \quad f'_y = 2(x^2-y^2-y)g$ Из услова $f'_x = f'_y = 0$ следи да је $y = -2x$ и $2x-3x^2 = 0$. За $x = 0$ функција има стационарну тачку $A(0,0)$, а за $x = 2/3$ функција има стационарну тачку $-4/3$.

Довољан услов

$$f''_{x^2} = (2+4x+x^2-y^2)g, \quad f''_{y^2} = 2(2x^2-2y^2-4y-1)g, \quad f''_{xy} = 2(2x-y+x^2-y^2)g$$

У тачки A је

$$a = f''_{x^2} = 2, \quad c = f''_{y^2} = -2, \quad b = f''_{xy} = 0, \quad ac-b^2 = -4 < 0,$$

па у овој тачки функција нема локални екстремум.

У тачки B је

$$a = f''_{x^2} = \frac{10}{3e^2}, \quad c = f''_{y^2} = \frac{10}{3e^2}, \quad b = f''_{xy} = \frac{8}{3e^2}, \quad ac-b^2 = \frac{4}{e^4} > 0,$$

што значи да функција f у тачки B има локални минимум.

15.

$$f'_x = 2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2), \quad f'_y = 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2)$$

Стационарне тачке ?

$$x(1-x^2-2y^2) = 0, \quad y(2-x^2-2y^2) = 0$$

1. $x = 0, \; y = 0$ – стационарна тачка је $A(0,0)$
2. $x = 0, \; 2-x^2-2y^2 = 0$ – стационарне тачке су $B(0,1)$ и $C(0,-1)$
3. $1-x^2-2y^2 = 0, \; y = 0$ – стационарне тачке су $D(1,0)$ и $E(-1,0)$

Довољни услови ?

$f(A) = 0, \; f(P) > 0$ за $P \neq A$, што значи да f у A има локални минимум

B, C, D, E ?

$$f''_{x^2} = 2e^{-x^2-y^2}(1-5x^2-2y^2+2x^4+4x^2y^2), \quad f''_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}(-3+x^2+2y^2),$$

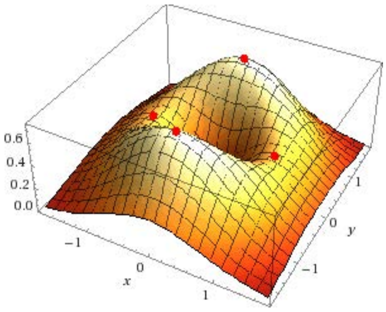
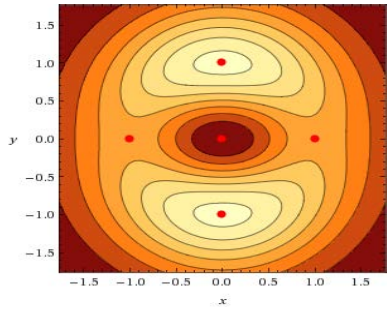
$$f''_{y^2} = 2e^{-x^2-y^2}(2 - 10y^2 - x^2 + 2x^2y^2 + 4y^4)$$

$B, C: a = f''_{x^2} = -2e^{-1},\ b = f''_{x^2} = 0,\ c = f''_{y^2} = -8e^{-1}$

$$ac - b^2 = 16e^{-2} > 0,\ a < 0 \Rightarrow f_{\max} = f(B) = f(C) = 2/e$$

$D, E: a = f''_{x^2} = -4e^{-1},\ b = f''_{x^2} = 0,\ c = f''_{y^2} = 2e^{-1}$

$$ac - b^2 = -8e^{-2} < 0 \Rightarrow f \text{ нема ЛЕ у } D \text{ и } E$$

Напомена. Подаци се могу прегледно дати у табели

	A	B	C	D	E
$a = f''_{x^2}$	2	$-2e^{-1}$	$-2e^{-1}$	$-4e^{-1}$	$-4e^{-1}$
$c = f''_{y^2}$	4	$-8e^{-1}$	$-8e^{-1}$	$2e^{-1}$	$2e^{-1}$
$b = f''_{zy}$	0	0	0	0	0
$ac - b^2$	8	$16e^{-2}$	$16e^{-2}$	$-8e^{-2}$	$-8e^{-2}$
	min	max	max	седло	седло

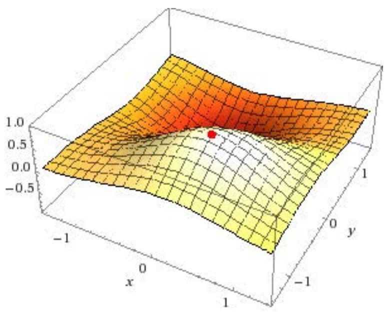
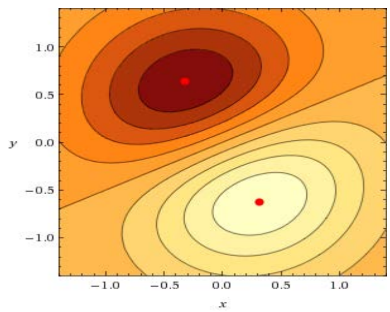
16. $f(x,y) = (x-2y)g(x,y), \quad f'_x = g - 2x(x-2y)g = (1 - 2x^2 + 4xy)g, \quad f'_y = -2(1 + xy - 2y^2)g$
За стационарне тачке треба решити систем

$$1 - 2x^2 + 4xy = 0, \quad 1 + xy - 2y^2 = 0.$$

Из друге једначине имамо да је $xy = 2y^2 - 1$ и $x = 2y - 1/y$. Заменом израза за xy и x у првој једначини добијамо

$$1 - 2(2y - 1/y)^2 + 4(2y^2 - 1) = 0, \quad 1 - 8y^2 + 8 - \frac{2}{y^2} + 8y^2 - 4 = 0, \quad \frac{2}{y^2} = 5, \quad y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Дакле, функција има две стационарне тачке: $A\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ и $B\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.

<u>Довољни услови</u>

$$f''_{x^2} = (4x^3 - 8x^2y - 6x + 4y)g, \quad f''_{y^2} = -2(4y^2 - 2xy^2 + x - 6y)g, \quad f''_{xy} = (4x^2y + 4x - 8xy^2 - 2y)g$$

У тачки A је

$$a = f''_{x^2}(A) = 6\sqrt{\frac{2}{5e}} > 0, \quad c = f''_{y^2}(A) = 9\sqrt{\frac{2}{5e}}, \quad b = f''_{xy}(A) = -2\sqrt{\frac{2}{5e}}, \quad ac - b^2 = \frac{20}{e} > 0,$$

а у тачки B је

$$a = f''_{x^2}(B) = -6\sqrt{\frac{2}{5e}} < 0, \quad c = f''_{y^2}(B) = -9\sqrt{\frac{2}{5e}}, \quad b = f''_{xy}(B) = 2\sqrt{\frac{2}{5e}}, \quad ac - b^2 = \frac{20}{e} > 0.$$

Према томе, $f_{\min} = f(A) = -\sqrt{\frac{5}{2e}}$ и $f_{\max} = f(B) = \sqrt{\frac{5}{2e}}$.

17. $f'_x = \cos x - \sin(x+y), \quad f'_y = \cos y - \sin(x+y), \quad f''_{x^2} = -\sin x - \cos(x+y),$

$$f''_{y^2} = -\sin y - \cos(x+y), \quad f''_{xy} = -\cos(x+y)$$

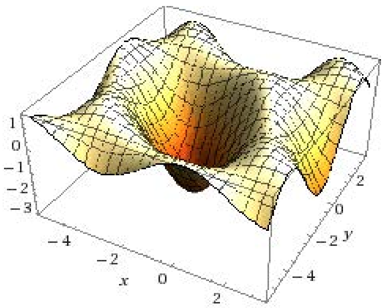
Из услова $f'_x = f'_y = 0$ следи да је $\cos x = \cos y$. Пошто су x и y из интервала $[0, \pi/4]$, то значи да је $y = x$. Сада из $f'_x = 0$ имамо да је

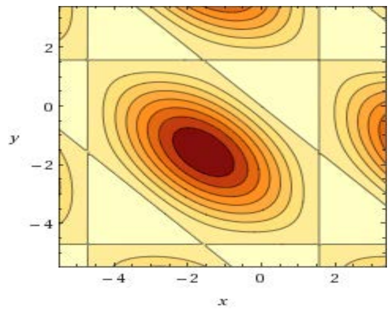
$$\cos x - \sin 2x = 0, \quad \cos x - 2\sin x \cos x = 0, \quad (1 - 2\sin x)\cos x.$$

За $x \in [0, \pi/4]$ је $\cos x \neq 0$, па је $2\sin x = 1$, односно $x = \pi/6$. Дакле, функција има једну стационарну тачку $A(\pi/6, \pi/6)$.

У тачки A је локални максимум, $f_{max} = f(A) = 3/2$, јер је

$$a = f''_{x^2}(A) = -1 < 0, \quad c = f''_{y^2}(A) = -1, \quad b = f''_{xy}(A) = -\frac{1}{2}, \quad ac - b^2 = \frac{3}{4} > 0.$$





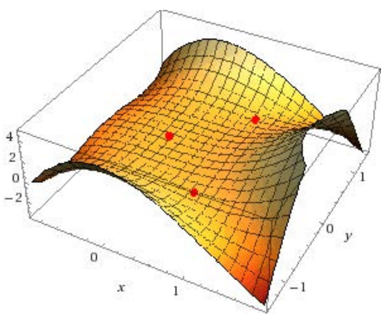
Напомена. Ако интервал $[0, \pi/4]$ заменимо интервалом $[0, 3\pi/2]$, добијамо још четири стационарне тачке, при чему је у једној од њих локални минимум, а у остале три није локални екстремум.

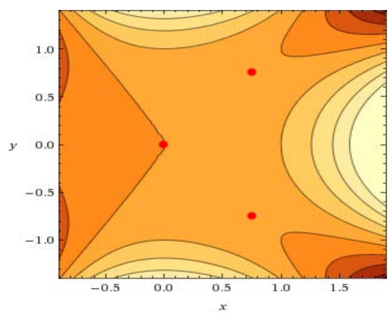
20. Тачка $A(0,0)$ је стационарна тачка, $f(0,0) = 0, \quad f(x,0) = x^2 > 0, \quad f(0,y) = -y^2 < 0$

Из $d^2 f(A) = 2dx^2 - 2dxdy - 2dy^2 \begin{cases} > 0, & dx \neq 0,\ dy = 0 \\ < 0, & dx = 0,\ dy \neq 0 \end{cases}$ такође следи да у тачки A није локални екстремум.

21. $f'_x = 3x^2 - 4xy^2, \quad f'_y = -4x^2 y + 4y^3, \quad f''_{x^2} = 6x - 4y^2, \quad f''_{y^2} = -4x^2 + 12y^2, \quad f''_{xy} = -8xy$

Из $f'_y = 0$ следи да је $y(y-x)(y+x) = 0$. За $y = 0$ имамо стационарну тачку $A(0,0)$, за $y = x$ добијамо стационарну тачку $B(3/4, 3/4)$, а за $y = -x$ добијамо стационарну тачку $C(3/4, -3/4)$.





У тачки A нема локалног екстремума јер је $f(A)=0$, а $f(x,0)=x^3<f(A)$ за $x<0$ и $f(x,0)>f(A)$ за $x>0$.

У тачки B није локални екстремум јер је

$$a=f''_{x^2}(A)=\frac{9}{4},\quad c=f''_{y^2}(A)=\frac{9}{2},\quad b=f''_{xy}(A)=-\frac{9}{2},\quad ac-b^2=\frac{81}{8}-\frac{81}{4}=-\frac{81}{8}<0.$$

Слично важи и у тачки C за коју је $a=9/4$ и $b=c=9/2$.

