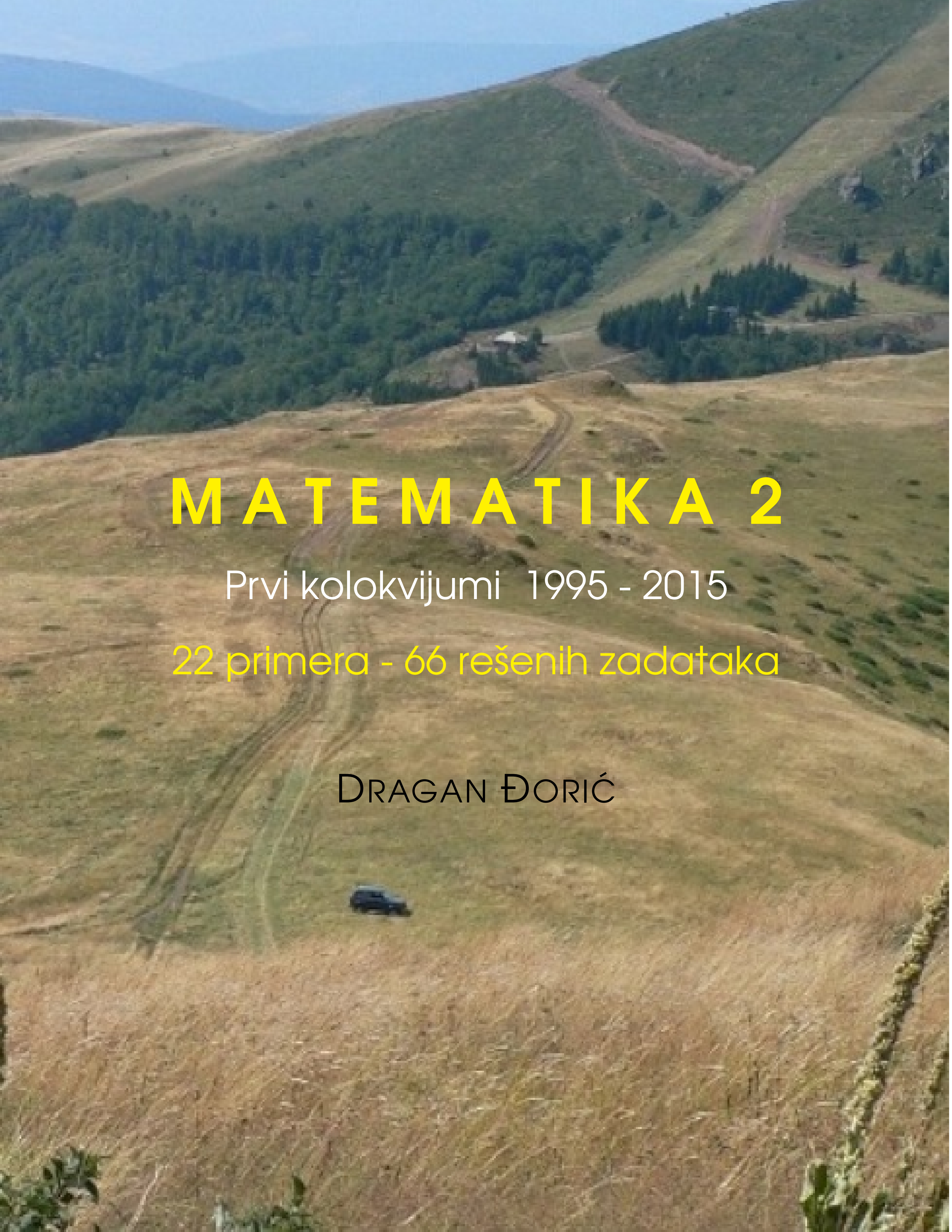


M A T E M A T I K A 2

Prvi kolokvijumi 1995 - 2015

22 primera - 66 rešenih zadataka

Dragan Đorić

Fakultet organizacionh nauka, Beograd

Studentima generacije 2015/2016 (grupe A1 i A5)

PROF DRAGAN ĐORIĆ, djoricd@fon.bg.ac.rs

Mart, 2016

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (25.3.1995) - Група 1

1. Дата је функција $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

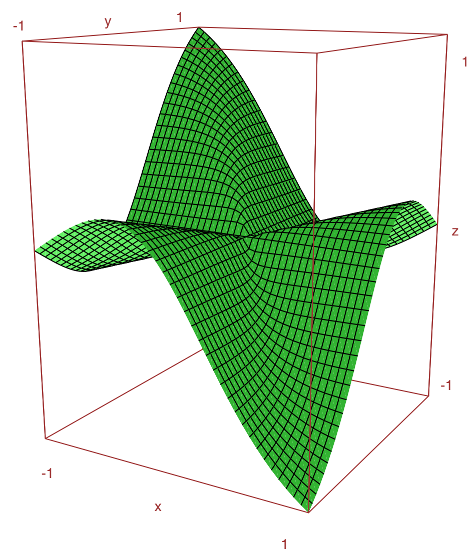
$a)$ Испитати непрекидност функције f у тачки $(0,0)$.

