МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум, април 2018 - група 3

Драган Ђорић

1. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^4y^4+9}-3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

у тачки $(0,0)$.

Решење. Како је

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9}-3}{x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,x)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9}-3}{x}=0,$$

функција f је диференцијабилна у тачки $(0,0)$ ако је $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $x\to 0$ и $y\to 0$. Нека је

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^4y^4+9}-3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot\frac{\sqrt{x^4y^4+9}+3}{\sqrt{x^4y^4+9}+3}=g(x,y)h(x,y),$$

где је

$$g(x,y)=\frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}},\qquad h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^4y^4+9}+3}.$$

За $(x,y)\to(0,0)$ имамо да $h(x,y)\to 1/6$ и да $g(x,y)\to 0$[1], што значи да заиста важи $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ када $x\to 0$ и $y\to 0$.

Према томе, функција f је диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

2. Написати Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $B(-1,0)$ апроксимира функцију $f:(x,y)\mapsto z$ задату имплицитно једнакошћу

$$e^{xy}+z^2y-x\cos y+xz=3.$$

[1] Из једнакости $g(x,y)=\rho^5\cos\varphi^4\sin\varphi^4$ следи да је $0\leq g(x,y)\leq\rho^5\to 0$ када $x\to 0$ и $y\to 0$.

Решење. Тражени Тејлоров полином T_2 одређен је са

$$T_2(x,y) = z(B) + dz(B) + \frac{1}{2}d^2z(B).$$

Из дате једнакости за $x = -1$ и $y = 0$ добијамо да је $z(B) = -1$.

Диференцирањем по x, односно по y, добијамо једнакости

$$ye^{xy} + 2yzz'_x - \cos y + z + xz'_x = 0, \quad xe^{xy} + 2yzz'_y + z^2 + x\sin y + xz'_y = 0$$

из којих следи да је $z'_x(B) = -2$ и $z'_y(B) = 0$.

Новим диференцирањем налазимо да је $z''_{x^2}(B) = -4$, $z''_{y^2}(B) = 0$ и $z''_{xy}(B) = 5$, па је

$$T_2(x,y) = -1 - 2dx + \frac{1}{2}(-4dx^3 + 10dxdy) = -5 - 6x + 5y - 2x^2 + 5xy.$$

3. Одредити све локалне екстремуме функције $f : (x,y) \mapsto x + y$ при услову $1/x^2 + 1/y^2 = 1/2$.

Решење. За Лагранжову функцију $F = f + \lambda\varphi$, где је $\varphi(x,y) = 1/x^2 + 1/y^2 - 1/2$, имамо да је

$$F'_x = 1 - \frac{2\lambda}{x^3}, \quad F'_y = 1 - \frac{2\lambda}{y^3}, \quad F''_{x^2} = \frac{6\lambda}{x^4}, \quad F''_{y^2} = \frac{6\lambda}{y^4}, \quad F''_{xy} = 0.$$

Из једнакости $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$ следи да је $y = x$, а затим из једнакости $\varphi = 0$ следи да је $x^2 = 4$, што значи да постоје две стационарне тачке: $A(2,2)$ са $\lambda = 4$ и $B(-2,-2)$ са $\lambda = -4$.

Како је

$$d^2F = \frac{6\lambda}{x^4}dx^2 + \frac{6\lambda}{y^4}dy^2,$$

то је $d^2F(A) > 0$ и $d^2F(B) < 0$. Према томе, у тачки A је условни локални минимум, а у тачки B условни локални максимум, при чему је

$$f_{\min} = f(A) = 4, \quad f_{\max} = f(B) = -4.$$