22. $f'_x=y-\dfrac{1}{2(x+y)^2},\quad f'_y=x-\dfrac{1}{2(x+y)^2},\quad f''_{x^2}=f''_{y^2}=\dfrac{1}{(x+y)^3},\quad f''_{xy}=1+\dfrac{1}{(x+y)^3}$

$$f'_x=0,\ f'_y=0\Rightarrow y=x,\ x^3=\frac{1}{8},\ x=\frac{1}{2}$$

С.Т. $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right),\quad f''_{x^2}(A)=f''_{y^2}(A)=1,\ f''_{xy}(A)=2,\quad H_f(A)=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},\ m_1=1>0,\ m_2=-3<0$

Како је $m_2<0$, функција у тачи A нема локални екстремум. Наравно, закључак следи и из израза за диференцијал другог реда у тачки A,

$$d^2f(A)=dx^2+4dxdy+dy^2=(dx+dy)^2+2dxdy=\begin{cases}-2dx^2<0, & dy=-dx\\ 6dx^2>0, & dy=dx\end{cases}$$

23. $f'_x=2xy\ln x+xy,\quad f'_y=2x\ln x$

Пошто је $x>0$, из услова $f'_x=0$ следи да је $x=1$, па функција има само једну стационарну тачку $A(1,0)$.

Да ли је у тој тачки локални екстремум? Вредност функције у тачки A је нула, а у тачки $(1+x,y)$ је

$$f(1+x,y)=(1+x)^2y\ln(1+x),$$

па функција мења знак зависно од прираштаја x и y (знак је $+$ ако су x и y позитивни, а $-$ ако је x позитивно и y негативно). Према томе, у тачки A функција нема локални екстремум.

Напомена. На основу знака за $d^2f(A)$ се такође може видети да у тачки A није локални екстремум. Најпре налазимо да је

$$f''_{x^2}=2y\ln x+2y,\quad f''_{y^2}=0\quad f''_{xy}=2x\ln x+x,\quad f''_{x^2}(A)=f''_{y^2}(A)=0,\ f''_{xy}(A)=1,$$

а затим из једнакости $d^2f(A)=2dxdy$ видимо да $d^2f(A)$ мења знак у зависности од dx и dy.

24. За $(x,y)\neq(0,0)$ имамо да је

$$\begin{aligned}f'_x &= 1+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}+3\cdot\frac{y}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-1}{x^2}\\ &= 1+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{3y}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^2+y^2+x-3y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Слично,

$$f'_y=-2+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{3x}{x^2+y^2}=\frac{3x+y-2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$$

Из $f'_x=0$ и $f'_y=0$ следи $x=y$, $x^2-x=0$, $x=0$ или $x=1$.

Како функција f није дефинисана у тачки $(0,0)$, једина стационарна тачка је $A(1,1)$.

Довољан услов

$$f''_{x^2}=\frac{y^2-x^2+6xy}{(x^2+y^2)^2},\quad f''_{xy}=\frac{3y^2-3x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad f''_{y^2}=\frac{x^2-y^2-6xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$a=f''_{x^2}(A)=\frac{3}{2},\quad b=f''_{xy}(A)=-\frac{1}{2},\quad c=f''_{y^2}(A)=-\frac{3}{2},\quad ac-b^2=-\frac{5}{2}<0$$

Функција f нема локалних екстремума (у стационарној тачки је седло).

25. $f = xg(x)$, $g(x) = e^{y+x\sin y}$, $\quad f'_x = g + xg' = (1 + x\sin y)g(x,y)$, $\quad f'_y = x(1 + x\cos y)g(x,y)$

Из услова $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ добијамо систем

$$1 + x\cos y = 0, \quad 1 + x\sin y = 0$$

из којег следи да је $x\cos y = x\sin y$. Како је $x \neq 0$ (због $f'_x = 0$), то је $\cos y = \sin y$. Према томе, стационарне тачке су $A_k\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ и $B_k\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$ за $k \in \mathbb{Z}$.

Да ли су у овим тачкама локални екстремуми?

Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо да је

$$f''_{x^2} = (x\sin y + 2)\sin y g(x,y), \quad f''_{y^2} = (x^2\cos^2 y + 2x\cos y - x\sin y + 1)g(x,y),$$

$$f''_{xy} = (x^2\sin y\cos y + x\sin y + 2x\cos y + 1)g(x,y)$$

У тачки $A_0(-\sqrt{2}, \pi/4)$ је

$$f''_{x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4-1}, \quad f''_{y^2} = -\sqrt{2}e^{\pi/4-1}, \quad f''_{xy} = -e^{\pi/4-1}, \quad f''_{x^2}\cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 = -2e^{\pi/2-2} < 0.$$

Према томе, у тачки A_0 није локлани екстремум функције f.

Слично важи и за остале стационарне тачке.

26. Тачка $A(0,0)$ је стационарна тачка, $f(0,y) = 4y^3 \begin{cases} > 0, & y > 0 \\ < 0, & y < 0 \end{cases}$, док је $F(A) = 0$.

Напомена. Функција има још једну стационарну тачку $B(1/6, 1/6)$. Како је $f''_{x^2} = 2$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{y^2} = 24y$, то је

$$d^2f(A) = 2dx^2 - 4dxdy, \quad d^2f(B) = 2dx^2 - 4dxdy + 4dy^2 = 2(dx - dy)^2 + 2dy^2 > 0$$

Према томе, функција у тачки A нема локални екстремум, а у тачки B има локални минимум.

27. Тачка $(0,0)$ је стационарна тачка, $f(x,0) = -x^3 > 0$ за $x < 0$, $f(0,y) = -y^4 < 0$, док је $f(0,0) = 0$.

Напомена. У Хесеовој матриши је $m_1 = m_2 = 0$, па се из ње не може ништа закључити о о постојању локалног екстремума.

28.

$$f(x,0) = x^3 \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}, \quad f(0,0) = 0$$

Како је $f(x,0) > f(0,0)$ за $x > 0$ и $f(x,0) < f(0,0)$ функција f нема локално екстремум у тачки $(0,0)$.

29. $f(0,0) = 0$, $\quad f(x,0) = x^4 - x^2 < 0$ за $|x| < 1$, $\quad f(x,-x) = 2x^4 > 0$

Дакле, не постоји околина тачке $(0,0)$ у којој је испуњен услов за локални екстремум.

30. $f(x,0) = 2x^2 > 0 = f(0,0)$, што значи да је по x оси локални минимум.

$f(0,y) = y^4 > f(0,0)$, па је и по y оси локални минимум.

А по правој $y = kx$? Ако је $f(x,kx) = 2x^2 - 3k^2x^3 + k^4x^4 = \varphi(x)$, тада је $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) = 4 > 0$, па f по свакој правој $y = kx$ има локални минимум у $(0,0)$.

Ипак, због

$$f(2y^2/3, y) = 2\cdot\frac{4}{9}y^4 - 3\cdot\frac{2}{3}y^2\cdot y^2 + y^4 = -\frac{1}{9}y^4 < 0 = f(0,0)$$

функција f нема локални екстремум у $(0,0)$.

Напомена. Из једнакости $f(x,y) = (y^2 - x)(y^2 - 2x)$ се такође види да функција у околини тачке $(0,0)$ има вредности различитог знака. Међутим, из чињенице да је $d^2f(A) = 4dx^2$ не може се закључити да је $d^2f(A) > 0$ за $|dx| + |dy| \neq 0$. За $dx \neq 0$ то је тачно, али за $dx = 0$ и $dy \neq 0$ је $d^2f(A) = 0$. Према томе, ради се о случају када је $d^2f(A) \geq 0$ и тада не можемо из овог податка закључити да ли у тачки A постоји локални екстремум.

31. Тачка $A(0,0)$ је стационарна тачка, $f(y^2,y) = -y^5 \begin{cases} >0, & y<0 \\ <0, & y>0 \end{cases}$, док је $f(0,0)=0$. Према томе, функција f у тачки $(0,0)$ нема локални екстремум.

Међутим, како је $f(x,0)=x^2$ и $f(0,y)=y^4-y^5$, функција у тачки $(0,0)$ има локални минимум по координатним осама. Такође, у овој тачки је локални минимум и по било којој правој $y=kx$ јер је $f(x,kx)=g(x)$, при чему је $g(0)=g'(0)=0$ и $g''(0)=2$.

32. Задатак треба да гласи: *Доказати да функција* $f:(x,y)\mapsto y^5-x^2-y^2+2xy$ *у тачки* $(0,0)$ *нема локални екстремум дуж праве* $y=x$, *а има локални максимум дуж сваке друге праве која садржи тачку* $(0,0)$.

Како је $f(0,0)=0$ и $f(x,x)=x^5>0$ за $x>0$, односно $f(x,x)=x^5<0$ за $x<0$, функција у тачки $(0,0)$ нема локални екстремум.

За $k\neq 1$ је $f(x,kx)=k^5x^5-(k-1)^2x^2=g(x)\sim -(k-1)^2x^2$ када $x\to 0$. Према томе, постоји околина тачке $x=0$ у којој је $f(x,kx)=g(x)<0=f(0,0)$.

33. $f'_x = 2x+y-\dfrac{a^3}{x^2}$, $\quad f'_y = 2y+x-\dfrac{a^3}{y^2}$, $\quad$ За С.Т. $\left.\begin{aligned} 2x+y &= \frac{a^3}{x^2} \\ 2y+x &= \frac{a^3}{y^2} \end{aligned}\right\}$, $\quad \left.\begin{aligned} 2x^3+yx^2 &= a^3 \\ 2y^3+xy^2 &= a^3 \end{aligned}\right\}$

Лако се проверава да $A(a/\sqrt[3]{3}, a/\sqrt[3]{3})$ јесте стационарна тачка.

Треба још утврдити да је $d^2f(A)>0$ за $dx^2+dy^2\neq 0$. Из $f''_{x^2}=2+\dfrac{2a^3}{x^3}$, $f''_{y^2}=2+\dfrac{2a^3}{y^3}$ и $f''_{xy}=1$ имамо да је

$$f''_{x^2}=f''_{y^2}=8, \quad d^2f(A)=8dx^2+8dy^2+2dxdy=7dx^2+7dy^2+(dx+dy)^2>0.$$

Наравно, тражени закључак следи и из Хесеове матрице $H_f(A)=\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$.

Напомена. Тачка A је једина стационарна тачка. Из услова $f'_x=f'_y=0$ следи

$$2x^3+yx^2=2y^3+xy^2, \quad 2x^3-2y^3=xy^2-yx^2, \quad 2(x-y)(x^2+xy+y^2)=xy(y-x).$$

Ако је $y=x$, онда је $3x-a^3/x^2$, па је $x=1/\sqrt[3]{3}$. У случају $x\neq y$ једначина $2(x^2+xy+y^2)=xy$ нема решења.

34. $dz=-\dfrac{4x+8z}{2z+8x-1}dx-\dfrac{4y}{2z+8x-1}dy$, $\quad \left.\begin{aligned} 4x+8z &= 0 \\ 4y &= 0 \end{aligned}\right\}$, $A(-2,0)$, $z(A)=1$, $B(16/7,0)$, $z(B)=-8/7$

$d^2z(A)=-4dx^2-4dy^2<0$, $\quad d^2z(B)=\dfrac{28}{23}(dx^2+dy^2)>0$, $\quad f_{\max}=f(A)=1$, $f_{\min}=f(B)=-\dfrac{8}{7}$

35. Нека је

$$F(x,y,z)=5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72$$

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{10x-2y-2z}{10z-2x-2y}=-\frac{5x-y-z}{5z-x-y}, \quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{10y-2x-2z}{10z-2x-2y}=-\frac{5y-x-z}{5z-x-y}$$

Из система

$$5x-y-z=0, \quad 5y-x-z=0, \quad F(x,y,z)=0$$

добијамо: $y=x$ (одузимањем прве две), $z=4x$, $x=\pm 1$ (из $F=0$)

Стационарне тачке су: $A(1,1)$ (са $z(A)=4$) и $B(-1,-1)$ (са $z(B)=-4$)

Да ли су у A и B ЛЕ?

$$z''_{x^2}=-\frac{(5-z'_x)(5z-x-y)-\overbrace{(5x-y-z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_x-1)}{(5z-x-y)^2}$$

$$z''_{x^2}(A)=-\frac{5(20-1-1)}{18^2}=-\frac{5}{18}, \quad z''_{x^2}(B)=-\frac{5(-20+1+1)}{18^2}=\frac{5}{18}$$

$$z''_{xy} = -\frac{(-1-z'_y)(5z-x-y) - \overbrace{(5x-y-z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_y-1)}{(5z-x-y)^2}$$

$$z''_{xy}(A) = -\frac{-1\cdot 18}{18^2} = \frac{1}{18} = z''_{yx}(A), \quad z''_{xy}(B) = z''_{yx}(B) = -\frac{1}{18}$$

$$z''_{y^2} = -\frac{(5-z'_y)(5z-x-y) - \overbrace{(5y-x-z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_y-1)}{(5z-x-y)^2}$$

$$z''_{y^2}(A) = -\frac{5\cdot 18}{18^2} = -\frac{5}{18}, \quad z''_{y^2}(B) = -\frac{5\cdot(-18)}{18^2} = \frac{5}{18}$$

$A : ac - b^2 = 5^2/18^2 - 1/18^2 = 24/18^2 > 0,\ a = -5/18 < 0 \Rightarrow f_{\max} = f(A) = 4$

$B : ac - b^2 = 5^2/18^2 - (-1)^2/18^2 = 24/18^2 > 0,\ a = 5/18 > 0 \Rightarrow f_{\min} = f(B) = -4$

6.2 Локални екстремуми функције три променљиве

Нека је f реална функција три променљиве која има непрекидне парцијалне изводе другог реда и нека је A стационарна тачка функције f, а m_1, m_2 и m_3 главни минори Хесеове матрице функције f у тачки A.

