НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Скупови у $\mathbb{R}^2$

1. Нека је A пребројив скуп тачака у $\mathbb{R}^2$. Доказати да постоји права у равни $\mathbb{R}^2$ која не садржи ниједну тачку скупа A.

2. Центар дате кружнице у $\mathbb{R}^2$ је 'ирационална тачка' (координате су ирационални бројеви). Доказати да на тој кружници не постоји више од две 'рационалне тачке' (координате су рационални бројеви).

3. Доказати да растојање између два дисјунктна компактна скупа у $\mathbb{R}^2$ не може да буде једнако нули.

4. Навести пример два затворена скупа у $\mathbb{R}^2$ чије је растојање једнако нули.

5. Доказати да је скуп у $\mathbb{R}^2$ отворен ако и само ако је унија отворених кругова.

6. Нека је $A \subset \mathbb{R}^2$ коначан скуп тачака који није подскуп неке праве. Доказати да постоји права која садржи тачно две тачке скупа A.

Скупови у $\mathbb{R}^3$

7. Изабрати шест тачака у $\mathbb{R}^3$ тако да између њих постоје само два различита растојања.

8. Нека је $A \subset \mathbb{R}^3$ коначан скуп тачака који није подскуп неке равни. Примером показати да не мора да постоји раван која садржи тачно три тачке скупа A.

Функције две променљиве

9. Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

у свакој околини тачке $(0,0)$ узима све вредности из интервала $(-1,1)$.

10. Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

у свакој околини тачке $(0,0)$ узима све вредности из интервала $(0,+\infty)$.

Граничне вредности и непрекидност

11. Навести пример функције $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ која је непрекидна само у тачки $(0,0)$.

12. Навести пример две функције које у тачки $(0,0)$ имају прекид, при чему је њихов збир непрекидна функција у тачки $(0,0)$.

13. Навести пример две функције које у тачки $(0,0)$ имају прекид, при чему је њихов производ непрекидна функција у тачки $(0,0)$.

14. Доказати да је функција $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ непрекидна ако и само ако је $f^{-1}(U)$ отворен скуп за сваки отворен скуп $U\subset\mathbb{R}$.

15. Функција $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ је таква да за свако $\alpha\in\mathbb{R}$ скупови $\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ f(x)<\alpha\}$ и $\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ f(x)>\alpha\}$ су отворени. Доказати да је f непрекидна функција.

16. Нека је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ непрекидна и нека је C јединична кружница с центром у $(0,0)$. Доказати да на кружници C постоје две дијаметрално супротне тачке у којима функција f има једнаке вредности.

Парцијални изводи

17. Функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисана је са $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ за $(x,y)\neq(0,0)$ и $f(0,0)=0$. Доказати да су у тачки $(0,0)$ працијални изводи првог реда функције f непрекидни и диференцијабилни, а да мешовити парцијални изводи другог реда у тачки $(0,0)$ нису међусобно једнаки.

Диференцијабилност

18. Испитати диференцијабилност функције $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ако је:

$$1)\ f(x,y)=|xy|,\quad 2)\ f(x,y)=|x|y,\quad 3)\ f(x,y)=\sqrt{|x|y},\quad 4)\ f(x,y)=\sqrt[3]{x|y|}.$$

19. Функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисана је са $f(x,y)=1$ за $xy\neq0$ и $f(x,y)=0$ за $xy=0$. Доказати да су парцијални изводи првог реда функције f непрекидни у тачки $(0,0)$, а да функција f (можда супротно очекивању[1]) није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Маклоренов полином

20. За функцију $f:(x,y)\to x^2y^3(6-x-y)$ одредити Маклоренов полином другог степена у околини тачке $(2,3)$.

21. За функцију $f:(x,y)\to x^2+y^2+xy-4\ln x-10\ln y$ одредити Маклоренов полином другог степена у околини тачке $(1,2)$.

[1]Зар нису испуњени довољни услови за диференцијабилност?