- Довољан услов да f у тачки A има локални минимум је $d^2f(A) > 0$ за $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако је $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ и $m_3 > 0$.
- Довољан услов да f у тачки A има локални максимум је $d^2f(A) < 0$ за $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако је $m_1 < 0$, $m_2 > 0$ и $m_3 < 0$.
- Довољан услов да f у тачки A нема локални екстремум је да $d^2f(A)$ мења знак.

Наведени услови нису неопходни. У осталим случајевима, као и у случају критичне тачке која није стационарна, постојање локалног екстремума се проверава на основу дефиниције.

У неким специјалним случајевима постоје и други критеријуми. На пример, ако је $d^2f(A) = 0$ и $d^3f(A) \neq 0$, тада у тачки A није локални екстремум.

38. $f'_x = 2(x-1) + 2z, \quad f'_y = 3y^2 + 12y, f'_z = 4z + 2x$

Из услова $f'_x = f'_y = f'_z = 0$ добијамо две стационарне тачке: $A(2, 0, -1)$ и $B(2, -4, -1)$. Парцијални изводи другог реда су

$$f''_{x^2} = 2, \quad f''_{y^2} = 6y + 12, f''_{z^2} = 4, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yz} = 0, \quad z'_x = 2.$$

У тачки A је

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad m_1 = 2 > 0,\ m_2 = 24 > 0,\ m_3 = 48 > 0,$$

а у тачки B је

$$H_f(B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -12 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad m_1 = 2 > 0,\ m_2 = -24 > 0,\ m_3 = -48 < 0.$$

Према томе, функција f у тачки B нема локални екстремум, а у тачки A има локални минимум, $f_{\min} = f(A) = -1$

39.

$$f'_x = 4x - y + 2z, \quad f'_y = -x - 1 + 3y^2, \quad f'_z = 2x + 2z$$

За стационарне тачке:

$$x+z=0, \quad 3y^2=x+1, \quad y=4x+2z$$

$$z=-x,\ y=4x-2x=2x,\ 3\cdot 4x^2=x+1,\ 12x^2-x-1=0,\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=-\frac{1}{4}$$

Стационарне тачке су: $A(1/3,2/3,-1/3)$ и $B(-1/4,-1/2,1/4)$

Да ли су у њима ЛЕ ?

$f''_{x^2}=4,\ f''_{xy}=f''_{yx}=-1,\ f''_{xz}=f''_{zx}=2,\ f''_{y^2}=6y,\ f''_{yz}=f''_{y^2}=0,\ f''_{z^2}=2$

<u>У тачки A :</u>

$$M=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad m_1=4,\ m_2=15,\ m_3=14$$

Дакле, $f_{\min}=f(A)$

<u>У тачки B :</u>

$$M=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad m_1=4,\ m_2=-13$$

Дакле, функција f у тачки B нема ЛЕ. Из

$$d^2f(B)=\begin{cases}4dx^2, & dy=dz=0,\ dx\neq 0\\ -3dy^2, & dx=dz=0,\ dy\neq 0\end{cases}$$

видимо да $d^2f(B)$ заиста мења знак.

40. $f'_x=4x-2y-1,\ f'_y=2y-2x,\ f'_z=2z+4, f''_{x^2}=4,\ f''_{y^2}=f''_{z^2}=2,\ f''_{xy}=-2,\ f''_{yz}=f''_{zx}=0$

$$H_f(A)=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad m_1=4>0,\ m_2=4>-,\ m_3=8>0$$

Функција f у тачки A има локални минимум, $f_{\min}(A)=-17/4$.

41.

$$f'_x=2x-2(4-x-y-z), \quad f'_y=2y-2(4-x-y-z), \quad f'_z=2z-2(4-x-y-z)$$

$$\nabla f=0:\ 2x=4-y-z, \quad 2y=4-x-z, \quad 2z=4-x-y.$$

$$2(x+y+z)=12-2(x+y+z), \quad x+y+z=3, \quad y+z=3-x, \quad 2x=4-3+x, \quad x=1.$$

Јединa стацииoнарна тачка је $A(1,1,1)$.

$f''_{x^2}=f''_{y^2}=f''_{z^2}=4,\ f''_{xy}=f''_{xz}=f''_{yz}=2$

$$H_f(A)=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

Како је $m_1=4>0$, $m_2=16-4>0$ и $m_3=4^3=2\cdot 8-3\cdot 4^2>0$, то је $f_{\min}=f(A)=4$.

Да је у питању локални минимум могло се закључити и из форме диференцијала другог реда јер је

$$\begin{aligned}d^2f(A) &= 4dx^2+4dy^2+4dz^2+4dxdy+4dydz+4dzdx\\ &= 2(dx+dy+dz)^2+2dx^2+2dy^2+2dz^2.\end{aligned}$$

42. $f'_x = yz(1-2x-y-z), \quad f'_y = xz(1-x-2y-z), \quad f'_z = xy(1-x-y-2z)$

За $xyz \neq 0$ стационарну тачку $A(1/4, 1/4, 1/4)$ добијамо решавајући систем линеарних једначина

$$2x+y+z=1, \quad x+2y+z=1, \quad x+y+2z=1.$$

Израчунавањем парцијалних извода другог реда у тачки A добија се

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = f''_{z^2} = -\frac{1}{8}, \quad f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = -\frac{1}{16},$$

па је

$$\begin{aligned} d^2 f(A) &= -\frac{1}{8}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dxdy + dydz + dxdz\right) \\ &= -\frac{1}{16}\left((dx+dy)^2 + (dy+dz)^2 + (dz+dx)^2\right). \end{aligned}$$

Како је $d^2 f(A) = 0$ ако и само ако је $dx + dy = dy + dz = dz + dx = 0$, односно ако и само ако је $dx = dy = dz = 0$, закључујемо да је $d^2 f(M) > 0$ за $dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0$.

Дакле, функција f у тачки A има локални максимум, $f_{\max} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$.

Да функција f у тачки A има локални максимум следи и из Хесеове матрице

$$H_f(M) = \begin{bmatrix} -1/8 & -1/16 & -1/16 \\ -1/16 & -1/8 & -1/16 \\ -1/16 & -1/16 & -1/8 \end{bmatrix}$$

јер је

$$m_1 = -\frac{1}{8} < 0, \quad m_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8^2} > 0, \quad m_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8^3} < 0.$$

Уместо испитивања матрице $H_f(A)$ можемо да испитамо матрицу H, где је

$$H_f(A) = -\frac{1}{16} H, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Како је матрица H позитивно дефинисана (њени главни минори су 2, 3 и 4), то је матрица $H_f(A)$ негативно дефинисана.

Поред тачке A, функција f има и других стационарних тачака.

За $x = y = 0$, стационарне тачке су $B_z(0, 0, z)$ (цела z-оса). Међутим, у њима је $d^2 f = z(1-z)dxdy$, па за $z \neq 0$ и $z \neq 1$ функција у овим тачкама нема локални екстремум ($d^2 f$ мења знак у зависности од знака за dx и dy). У тачкама $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$ функција такође нема локални екстремум јер постоје различити прираштаји Δx, Δy и Δz за које функција има прираштаје различитог знака, док је вредност функције у тим тачкама једнака нули.

Слично важи и за тачке $(0, y, 0)$ (y-оса) и за тачке $(x, 0, 0)$ (x-оса).

Ако је $x = 0$, а $yz \neq 0$, тада је $1 = y + z$, па су тачке $D_y(0, y, 1-y)$ такође стационарне тачке функције f. У овим тачкама је

$$f''_{y^2} = f''_{z^2} = f''_{yz} = 0, \quad f''_{x^2} = 2y(y-1), \quad f''_{xy} = f''_{zx} = y(y-1),$$

па је $d^2 f = 2y(y-1)(dx^2 + dxdy + dzdx)$. Како $dx^2 + dxdy + dzdx$ није сталног знака (за $dy = dz = 0$ и $dx \neq 0$ је позитивно, а за $dy = dz = -dx \neq 0$ је негативно), ни у овим тачкама функција нема локални екстремум.

Слично важи и за стационарне тачке $(x, 0, 1-x)$ и $(x, 1-x, 0)$.

43. $f'_x = y^2 z^3(1-2x-2y-3z), \quad f'_y = 2xyz^3(1-x-3y-3z), \quad f'_z = 3xy^2 z^2(1-x-2y-4z)$ Пошто је $xyz \neq 0$, потребни услови за локални екстремум $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ и $f'_z = 0$ своде се на систем

$$1-2x-2y-3z = 0, \quad 1-x-3y-3z = 0, \quad 1-x-2y-4z = 0$$

који има јединствено решење $x = y = z = 1/7$. Дакле, једина стационарна тачка функције f је тачка $A(1/7, 1/7, 1/7)$.

За проверу довољних услова треба одредити парцијалне изводе другог реда.

$$f''_{x^2} - 2y^2z^3, \quad f''_{y^2} = 2xz^3(1-x-6y-3z), \quad f''_{z^2} = 6xy^2z(1-x-2y-8z)$$

$$f''_{xy} = 2yz^3(1-2x-3y-3z), \quad f''_{yz} = 6xyz^2(1-x-3y-4z), \quad f''_{zx} = 3y^2z^2(1-2x-2y-4z)$$

За $z = y = x$ је

$$f''_{x^2} = -2x^5, \quad f''_{y^2} = -2x^4(10x-1), \quad f''_{z^2} = -6x^4(9x-1),$$

$$f''_{xy} = -2x^4(8x-1), \quad f''_{yz} = -6x^4(8x-1), \quad f''_{zx} = -3x^4(8x-1)$$

У тачки A је

$$H_f(A) = -\frac{1}{7^5}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 24 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7^5}H.$$

Главни минори матрице H су позитивни ($m_1 = 2$, $m_2 = 8$, $m_3 = 138$), што значи да $F_f(A)$ одређује негативно дефинисану квадратну форму, односно да важи $d^2f(A) < 0$ за $|dx| + |dy| + |dz| \neq 0$.

Према томе, функција f у тачки A има локални максимум, $f_{\max} = f(A) = \dfrac{1}{7^7}$.

44. $f'_x = -4 + \dfrac{4x}{y}, \quad f'_y = \dfrac{2y}{z} - \dfrac{2x^2}{y^2}, \quad f'_z = 4z - \dfrac{y^2}{z^2}$

Из $f'_x = 0$ следи да је $y = x$, из $f'_y = 0$ следи да је $y = z$, а затим из $f'_z = 0$ добијамо да је $A(1/4, 1/4, 1/4)$ једина стационарна тачка функције f.

Налажењем парцијалних извода другог реда

$$f''_{x^2} = \frac{4}{y}, \quad f''_{y^2} = \frac{2}{z} + \frac{4x^2}{y^3}, \quad f''_{z^2} = 4 + \frac{2y^2}{z^3}, \quad f''_{xy} = -\frac{4x}{y^2}, \quad f''_{yz} = -\frac{2y^2}{z^2}, \quad f''_{xz} = 0$$

У тачки A имамо да је

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 0 \\ -8 & 24 & -16 \\ 0 & -16 & 16 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ и $m_3 > 0$, на основу Силвестеровог критеријума следи да функција f у тачки A има локални минимум који износи $-1/8$.

45. Парцијалним диференцирањем функције f добијамо

$$f'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2}, \quad f'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \quad f'_z = -\frac{2}{z^2} + \frac{2z}{y},$$

$$f''_{x^2} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad f''_{yz} = -\frac{2z}{y^2}, \quad f''_{z^2} = \frac{4}{z^3} + \frac{2}{y}.$$

Решавањем система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ и $f'_z = 0$ имамо

$$\frac{y^2}{4x^2} = 1, \ \frac{z^2}{y^2} = \frac{y}{2x}, \ \frac{z}{y} = \frac{1}{z^2}, \quad \frac{y}{2x} = \pm 1, \ \frac{z}{y} = \pm 1, \ z = \pm 1.$$

Међутим, $\dfrac{y}{2x} > 0$, па је $\dfrac{y}{2x} = 1$ и $\dfrac{z}{y} = 1$. Према томе, имамо две стационарне тачке: $A(1/2, 1, 1)$ и $B(-1/2, -1, -1)$.

Хесеове матрице у стационарним тачкама су

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad H_f(B) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

У тачки A функција f има локални минимум, $f_{\min} = f(A) = 4$ јер је $m_1 = 4$, $m_2 = 8$ и $m_3 = 32$, где су m_1, m_2 и m_3 главни минори матрице $H_f(A)$.

У тачки B функција f има локални максимум, $f_{\max} = f(B) = -4$ јер је $m_1 = -4 < 0$, $m_2 = 8 > 0$ и $m_3 = -32 < 0$, де су m_1, m_2 и m_3 главни минори матрице $H_f(B)$.

46. Како је

$$f'_x = 1 - \frac{y}{x^2}, \quad f'_y = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, \quad f'_z = \frac{1}{y} - \frac{2}{z^2},$$

из система $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, и $f'_z = 0$ следи да је $y = x^2$ и $z = x^3$, односно $x^4 = 2$, па имамо само једну стационарну тачку $A(2^{1/4}, 2^{1/2}, 2^{3/4})$. Налажењем парцијаних извода другог реда добијамо

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x} & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2}{x^3} & -\frac{1}{x^4} \\ 0 & -\frac{1}{x^4} & \frac{4}{x^9} \end{bmatrix}.$$

Обзиром да је

$$m_1 = \frac{2}{x^3}, \quad m_2 = \frac{3}{x^4}, \quad m_3 = \frac{12 - 2x^4}{x^{13}},$$

то је $m_1(A) > 0$, $m_2(A) > 0$ и $m_3(A) > 0$, па је $f_{\min} = f(A)$.

47. $f'_x = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{22 - x - y - z}, \quad f'_y = \dfrac{2}{y} - \dfrac{1}{22 - x - y - z}, \quad f'_z = \dfrac{5}{z} - \dfrac{1}{22 - x - y - z}, \quad x + y + z < 22$

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{y} = \frac{5}{z}, \quad 3y = 2x,\ 3z = 5x,\ y = \frac{2}{3}x,\ z = \frac{5}{3}x, \quad \frac{3}{x} = \frac{1}{22 - x - 2x/3 - 5x/3}, \quad \frac{3}{x} = \frac{3}{66 - 10x},\ x = 6$$

Испуњен је услов $6 + 4 + 10 < 22$, па је $A(6, 4, 10)$ стационарна тачка.

Довољни услови за локални екстремум

$$f''_{x^2} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(22 - x - y - z)^2}, \quad f''_{y^2} = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{(22 - x - y - z)^2}, \quad f''_{z^2} = -\frac{5}{x^2} - \frac{1}{(22 - x - y - z)^2}$$

$$f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = -\frac{1}{(22 - x - y - z)^2}$$

У тачки A је

$$f''_{x^2} = -\frac{1}{3}, \quad f''_{y^2} = -\frac{3}{8}, \quad f''_{z^2} = -\frac{3}{10}, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{4}, \quad f''_{yz} = -\frac{1}{4}, \quad f''_{zx} = -\frac{1}{4}$$

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/8 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -3/10 \end{bmatrix}, \quad m_1 = -\frac{1}{3} < 0,\ m_2 = \frac{1}{16} > 0,\ m_3 = -\frac{11}{1920} > 0$$

Према томе, функција f у тачки A има локални максимум, $f_{\max} = f(A) = 13\ln 2 + 3\ln 3 + 5\ln 5$

48. $f(x,y,z) = (x + y + 2z)e^{-x^2-y^2-z^2} = (x + y + 2z)g(x,y,z)$

$$f'_x = g + (x + y + 2z)g'_x = g - 2x(x + y + 2z)g = (1 - 2x(x + y + 2z))g$$

$$f'_y = g + (x + y + 2z)g'_y = g - 2y(x + y + 2z)g = (1 - 2y(x + y + 2z))g$$

$$f'_z = 2g + (x + y + 2z)g'_z = 2g - 2z(x + y + 2z)g = 2(1 - z(x + y + 2z))g$$

Из услова $f'_x = f'_y = f'_z = 0$ имамо да је

$$1 = 2x(x + y + z), \quad 1 = 2y(x + y + 2z), \quad 1 = z(x + y + 2z),$$

што значи да је $xyz(x+y+2z) \neq 0$ и да је $y = x$ и $z = 2x$. Заменом y са x и z са $2x$ у $f'_z = 0$ добијамо да је $1 = 12x^2$, па је $x = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Према томе, постоје две стационарне тачке: $A\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $B\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Сада треба проверити довољне услове за постојање локалних екстремума у тачкама A и B. Треба најпре одредити парцијалне изводе другог реда.

$$f''_{x^2} = (-4x - 2y - 4z)g - 2x(1 - 2x^2 - 2xy - 4xz)g = (4x^3 + 4x^2y + 8x^2z - 6x - 2y - 4z)g$$

Слично се добија

$$f''_{y^2} = (4y^3 + 4xy^2 + 8y^2z - 2x - 6y - 4z)g, \quad f''_{z^2} = (4z^3 + 2xz^2 + 2yz^2 - x - y - 6z)g,$$

$$f''_{xy} = (4x^2y + 4xy^2 + 8xyz - 2x - 2y)g, \quad f''_{xz} = (4x^2z + 8xz^2 + 4xyz - 4x - 2z)g,$$

$$f''_{yz} = (4y^2z + 8yz^2 + 4xyz - 4x - 2z)g, \quad f''_{yx} = f''_{xz}, \quad f''_{zx} = f''_{xz}, \quad f''_{zy} = f''_{yz}.$$

У тачкама $(x, x, 2x)$ имамо да је

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = 8e^{-6x^2}x(3x^2 - 2), \; f''_{z^2} = 4e^{-6x^2}x(2x^2 - 7), \; f''_{xy} = 4e^{-6x^2}x(6x^2 - 1), \; f''_{xz} = f''_{yz} = 8e^{-6x^2}x(6x^2 - 1)$$

У тачкама A и B је

$$H_f(A) = -\frac{2}{\sqrt{3e}}H, \quad H_f(B) = \frac{2}{\sqrt{3e}}H, \quad H = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Како су главни минори матрице H позитивни ($m_1 = 7$, $m_2 = 48$, $m_3 = 432$), то је $d^2f(A) < 0$ и $d^2f(B) > 0$ за $|dx| + |dy| + |dz| \neq 0$. Према томе, функција f у тачки A има локални максимум, а у тачки B има локални минимум,

$$f_{\max} = f(A) = \sqrt{\frac{3}{e}}, \quad f_{\min} = f(B) = -\sqrt{\frac{3}{e}}.$$

6.3 Условни екстремум функције две променљиве

49. $F = f + \lambda(x + y - 1)$, $F'_x = 2x + \lambda$, $F'_y = 2y + \lambda$, $F''_{x^2} = F''_{y^2} = 2$, $F''_{xy} = 0$

Стационарна тачка је $A(1/2, 1/2)$. Из $d^2F = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$ следи да је $f_{\min} = f(A) = 1/2$.

Други начин. $y = 1 - x$, $f(x, 1 - x)x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = g(x)$, $g_{\min} = g(1/2) = 1/2$

50. $F = f + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, $F'_x = 1 + 2\lambda x$, $F'_y = 2 + 2\lambda y$, $F''_{x^2} = F''_{y^2} = 2\lambda, F''_{xy} = 0$

$$\text{За С.Т. } 2\lambda x = -1, \; \lambda y = -1, \; x = -\frac{1}{2\lambda}, \; y = -\frac{1}{\lambda}, \; x^2 + y^2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 1, \; \lambda^2 = \frac{5}{4}, \; \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

За $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$ имамо стационарну тачку $A\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, а за $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ имамо стационарну тачку $B\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

$$d^2F(A) = \sqrt{5}(dx^2 + dy^2) > 0, \quad d^2F(B) = -\sqrt{5}(dx^2 + dy^2) < 0$$

Према томе, $f_{\min} = f(A) = -\sqrt{5}$ и $f_{\max} = f(B) = \sqrt{5}$.

51. $F = f + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, $F'_x = 2x + y + 2\lambda x$, $F'_y = 2y + x + 2\lambda y$, $F''_{x^2} = 2 + 2\lambda$, $Fyy = 2 + 2\lambda$, $F''_{xy} = 1$

$$\left.\begin{matrix} 2x + y + 2\lambda x = 0 \\ 2y + x + 2\lambda y = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} (2 + 2\lambda)x + y = 0 \\ x + (2 + 2\lambda y) = 0 \end{matrix}\right\}$$

Како $(0, 0)$ није решење овог система (због услова $x^2 + y^2 = 1$), то је

$$\begin{vmatrix} 2 + 2\lambda & 1 \\ 1 & 2 + 2\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad 4(1 + \lambda)^2 = 1, \quad 1 + \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

За $\lambda = -1/2$ је $y = -x$, а стационарне тачке су $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

За $\lambda = -3/2$ је $y = x$, а стационарне тачке су $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

У тачкама A и B је $dy = dx$, па је $d^2F = dx^2 + dy^2 + 2dxdy = (dx+dy)^2 = 4dx^2 > 0$.

У тачкама C и D је $dy = -dx$, па је $d^2F = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy = (dx-dy)^2 = -4dx^2 < 0$.

Према томе, $f_{\min} = f(A) = f(B) = \frac{1}{2}$ и $f_{\max} = f(C) = f(D) = \frac{3}{2}$.

Напомена. Узимањем у обзир датог услова, уместо функције f може да се посматра функција g дата са $g(x,y) = 1+xy$. За $G = g+\lambda(x^2+y^2-1)$, на исти начин као за функцију F, добија се $\lambda = \pm 1/2$. За $\lambda = 1/2$ налазимо стационарне тачке A и B, а за $\lambda = -1/2$ имамо тачке C и D. Довољан услов се такође добија исто као за F.

52. Из датог услова следи да је $y = x$, па је $f(x,y) = f(x,x) = 2x^2 + 2 \geq 2$. Према томе, при датом услову $f_{\min} = f(0,0) = 2$.

Напомена. Ако је $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$, тада је $\varphi'_x(0,0) = \varphi'_y(0,0) = 0$, па не може да се решава помоћу Лагранжове функције $f + \lambda\varphi$.

53. $F = f+\lambda(x+y-2)$, $F'_x = nx^{n-1}+\lambda$, $F'_y = ny6n-1+\lambda$, $F''_{x^2} = n(n-1)x^{n-2}$, $F''_{y^2} = n(n-1)y^{n-2}$, $F''_{xy} = 0$ Стационарна тачка је $A(1,1)$. Како је $d^2f(a) = n(n-1)(dx^2+dy^2) > 0$, функција f у тачки A има условни локални минимум, $f_{\min} = f(A) = 2$

Друго решење. $y = 2-x$, $f(x, 2-x) = x^n + (2-x)^n = g(x)$, $g'(x) = n(x^{n-1} - (2-x)^{n-1})$

Функција g опада за $x < 1$ и расте за $x > 1$, па је $g_{\min} = g(1) = 2$. Према томе, $f_{\min} = f(A) = 2$.

54.

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-2), \quad F'_x = y + 2\lambda x, \quad F'_y = x + 2\lambda y$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\lambda x = -y \\ 2\lambda y = -x \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Пошто је $xy \neq 0$ (у противном $x = y = 0$, што не може због $x^2 + y^2 = 2$), то је $x^2 = y^2$, па је $x^2 = 1$.

За $y = x$ је $\lambda = -1/2$, а за $y = -x$ је $\lambda = 1/2$.

Стационарне тачке су: $A(1,1), B(1,-1), C(-1,1), D(-1,-1)$

Провера довољног услова за ЛУЕ

$F''_{x^2} = 2\lambda$, $F''_{xy} = 1$, $F''_{y^2} = 2\lambda$, $d^2F(x,y) = 2\lambda dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2$

У тачкама A и D је

$$d^2F(A) = d^2F(D) = -dx^2 + 2dxdy - dy^2 = -(dx-dy)^2 \leq 0$$

из чега се не може закључити о ЛЕ. Али из $x^2+y^2 = 2$ следи $2xdx+2ydy = 0$, $dx+dy = 0$, $dy = -dx \neq 0$, па је $d^2F(A) = d^2F(D) = -4dx^2 < 0$. Дакле, функција f при услову $\varphi = 0$ у A и D има локални условни максимум.

У тачкама B и C је

$$d^2F(B) = d^2F(C) = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = (dx+dy)^2 \geq 0$$

из чега се не може закључити о ЛЕ. Али из $x^2+y^2 = 2$ следи $2xdx+2ydy = 0$, $dx-dy = 0$, $dy = dx \neq 0$, па је $d^2F(B) = d^2F(C) = 4dx^2 > 0$. Дакле, функција f при услову $\varphi = 0$ у B и C има локални условни минимум.

Друго решење. Услов $x^2 + y^2 = 2$ можемо да параметризујемо са $x = \sqrt{2}\sin t$, $y = \sqrt{2}\cos t$, где је $t \in [0.2\pi]$. Тада је

$$f(x,y) = 2\sin t\cos t = \sin 2t = g(t), \quad g'(t) - 2\cos 2t, \quad g'(t) = 0 \text{ за } 2t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$$

$(0 < t \leq 2\pi \ \Rightarrow\ 0 < 2t < 4\pi)$

$$t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}, \quad g_{\max} = g(\pi/4) = g(5\pi/4) = 1, \quad g_{\min} = g(3\pi/4) = g(7\pi/4) = -1$$

Према томе, $f_{\max} = f(A) = f(D) = 1, \quad f_{\min} = f(B) = f(C) = -1.$

55. Из услова имамо да је $y = 1-x$, па је $f(x,y) = e^{x-x^2} = g(x), \quad g'(x) = (1-2x)g(x), \quad$ С.Т. $x = 1/2$.

Како је $g'(x) > 0$ за $x < 1/2$ и $g' < 0$ за $x > 1/2$, то функција g у тачки $x = 1/2$ има максимум. Према томе, функција f има условни локални максимум у тачки $A(1/2, 1/2)$, $f_{\max|x+y=1} = f(A) = e^{1/4}$.

Друго решење. За Лагранжову функције $F = f + \lambda(x+y-1)$ је

$$F'_x = ye^{xy} + \lambda, \quad F'_y = xe^{xy} + \lambda, \quad F''_{x^2} = y^2e^{xy}, \quad F''_{y^2} = x^2e^{xy}, \quad F''_{xy} = (xy+1)e^{xy}$$

С.Т. је $A(1/2, 1/)$, $\quad a = F''_{x^2}(A) = e^{1/4}/4,\ b = F''_{xy}(A) = 5e^{1/4}/4,\ c = F''_{y^2}(A) = e^{1/4}/4$

Пошто је $ac - b^2 = -3e^{1/4}/2$, функција f нема у тачки A безусловни локални екстремум. Мађутим, за дати услов је $dy = -dx$, па је

$$d^2F(A) = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2 = (2a-2b)dx^2 = -2e^{1/4}dx^2 < 0$$

за $dx \neq 0$, што значи да је тачки A условни локални максимум.

56. $F = f + \lambda(x+y-2), \quad F'_x = -\dfrac{1}{x^2} + \lambda, \quad F'_y = -\dfrac{1}{y^2} + \lambda, \quad F''_{x^2} = \dfrac{2}{x^3},\ F''_{y^2} = \dfrac{2}{y^3},\ F''_{xy} = 0$

Из система $F'_x = F'_y = 0$ следи $x = y$, а онда из услова $x + y = 2$ следи да је $x = 1$. Стационарна тачка је $A(1,1)$.

Како је $d^2F(A) = 2(dx^2 + dy^2) > 0$, функција f у тачки A има локални условни минимум, при чему је $f_{\min} = f(1,1) = 2$.

Друго решење. Из услова имамо да је $y = 2 - x$, па је $f(x, 2-x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2-x} = g(x)$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{-(2-x)^2 + x^2}{x^2(2-x)^2} = \frac{4x-4}{x^2(2-x)^2}.$$

Функција g опада за $x < 1$ и расте за $x > 1$. Из $g_{min} = g(1)$ следи да је $f_{min} = f(1,1) = f(A) = 2$.

57. $F(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \lambda\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1\right), \quad F'_x = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\lambda}{x^3}, \quad F'_y = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{2\lambda}{y^3}$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2\lambda = 0 \\ y + 2\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x = y,\ \frac{2}{x^2} = 1,\ x^2 = 2,\ x = \pm\sqrt{2}$$

<u>С.Т.</u> $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ са $2\lambda_A = -\sqrt{2}$, $\quad B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ са $2\lambda_B = \sqrt{2}$

<u>Довољни услови</u>

$F''_{x^2} = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{6\lambda}{x^4}, \quad F''_{y^2} = \dfrac{2}{y^3} + \dfrac{6\lambda}{y^4}, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{x^2}(A) = F''_{y^2}(A) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \quad F''_{x^2}(B) = F''_{y^2}(B) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$$d^2F(A) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(dx^2 + dy^2) < 0, \quad d^2F(B) = \frac{\sqrt{2}}{4}(dx^2 + dy^2) > 0$$

У тачки A је условни локални максимум, а у тачки B условни локални минимум.

6.4 Условни екстремум функције три променљиве

58. $F = f + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 2), \quad F'_x = 1 + 2\lambda x, \quad F'_y = -1 + 2\lambda y, \quad F'_z = 2 + 4\lambda z$

Из $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ следи да је $\lambda(x+y) = 0$ и $\lambda(y+z) = 0$. Како је $\lambda \neq 0$ (следи из $F'_x = 0$), то значи да је $z = -y = x$. Сада из датог услова $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ имамо да је $4x^2 = 2$, односно $x = \pm 1/\sqrt{2}$. За $x = 1/\sqrt{2}$ добијамо стационарну тачку $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ са $\lambda_A = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а за $x = -1/\sqrt{2}$ добијамо стационарну тачку $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ са $\lambda_B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>Довољни услови</u>

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = 2\lambda, \quad F''_{z^2} = 4\lambda, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0, \quad d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + 2dz^2)$$

У тачки A је $d^2F(A) < 0$, а у тачки B је $d^2F(B) > 0$, па је при датом услову

$$f_{\max} = f(A) = 2\sqrt{2}, \quad f_{\min} = f(B) = -2\sqrt{2}.$$

59.

$$F(x,y,z,\lambda) = 2x + y - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 36), \quad F'_x = 2 + 2\lambda x,\ F'_y = 1 + 2\lambda y,\ F'_z = -2 + 2\lambda z$$

Из система

$$1 + \lambda x = 0, \quad 1 + 2\lambda y = 0, \quad -1 + \lambda z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

следи

$$\lambda \neq 0,\ \lambda x = -\lambda z,\ x = -z,\ z = -2y,\ 4y^2 + y^2 + 4y^2 = 36,\ y^2 = 4,\ y = \pm 2$$

СТ: $A(4,2,-4)$ са $\lambda = -1/4$ и $B(-4,-2,4)$ са $\lambda = 1/4$

Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2\lambda,\ F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0$$

$$d^2F(A) = -\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0, \quad \max$$

$$d^2F(B) = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0, \quad \min$$

Дакле, функција f при $\varphi = 0$ у тачки A има локални условни максимум, а у тачки B има локални условни минимум.

60. За Лагранжову функцију F, где је

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$$

имамо да је

$$F'_x = 3x^2 - \frac{\lambda}{x^2}, \quad F'_y = 3y^2 - \frac{\lambda}{y^2}, \quad F'_z = 3z^2 - \frac{\lambda}{z^2}.$$

Из једнакости $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ следи да је $x^4 = y^4 = z^4$ и $\lambda = 3x^4$. То значи да је у стационарним тачкама $x^2 = y^2 = z^2$, односно $x = \pm y = \pm z$. Узимајући у обзир дати услов, добијамо четири стационарне тачке: $A(3,3,3)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,-1,1)$ и $D(-1,1,1)$.

Пошто је

$$F''_{x^2} = 6x + \frac{2\lambda}{x^3},\ F''_{y^2} = 6y + \frac{2\lambda}{y^3},\ F''_{z^2} = 6z + \frac{2\lambda}{z^3},\ F''_{xy} = 0,\ F''_{xz} = 0,\ F''_{yz} = 0,$$

то је $d^2F(A) = 36(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$ за $|dx| + |dy| + |dz| \neq 0$.

Дакле, функција f у тачки A има условни локални минимум, $f_{\min} = f(A) = 81$.

У тачки B је $\lambda = 3$ и $dz = -(dx + dy)$, па је

$$d^2F(B) = 12(dx^2 + dy^2 - dz^2) = -24dxdy.$$

Како је $d^2F(B)$ променљивог знака, функција f у тачки B нема условни локални екстремум. Слично се показује да ни у тачкама C и D није условни локални екстремум.

61. $F(x,y,z,\lambda) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 1), \quad F'_x = 6x + \lambda, \quad F'_y = 6y + \lambda, \quad F'_z = 2z + \lambda$ Из система

$$6x + \lambda = 0, \quad 6y + \lambda = 0, \quad 2z + \lambda = 0, \quad x + y + z = 1$$

следи

$$\lambda \neq 0, \quad y = x, \quad z = 3x, \quad x + x + 3x = 1, \quad x = 1/5$$

СТ: $A(1/5, 1/5, 3/5),\ \lambda = -6/5$

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = 6,\ F''_{z^2} = 2,\ F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0,\ d^2F(A) = 6dx^2 + 6dy^2 + 2dz^2 > 0$$

$$f_{\min} = f(A) = 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 9 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{15}{5^2} = \frac{3}{5}$$

62.

$$F(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 4)$$

$$F'_x + y + 2z + \lambda yz, \; F'_y = x + 2z + \lambda xz, \quad F'_z = 2x + 2y + \lambda xy$$

Систем за СТ

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy + 2zx + 4\lambda = 0 \\ xy + 2zy + 4\lambda = 0 \\ 2xz + 2yz + 4\lambda = 0 \\ xyz = 4 \end{cases}$$

Из прве две једнакост је $y = x$, а из друге и треће једнакости је $y = 2z$. Из четврте једнакости следи $z = 1$.

СТ: $A(2, 2, 1)$ са $\lambda = -2$ и $B(-2, -2, 1)$ са $\lambda = 2$

Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 0, \quad F''_{xy} = 1 + \lambda z, \; F''_{xz} = 2 + \lambda y, \; F''_{yz} = 2 + \lambda x$$

У тачки A је

$$yzdx + zxdy + xydz = 0, \quad 2dx + 2dy + 4dz = 0, \quad 2dz = -dx - dy = -(dx + dy)$$

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= 2((1-2)dxdy + (2-4)dxdz + (2-4)dydz) \\ &= 2(-dxdy - 2dxdz - 2dydz) \\ &= 2(-dxdy - 2z(dx + dy)) \\ &= 2(-dxdy + (dx + dy)^2) \\ &= dx^2 + dy^2 + (dx + dy)^2 > 0 \end{aligned}$$

за $dx^2 + dy^2 \neq 0$.

Функција f при услову $xyz = 4$ има у тачки A локални условни минимум

У тачки B је $F''_{xy} = 3, \; F''_{yz} = F''_{xz} = -2, \quad 2dz = dx + dy$, па је

$$d^2F(B) = 6dxdy - 4dz(dx + dy) = -dx^2 - dy^2 - (dx + dy)^2 < 0$$

Функција f при услову $xyz = 4$ има у тачки B локални условни максимум

63.

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right) = f + \lambda\varphi$$

$$F'_x = 1 - \frac{\lambda}{x^2}, \quad F'_y = 1 - \frac{\lambda}{y^2}, \quad F'_z = 1 - \frac{\lambda}{z^2}$$

Из $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ следи $x^2 = y^2 = z^2$.

За $x = y = z$ из $\varphi = 0$ добија се $x = 3$. Стационарна тачка је $A(3, 3, 3)$ са $\lambda = 9$.

За $x = y = -z$ из $\varphi = 0$ добија се $x = 1$. Стационарна тачка је $B(1, 1, -1)$ са $\lambda = 1$.

За $x = z = -y$ добија се стационарна тачка $C(1, -1, 1)$, а за $x = -y = -z$ добија се стационарна тачка $D(-1, 1, 1)$.

Провера довољног услова за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = \frac{2\lambda}{x^3}, \; F''_{y^2} = \frac{2\lambda}{y^3}, \; F''_{z^2} = \frac{2\lambda}{z^3}, \; F''_{xy} = F''_{xz} = F''_{yz} = 0$$

У тачки A је $d^2F(A) = \dfrac{2}{3}(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$, па функција f у тачки A има локални условни минимум, $f_{\min} = F(A) = 9$.

У тачки B је $d^2F(B) = 2(dx^2 + dy^2 - dz^2)$. Из услова $\varphi = 0$ следи $\dfrac{dx}{x^2} + \dfrac{dy}{y^2} + \dfrac{dz}{z^2} = 0$, што за тачку B даје $dz = -dx - dy$, односно $dz^2 = dx^2 + dy^2 + 2dxdy$. Заменом у d^2F добијамо

$$d^2F(B) = -4dxdy \begin{cases} < 0, & dy = dx \neq 0 \\ > 0, & dy = -dx \neq 0 \end{cases}$$

Према томе, у тачки B није локални условни екстремум.

Слично се показује да и у тачкама C и D није локални условни екстремум.

64. Функције f и $g = \ln f$ имају локалне екстремуме у истим тачкама.

$$g = \ln(xy^2z^3) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z, \quad F = g + \lambda(x + 2y + 3z - 12)$$

$$F'_x = \frac{1}{x} + \lambda, \quad F'_y = \frac{2}{y} + 2\lambda, \quad F'_z = \frac{3}{z} + 3\lambda$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = -\lambda, \quad x = y = z, \quad x + 2x + 3x = 12, \quad x = 2$$

Стационарна тачка је $A(2,2,2)$

$$d^2F = -\frac{1}{x^2}dx^2 - \frac{1}{y^2}dy^2 - \frac{1}{z^2}dz^2 = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0$$

Функција f у тачки A има условни локални максимим, $f_{\max} = f(A) = 2^6$.

Друго решење. Ако се користи Лагранжова функција са функцијом f, онда је

$$F = f + \lambda(x + 2y + 3z - 12), \quad F'_x = y^2z^3 + \lambda, \quad F'_y = 2xyz^3 + 2\lambda, \quad F'_z = 3xy^2z^2 + 3\lambda.$$

Из услова $F'_x = F'_y =$ следи $y^2z^3 = xyz^3$, а због $x, y, z > 0$ то значи да је $y = x$. Слични из услова $F'_y = Fz$ следи да је $y = x$. Сада из $F'_x = 0$ добијамо стационарну тачку $A(2,2,2)$.

Дакле, до стационарне тачке се лако долази (као и у првом решењу), али провера довољних услова је знатно дужа него у првом решењу. Најпре налазимо

$$F''_{x^2} = 0, \quad F''_{y^2} = 2xz^3, \quad F''_{z^2} = 6xy^2z, \quad F''_{xy} = 2yz^3, \quad F''_{yz} = 6xyz^2, \quad F''_{xz} = 3y^2z^2,$$

а затим добијамо да је у тачки A

$$d^2F(A) = 2^5(dy^2 + 3dz^2 + 2dxdy + 6dydz + 3dzdx).$$

Како је из датог услова $dx = -(2dy + 3dz)$, то је

$$2dxdy + 3dzdx = dx(2dy + 3dz) = -(2dy + 3dz)^2 = -4dy^2 - 9dz^2 - 12dydz,$$

па је

$$d^2F(A) = 2^5(-3dy^2 - 6dz^2 - 6dydz) = -3 \cdot 2^5(dz^2 + (dy + dz)^2) > 0$$

за $dz^2 + dz^2 \neq 0$. Према томе, у тачки A је условни локални максимум функције f.

Напомена. При услову $x + 2y + 3z = a > 0$ функција има условни локални максимум у тачки $(a/6, a/6, a/6)$.

65.

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

$$F'_x = yz + 2\lambda x, \quad F'_y = xz + 2\lambda y, \quad F'_z = xy + 2\lambda z$$

<u>Систем за СТ</u>

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0 \\ xz + 2\lambda y = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} xyz + 2\lambda x^2 = 0 \\ yxz + 2\lambda y^2 = 0 \\ zxy + 2\lambda z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Следи $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ што даје 8 СТ

За $\lambda = -1/2$ СТ: $A(1,1,1),\ C(1,-1,-1),\ D(-1,1,-1),\ E(-1,-1,1)$

За $\lambda = 1/2$ СТ: $B(-1,-1,-1),\ P(-1,1,1),\ Q(1,-1,1),\ R(1,1,-1)$

Довољни услови

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = z,\ F''_{xz} = y,\ F''_{yz} = x$$

$$d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$$

У тачки A је $dx + dy + dz = 0$, па је

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2dxdy + 2dxdz + 2dydz \\ &= -(dx-dy)^2 - dz^2 + 2(dx+dy)dz \\ &= -(dx-dy)^2 - dz^2 - 2(dx+dy)^2 < 0 \end{aligned}$$

Функција f у тачки A има локални условни максимум, $f_{\max} = f(A) = 1$.

У тачки C је $dx = dy + dz = 0$, па је

$$\begin{aligned} d^2F(C) &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz \\ &= -(dx-dy)^2 - dz^2 - 2(dy+dz)^2 < 0 \end{aligned}$$

Функција f у тачки C има локални условни максимум, $f_{\max} = f(A) = 1$.

Слично важи и тачкама D и E.

У тачки B је $dx + dy + dz = 0$, па је

$$\begin{aligned} d^2F(B) &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz \\ &= (dx-dy)^2 + dz^2 + 2(dx+dy)^2 > 0 \end{aligned}$$

Функција f у тачки B има локални условни минимум, $f_{\min} = f(B) = -1$.

Слично важи и тачкама P, Q и R.

66. За Лагранжову функцију

$$F(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z + \lambda\left(x + y + z - \frac{\pi}{2}\right)$$

имамо

$$F'_x = \cos x \sin y \sin z + \lambda, \quad F'_y = \sin x \cos y \sin z + \lambda, \quad F'_z = \sin x \sin y \cos z + \lambda.$$

Систем за стационарне тачке је

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin z + \lambda &= 0 \\ \sin x \cos y \sin z + \lambda &= 0 \\ \sin x \sin y \cos z + \lambda &= 0 \\ x + y + z &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Из прве две једначине следи да је

$$\sin z(-\cos x \sin y + \sin x \cos y) = \sin z \cdot \sin(x - y).$$

Како је $x, y, z > 0$ и $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, то је $x = y$. Слично добијамо и $x = z$, па имамо само једну стационарну тачку $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ за коју је $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Пошто је

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = -\sin x \sin y \sin z,$$

$$F''_{xy} = \cos x \cos y \sin z, \quad F''_{xz} = \cos x \sin y \cos z, \quad F'_z = \sin x \cos y \cos z$$

и $dz = -dx - dy$ (следи из $x + y + z = \pi/2$), то је

$$d^2F(A) = -\frac{1}{8}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{3}{4}(dxdy + dxdz + dydz) = -\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + (dx + dy)^2),$$

па функција f у тачки A има условни локални максимум, $f_{\max} = f(A) = \frac{1}{8}$.

Друго решење. Уместо функције f можемо разматрати функцију $g = \ln f$, јер због монотоности функције ln, функције f и g у истим тачкама имаку локалне екстремуме.

$$g(x, y, z) = \ln\sin x + \ln\sin y + \ln\sin z, \quad G = g + \lambda(x + y + z - \pi/2)$$

$$G'_x = \cot x + \lambda, \quad G'_y = \cot y + \lambda, \quad G'_z = \cot z + \lambda$$

$$\cot x = \cot y = \cot z, \quad x + y + z = \frac{\pi}{2}, \quad x = y = z = \frac{\pi}{6}$$

$$G''_{x^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad G''_{y^2} = -\frac{1}{\sin^2 y}, \quad G''_{z^2} = -\frac{1}{\sin^2 z}, \quad G''_{xy} = G''_{yz} = G''_{zx} = 0$$

$$d^2G = -\left(\frac{1}{\sin^2 x}dx^2 + \frac{1}{\sin^2 y}dy^2 + \frac{1}{\sin^2 z}dz^2\right) < 0$$

Према томе, функције g и f у тачки A имају условни локални максимум.

67. За Лагранжову функцију $F = f + \lambda(x + y + z - \pi)$ имамо да је

$$F'_x = -\sin x\cos y\cos z + \lambda, \quad F'_y = -\sin y\cos x\cos z + \lambda, \quad F'_z = -\sin z\cos x\cos y + \lambda.$$

Из услова $F'_x = F'_y$ следи једнакост $\sin x\cos y\cos z = \sin y\cos x\cos z$. Ако је $\cos z \neq 0$, из ове једнакости следи да је $\sin x\cos y - \sin y\cos x = 0$, односно $\sin(x - y) = 0$. Уз услов $x + y + z = \pi$, то значи да је $x - y = 0$, односно $y = x$.

Слично, из услова $F'_y = F'_z$, уз претпоставку да је $\cos x \neq 0$, закључујемо да је $z = y$. Сада из датог услова $x + y + z = \pi$ добијамо стационарну тачку $A(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$.

Да ли је у тачки A локални екстремум функције f? Из једнакости

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = -\cos x\cos y\cos z, \quad F''_{xy} = \sin x\sin y\cos z, \quad F''_{yz} = \sin y\cos x\sin z, \quad F''_{xz} = \sin x\cos y\sin z$$

налазимо да је

$$d^2F(A) = -\frac{1}{8}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{3}{4}(dxdy + dydz + dzdx).$$

Како је из датог услова $dz = -(dx + dy)$, то је $dydz + dzdx = -(dx + dy)^2$, па је

$$d^2F(A) = -\frac{1}{8}dz^2 - \frac{1}{8}(7dx^2 + 7dy^2 + 6dxdy) < 0$$

(јер је квадратна форма $7dx^2 + 7dy^2 + 6dxdy$ позитивно дефинитна). Према томе, функција f у тачки A има локални максимум, $f_{\max} = f(A) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

У случају да је $\cos z = 0$ или $\cos x = 0$, добијамо стационарне тачке $B(0, \pi/2, \pi/2)$, $C(\pi/2, 0, \pi/2)$ и $D(\pi/2, \pi, 0)$. У овим тачкама вредност функције је једнака нули, а за различите прираштаје dx, dy и dz (такве да је $dx + dy + dz = 0$) имамо вредности функције које су различитог знака. Према томе, у тачкама B, C и D нису локални екстремуми функције f.

68. Дати услови могу да се параметризују са $y = \cos t$, $z = \sin t$ и $x = 2 - \sin t$ за $t \in [0, 2\pi)$. Тада је $f(x, y, z) = \sin^2 t - 4\sin t + 5$. Како је $g'(t) = \cos t(2\sin t - 4)$, то је $g'(t) = 0$ за $t = \pi/2$ и за $t = 3\pi/2$, при чему је $g_{\min} = g(\pi/2) = 2$ и $g_{\max} = g(3\pi/2) = 8$.

За $t = \pi/2$ имамо тачку $A(1, 0, 1)$, а за $t = 3\pi/2$ имамо тачку $B(3, 0, -1)$. Према томе, при датим условима $f_{\min} = f(A) = 2$ и $f_{\max} = f(B) = 8$.

Друго решење. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha(x + z - 2) + \beta(y^2 + z^2 - 1)$

$$F'_x = 2x + \alpha, \quad F'_y = 2y + 2y\beta, \quad F'_z = 2z + \alpha + 2z\beta$$

С.Т. $A(1, 0, 1)$ са $\alpha = -2$ и $\beta = 0$, $\quad B(3, 0, -1)$ са $\alpha = -6$ и $\beta = -4$

$$F''_{x^2} = 2, \quad F''_{y^2} = 2 + 2\beta, \quad F''_{z^2} = 2 + 2\beta, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0$$

$$d^2F(A) = 2dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0, \quad d^2F(B) = 2dx^2 - 6dy^2 - 6dz^2 = -6dy^2 - 4dz^2 < 0$$

Према томе, у тачки A је условни локални минимум, а у тачки B је условни локални максимум.

Напомена. Узимајући у обзир услов $y^2 + z^2 = 1$, имамо да је $f(x, y, z) = x^2 + 1$. Минимум ове функције се достиже за $x = 0$, али тачка са координатом $x = 0$ не испуњава дате услове.

Ако формирамо Лагранжову функцију са првим условом (други смо већ узели у обзир), добијамо

$$G = x^2 + 1 + \lambda(x + z),\ G'_x = 2x + \lambda,\ G'_z = \lambda, G'_x = G'_z = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 0,\ x = 0.$$

Дакле, опет не можемо добити тачку која испуњава дате услове! Зашто?

Међутим, ако је $H = f + \lambda_1(x + z - 2) + \lambda_2(y^2 + z^2 - 1)$, онда је

$$H'_x = 2x + \lambda_1, \quad H'_y = 2\lambda_2 y, \quad H'_z = \lambda_1 + 2\lambda_2 z,$$

па из услова $H'_x = H'_y = H'_z = 0$ и датих услова добијамо стационарне тачке A и B.

69.

$$F(x, y, z; \alpha, \beta) = xyz + \alpha(x + y + z) + \beta(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$F'_x = yz + \alpha + 2\beta x, \quad F'_y = xz + \alpha + 2\beta y, \quad F'_z = xy + \alpha + 2\beta z$$

Из $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$ следи $(y - x)(z - 2\beta) = 0$.

1. $\underline{y = x}$

$$2x + z = 5,\ 2x^2 + z^2 = 1, \quad 2x^2 + 4x^2 = 1, \quad 6x^2 = 1\ x = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ или } x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Стационарне тачке: $A\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $P\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

2. $\underline{y \neq x,\ 2\beta = -z}$

Из $F'_x = 0$ и $F'_z = 0$ следи $(y - z)(z - x) = 0$

Слично као у 1. за $x = z$ добијамо стационарне тачке

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{и} \quad Q\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

а за $y = z$ стационарне тачке

$$C\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{и} \quad R\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

<u>Довољни услови</u>

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2\beta, \quad F''_{xy} = z, \quad F''_{xz} = y, \quad F''_{yz} = x$$

$$d^2F = 2\beta(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$$

Из једнакости $x + y + z = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ следи да је

$$xdx + ydy + zdz = 0, \quad dx + dy + dz = 0$$

Како је $x = y = 2\beta$ и $z = -4\beta$ у тачкама A и P, то је у тим тачкама $dy = -dx$ и $dz = 0$.

У тачки A је $\beta = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ и $d^2F = 12\beta dx^2 > 0$ за $dx \neq 0$, а у тачки P је $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$ и $d^2F = 12\beta dx^2 < 0$ за $dx \neq 0$.

Слично се добија да је у тачкама B и C исто као у тачки A, а у тачкама Q и R исто као у тачки P.

$$f_{\min} = f(A) = f(B) = f(C) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}, \quad f_{\max} = f(P) = f(Q) = f(R) = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

70. За Лагранжову функцију F, где је

$$f(x, y, z) = xy + yz + \alpha(x^2 + y^2 - 2) + \beta(y + z - 2),$$

имамо да је

$$F'_x = y + 2\alpha x, \quad F'_y = x + z + 2\alpha y + \beta, \quad F'_z = y = \beta.$$

Из система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$, $y + z = 2$, $x_2 + y^2 = 2$ налазимо само једну стационарну тачку $A(1, 1, 1)$, при чему је $\alpha = -1/2$ и $\beta = -1$ (из $F'_x = -$ је $\alpha = -y/2x$, из $F'_z = 0$ је $\beta = -y$ а из $y + z = 2$ је $z = 2 - y$, па заменом ових израза у $F'_y = 0$ и коришћењем услова $x^2 + y^2 = 2$, добијамо једнакост $(1 - y)(1 + y + x) = 0$ из које следи да је $x = 1$).

Сада треба проверити да ли је у тачки A локални екстремум функције F. Налажењем парцијалних извода другог реда у тачки A добијамо да је

$$d^2F(A) = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz,$$

а из датих услова имамо да у тачки A важи $dy + dz = 0$ и $dx + dy = 0$. Узимањем у обзир да је $dy = -dx = -dz$, добијамо да је

$$d^2F(A) = -dx^2 - 3dy^2 - 2dz^2 = -6dx^2 < 0$$

за $dx \neq 0$. Према томе, функција F у тачки A има локални максимум, што значи да и функција f у тачки A има условни локални максимум при датим условима.

71.

$$F(x, y, z'\alpha, \beta) = xyz + \alpha(x + y + z - 5) + \beta(xy + yz + zx - 8)$$

$$F'_x = yz + \alpha + \beta(y + z), \quad F'_y = xz + \alpha + \beta(z + x), \quad F'_z = xy + \alpha + \beta(x + y)$$

Из $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$ следи $(y - x)(z + \beta) = 0$.

1. $\underline{y = x}$

$$2x + z = 5, \; x^2 + 2xz = 8, \quad 3x^2 - 10x + 8 = 0, \quad x = 2 \text{ или } x = 4/3$$

Стационарне тачке: $A(2, 2, 1)$, $B(4/3, 4/3, 7/3)$

2. $\underline{y \neq x, \; \beta = -z}$

Из $F'_x = 0$ и $F'_z = 0$ следи $(y - z)(z - x) = 0$

Слично као у 1. за $x = z$ добијамо стационарне тачке $C(2, 1, 2)$ и $D(4/3, 7/3, 4/3)$, а за $y = z$ стационарне тачке $G(1, 2, 2)$ и $H(7/3, 4/3, 4/3)$.

<u>Довољни услови</u>

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 0, \quad F''_{xy} = z + \beta, \quad F''_{xz} = y + \beta, \quad F''_{yz} = x + \beta$$

У тачки A је $\beta = -2$, а из једнакости $x + y + z = 5$ и $xy + yz + zx = 8$ следи да је $dy = -dx$ и $dz = 0$, па је $d^2F(A) = 2F''_{xy}dxdy = 2dx^2 > 0$ за $dx \neq 0$.

Слично се добија

$$d^2F(C) = d^2F(G) = 2dx^2, \quad d^2F(B) = d^2F(D) = d^2F(H) = -2dx^2 < 0$$

$$f_{\min} = f(A) = f(C) = f(G) = 4, \quad f_{\max} = f(B) = f(D) = f(H) = \frac{112}{27}$$

Напомена. При датим условима x, y и z су нуле полинома $t^3 - 5t^2 + 8t - f$ (Виетова правила). Једначина $g(t) = f$, где је $g(t) = t^3 - 5t^2 + 8t$, има три решења ако и само ако је $g_{\min} \leq f \leq g_{\max}$. Како је $g'(t) = 3t^2 - 10t + 8 = 3(t - 2)(t - 4/3)$, то је

$$g_{\min} = g(2) = 4, \quad g_{\max} = g(4/3) = \frac{112}{27}.$$

Према томе, $4 \leq f \leq 112/27$, па је при датим условима $f_{\min} = 4$ и $f_{\max} = 112/27$.

72. Из услова следи да је $x + y + z = z^2 - y^2$, па је $f = x^2 - y^2$, а за ову функцију тачка $(0, 0)$ је седласта тачка.

74. Нека је (x, y, z) тачка равни $3x - 2z = 0$ и нека је $f(x, y, z)$ збир квадрата растојања те тачке од датих двеју тачака. Тада је

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2,$$

а тражена тачка M је тачка у којој функција f има најмању вредност при услову $3x - 2z = 0$.

$$F = f + \lambda(3x - 2z), \quad F'_x = 2(x-1) + 2(x-2) + 3\lambda = 4x - 6 + 3\lambda, \quad F'_y = 4y - 8, \quad F'_z = 4z - 10 - 2\lambda$$

Из система $F'_x = F'_y = F'_z = 3x - 2z = 0$ добијамо стационарну тачку $M(21/13, 2, 63/26)$.

У тачки M функција F (а тиме и функција f при услову $3x - 2z = 0$) има локални минимум јер је

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 4, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0, \quad d^2F = 4(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Како је функција F диференцијабилна у $\mathbb{R}^3$ и нема других стационарних тачака, у тачки M је и апсолутни минимум функције f при услову $3x - 2z = 0$.

Напомена. Из геометријског значења функције f јасно је да је у тачки M минимум (а не максимум) функције f.

76. Ако су x, y и z тражени сабирци, треба одредити најмању вредност функције $f(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ при услову $x + y + z = a > 0$.

$$F = f + \lambda(x + y + z - a), \quad F'_x = 2x + \lambda, \quad F'_y = 2y + \lambda, \quad F'_z = 2z + \lambda$$

За С.Т. $F'_x = F'_y = 0 \Rightarrow x = y = z, \quad x + y + z = a \Rightarrow x = \dfrac{a}{3}$

Јединa стационарна тачка је $A(a/3, a/3, a/3)$. Како је

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0, \quad d^2F = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0,$$

функција f у тачки A има локални минимум. Поред тога, функција F је диференцијабилна у $\mathbb{R}^2$, а нема других стационарних тачака. То значи да је у тачки A заправо и глобални (апсолутни) минимум.

Према томе, тражени сабирци су међусобно једнаки.

78. Ако су x, y и z тражени чиниоци, онда треба одредити минимум функције $f : (x, y, z) \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ при услову $xyz = a > 0$.

$$F = f + \lambda xyz, \quad F'_x = -\frac{1}{x^2} + \lambda yz, \quad F'_y = -\frac{1}{y^2} + \lambda xy, \quad F'_y = -\frac{1}{z^2} + \lambda xy$$

$$F'_x = F'_y = F'_z = 0 \Rightarrow \lambda\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \lambda xyz, \quad xyz = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$$

Јединa стационарна тачка функције F је тачка $A(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$. Да ли је у тачки A и најмања вредност функције f при услову $xyz = a$? На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо да је

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a}}.$$

Како је $f(A) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{a}}$, то је у тачки A заиста најмања вредност функције f при услову $xyz = a$.

Према томе, тражени фактори су међусобно једнаки.

Напомена. На основу знака за $d^2F(A)$ можемо утврдити да је у тачки A локлани условни минимум. Најпре имамо да је

$$F''_{x^2} = \frac{2}{x^3}, \; F''_{y^2} = \frac{2}{y^3}, \; F''_{z^2} = \frac{2}{z^3}, \; F''_{xy} = \lambda x, \; F''_{yz} = \lambda x, \; F''_{xz} = \lambda y, \; \lambda x = \lambda y = \lambda z = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{a},$$

па је

$$d^2F(A) = \frac{2}{a}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dxdy + dydz + dzdx\right).$$

Међутим, из услова $xyz = a$ имамо да у тачки A важи $dxdy + dydz + dzdx = 0$, што значи да је $d^2F(A) = \dfrac{2}{a}(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$.

Према томе, функција f у тачки A има локални условни минимум. Како је функција F диференцијабилна у свим тачкама за које је $xyz \neq 0$ и нема других стационарних тачака, следи да је у тачки A и апсолутни минимум функције f при услову $xyz = a$.

6.5 Најмања и највећа вредност функције две променљиве

80. Функција f нема стационарних тачака. На граници области $\mathcal{D}$ имамо условни екстремум при услову $x^2+y^2=1$. Ако је $F=f+\lambda(x^2+y^2-1)$ тада је $F'_x=1+2\lambda x$ и $F'_y=1+2\lambda y$. Из услова $F'_x=F'_y$ следи да је $y=x$, а онда из услова $x^2+y^2=1$ следи да је $x^2=1/2$, односно $x=\pm 1/\sqrt{2}$. То значи да функција F има стационарне тачке $A(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ и $B(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$.

Како имамо само две потенцијалне тачке екстремума, у једној од њих функција f има на области $\mathcal{D}$ максимум, а у другој минимум,

$$\max_{\mathcal{D}} f=f(A)=\sqrt{2},\quad \min_{\mathcal{D}} f=f(B)=-\sqrt{2}.$$

81. Локални екстремуми у унутрашњости области $\mathcal{D}$

$f'_x=2x,\ f'_y=-2y,$ С.Т. $\boxed{A(0,0)}$

На граници области

$$F=f+\lambda(x^2+y^2-2),\quad F'_x=2x+2\lambda x,\quad F'_y=-2y+2\lambda y$$

Из система

$$x+\lambda x=0,\quad -y+\lambda y=0,\quad x^2+y^2=4$$

односно

$$x(1+\lambda)=0,\quad y(\lambda-1)=0,\quad x^2+y^2=4$$

добијамо

1. $x=0,\ \lambda=1,\ y^2=4,\ y=\pm2,$ С.Т. $\boxed{B(0,2)}$, $\boxed{C(0,-2)}$
2. $1+\lambda=0,\ y=0,\ x^2=4,\ x=\pm2,$ С.Т. $\boxed{D(2,0)}$, $\boxed{E(-2,0)}$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E
$f(X)$	0	-4	-4	4	4

$\max_{\mathcal{D}} f=f(D)=f(E)=4,\quad \min_{\mathcal{D}} f=f(B)=f(C)=-4$

82. Област $\mathcal{D}$ је квадрат с теменима $M(0,-1)$, $N(1,0)$, $P(0,1)$ и $Q(-1,0)$. Стационарна тачка $A(1/8,-1/8)$ функције f припада области $\mathcal{D}$.

На дужи PQ је $f(x,x+1)=(x+1)^2+2x(x+1)-3x^2+x=5x+1$, а на дужи MN је $f(x,x-1)=-3x+1$, па у унутрашњим тачкама ових дужи функција нема екстремума.

На дужи NP је $f(x,1-x)=-4x^2+x+1=\varphi(x)$, а на дужи MQ је $f(x,-1-x)=-4x^2+x+1=\psi(x)$. Функција φ на дужи NP има стационарну тачку $x=1/8$ којој одговара тачка $B(1/8,7/8)$ на тој дужи, а функција ψ на дужи MQ нема стационарну тачку.

Према томе, могуће тачке екстремума на области $\mathcal{D}$ су: M, N, P, Q, A и B. Вредности функције f у овим тачкама су дате у табели.

X	A	B	M	N	P	Q
$f(X)$	1/16	17/16	1	-2	1	-4

$\max_{\mathcal{D}} f=f(B)=\dfrac{17}{16},\quad \min_{\mathcal{D}} f=f(Q)=-4$

83. Функција f нема стационарних тачака. Границу области $\mathcal{D}$ чине странице паралелограма чија су темена тачке $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$ и $D(1,-1)$.

На страници AB је $f(x,y)=f(0,y)=-2y$, на страници BC је $f(x,y)=f(x,-x+1)=3x-5$, на страници CD је $f(x,y)=f(1,y)=-2y-2$, а на страници DA је $f(x,y)=f(x,-x)=3x-3$. Како су на свим страницама линеарне функције једне променљиве (променљиве x), те функције екстремне вредности достижу у крајевима страница. Према томе, једини кандидати за тачке екстремума функције f на области $\mathcal{D}$ су тачке A, B, C и D.

Како је $f(A) = -3$, $f(B) = -5$, $f(C) = -2$ и $f(D) = 0$, то је

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(B) = -5, \quad \max_{\mathcal{D}} f = f(D) = 0.$$

84. Граница области

$$|y-1| = \begin{cases} y-1, & y \geq 1 \\ 1-y, & y < 1 \end{cases}$$

За $y \geq 1$ имамо $x - 4 \leq -(y-1)$, $y \leq -x+5$, а за $y < 1$ имамо $x - 4 \leq -(1-y)$, $y \geq x-3$

Граница је одређена правама $p_1 :\ y = -x+5$, $p_2 :\ y = x-3$ и $p_3 :\ x = 0$

Из $-x+5 = x-3$ следи $x = 4$, заједничка тачка правих p_1 и p_2 је $(4,1)$

ЛЕ у области

$f'_x = 2x-4$, $f'_y = 2y$, С.Т. $\boxed{A(2,0)}$

На граници p_3

$f(0,y) = y^2$, С.Т. $\boxed{B(0,0)}$

На граници p_2

$$\begin{aligned} f(x, x-3) &= x^2 + (x-3)^2 - 4x \\ &= 2x^2 - 10x + 9 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

$g'(x) = 4x - 10$, С.Т. $\boxed{C(5/2, -1/2)}$

На граници p_1

$$\begin{aligned} f(x, -x+5) &= x^2 + (-x+5)^2 - 4x \\ &= 2x^2 - 14x + 25 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$h'(x) = 4x - 14$, С.Т. $\boxed{D(7/2, 3/2)}$

Заједничке тачке на граници

$\boxed{E(0,-3)}$ $\boxed{F(0,5)}$ $\boxed{G(4,1)}$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E	F	G
$f(X)$	-4	0	$-7/2$	$1/2$	9	25	1

$\max_{\mathcal{D}} f = f(F) = 25$, $\min_{\mathcal{D}} f = f(A) = -4$

87. Област $\mathcal{D}$ је троугао с теменима $A(-4,-4)$, $B(-2,-4)$ и $C(-2,-2)$, а границу ове области чине дужи

$$d_1 = \{(x,-4) \ :\ -4 \leq x \leq -2\}, \quad d_2 = \{(-2,y) \ :\ -4 \leq y \leq -2\}, \quad d_3 = \{(x,x) \ :\ -4 \leq x \leq -2\}.$$

Функција нема стационарних тачака, тако да треба тестирати само тачке границе области $\mathcal{D}$.

На d_1 је $f(x,-4) = \ln(-4x)$, на d_2 је $f(-2,y) = \ln(-2y)$, а на d_3 је $f(x,x) = \ln x^2 = 2\ln|x|$. У сва три случаја имамо монотоне функције једне променљиве, што значи да оне своје екстремне вредности достижу у крајевима интервала (дужи d_1, d_2 и d_3). Према томе, довољно је упоредити вредности функције f у тачкама A, B и C. Како је $f(A) = \ln 16 = 4\ln 2$, $f(B) = \ln 8 = 3\ln 2$ и $f(C) = \ln 4 = 2\ln 2$, то је

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(C) = 2\ln 2, \quad \max_{\mathcal{D}} f = f(A) = 4\ln 2.$$

88. Границу области $\mathcal{D}$ чине дуж $d_1 = \{(x,1) \ : \ x \in [1,e]\}$, дуж $d_2 = \{(e,y) \ : \ y \in]1,e^2]\}$ и линија $l = \{(x,x^2), \ : \ x \in [1,e]\}$ одређена функцијом $x \mapsto x^2$.

Тачка $(1,0)$ је једина стационарна тачка дате функције, али она не припада области $\mathcal{D}$.

На кривој l је

$$f(x,y) = f(x,x^2) = x^4 \ln x = \varphi(x), \quad \varphi'(x) = x^3(1+4\ln x) \geq 0 \text{ за } x \in [1,e].$$

Како је φ растућа функција, то је

$$\varphi_{\min} = \varphi(1) = 0 = f(1,1), \quad \varphi_{\max} = \varphi(e) = e^4 = f(e,e^2).$$

Дакле, тачке $A(1,1)$ и $B(e,e^2)$ су у конкуренцији за екстремне вредности функције f на области $\mathcal{D}$.

Слично је на дужи d_1,

$$f(x,y) = f(x,1) = x^2 \ln x = \psi(x), \quad \psi'(x) = x(1+2\ln x) > 0 \text{ за } x \in [1,e],$$

па је

$$\psi_{\min} = \psi(1) = 0 = f(1,1), \quad \psi_{\max} = \varphi(e) = e^2 = f(e,1).$$

Пошто је у тачки $(e,1)$ вредност функције f мања него у B и већа него у A, остају и даље тачке A и B као кандидати за тачке у којима функција f достиже најмању и највећу вредност.

На дужи d_2 је $f(x,y) = f(e,y) = e^2 y$, што је растућа линеарна функција која највећу и најмању вредност достиже на крајевима интервала. За $y = 1$ поново имамо тачку $(e,1)$, а за $y = e$ поново имамо тачку (e,e^2).

Према томе, нема мањих вредности него што је у тачки A и нема већих него што је у тачки B. Другим речима,

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(A) = 0, \quad \max_{\mathcal{D}} f = f(B) = e^4.$$

6.6 Најмања и највећа вредност функције три променљиве

90. Функција нема стационарних тачака, што значи да се екстремне вредности достижу на граници дате области. Граница се састоји од круга $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$, $z = 1$ и дела цилиндричне површи $z = x^2+y^2$ за $0 < z < 1$.

На кругу је $f = x+y+1$, а могуће тачке екстремума су опет на граници тог круга, односно при услову $x^2+y^2 = 1$. За $F = f + \lambda(x^2+y^2-1)$ имамо да је $F'_x = 1+2\lambda x$ и $F'_y = 1+2\lambda y$.

С.Т. су $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

На делу цилиндричне површи је $f = x+y+x^2+y^2$ за $0 \leq x^2+y^2 < 1$. Овде функција f има само једну стационарну тачку $E\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Вредности функције f у нађеним тачкама су $f(A) = 1-\sqrt{2}$, $f(B) = 1+\sqrt{2}$, $f(C) = f(D) = 1$ и $f(E) = -1/2$.

Према томе, $\max f = f(B) = 1+\sqrt{2}$, $\min f = f(E) = -1/2$

92. $f'_x = 0, \quad f'_y = 4y, \quad f'_z = 6z$

Стационарна тачка $A(0,0,0)$ функције fприпада области $\mathcal{D}$.

Границу области $\mathcal{D}$ чини сфера $x^2+y^2+z^2 = 100$ и на њој могу бити условни екстремуми функције f при услову $\varphi = 0$, где је $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-100$. За Лагранжову функцију $F = f + \lambda\varphi$ је

$$F'_x = 2x - 2\lambda x, \quad F'_y = 4y - 2\lambda y, \quad F'_z = 6z - 2\lambda z.$$

Из услова $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ добијамо три стационарне тачке: $B(10,0,0)$, $C(0,10,0)$ и $D(0,0,10)$.

Како је $f(A) = 0$, $f(B) = 100$, $f(C) = 200$ и $f(D) = 300$, то је

$$\min_{\mathcal{D}} f = 0, \quad \max_{\mathcal{D}} f = f(D) = 300.$$