$b)$ Испитати егзистенцију $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Решење: $a)$ Пошто је $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} - \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$, следи да је

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} + \frac{|xy^2}{x^2+y^2} \leq |y| + |x| \to 0 \ ((x,y) \to (0,0)),$$

што значи да је f непрекидна у $(0,0)$.



$b)$ На основу дефиниције извода је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0,$$

а за $(x,y) \neq (0,0)$ је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3 + x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 - x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Међутим,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

па мешовити парцијални изводи не постоје.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f(x,y,z) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{y} + z + \frac{y^2}{4z}$.

Решење: Диференцирањем дате функције по x, y и z добијамо

$$f'_x = -\frac{2}{x^2} + \frac{2x}{y}, \quad f'_y = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{2z}, \quad f'_z = 1 - \frac{y^2}{4z^2}.$$

Из система $f'_x(x,y,z) = 0$, $f'_y(x,y,z) = 0$, $f'_z(x,y,z) = 0$ и $x,y,z \neq 0$ добијамо две стационарне тачке: $A(1,1,1/2)$ и $B(-1,-1,-1/2)$. Пошто је

$$f''_{x^2} = \frac{4}{x^3} + \frac{2}{y}, \quad f''_{y^2} = \frac{2x^2}{y^3} + \frac{1}{2z}, \quad f''_{z^2} = \frac{y^2}{2z^3},$$

$$f''_{xy} = -\frac{2x}{y^2}, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = -\frac{y}{2z^2},$$

добијамо да је

$$\Delta(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \Delta(B) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

На основу *Силвестеровог критеријума* следи да је $f_{\min} = f(A) = 4$ и $f_{\max} = f(D) = -4$.

3. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x,y) = x^2 + y^2$ на области

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \ : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

Решење: Лагранжова функција

$$L(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 \right)$$

има четири стационарне тачке: $A(3,0)$, $B(-3,0)$, $C(0,2)$ и $D(0,-2)$, а у унутрашњости дате области је стационарна тачка $E(0,0)$. Упоређивањем вредности функције f у овим тачкама налазимо да је

$$\max_{\mathcal{D}} f = f(A) = f(B) = 9, \quad \min_{\mathcal{D}} f = f(E) = 0.$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (25.3.1995) - Група 2

1. Дата је функција $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

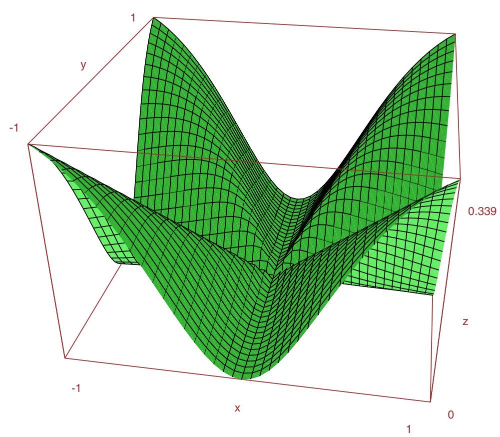
$a)$ Испитати непрекидност функције f у тачки $(0,0)$.

$b)$ Испитати диференцијабилност функције f тачки $(0,0)$.

Решење: $a)$ На основу неједнакости

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2}} = |y|$$

закључујемо да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, што значи да је функција f непрекидна у $(0,0)$.



$b)$ На основу дефиниције парцијалног извода је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0,$$

а на основу дефиниције прираштаја

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \sin \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Пошто су парцијални изводи у тачки $(0,0)$ једнаки нули, функција је у $(0,0)$ диференцијабилна ако је

$$\Delta f(0,0) = o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right), \quad \text{кад} \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

Међутим, за $\Delta y = \Delta x$

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \to \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}, \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

па функција f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f(x,y,z) = 2x^2 + \dfrac{y^2}{x} - 4z + \dfrac{2z^2}{y}$

Решење: Пошто је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x - \frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{x} - \frac{2z^2}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -4 + \frac{4z}{y}$$

функција f има само једну стационарну тачку $M(1/4, 1/4, 1/4)$. Налажењем парцијалних извода другог реда,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + \frac{2y^2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{x} + \frac{4z^2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{4z}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{4}{y},$$

у тачки M добијамо

$$\Delta(M) = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 0 \\ -8 & 24 & -16 \\ 0 & -16 & 16 \end{pmatrix}.$$

Пошто је $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, на основу *Силвестеровог критеријума* следи да функција f у тачки M има минимум који износи $-1/8$.

3. Одредити локалне екстремуме функције $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$, при услову

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{4}.$$

Решење: За Лагранжову функције

$$L(x,y,z;\lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{3}{4}\right)$$

имамо

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2\lambda}{z^3}.$$

Из система $\partial L/\partial x = 0$, $\partial L/\partial y = 0$, $\partial L/\partial z = 0$, $1/x^2 + 1/y^2 + 1/z^2 = 3/4$ добијамо две стационарне тачке $M_1(2,2,2)$ и $M_2(-2,-2,-2)$. Пошто је

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}, \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4}, \ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{2}{z^3} + \frac{6\lambda}{z^4}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0,$$

добијамо да је

$$d^2L(M_1) = -\frac{1}{8}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0, \ d^2L(M_2) = \frac{1}{8}(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0,$$

па је $f_{\max} = f(M_1) = 3/2$ и $f_{\min} = f(M_2) = -3/2$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (25.3.1995) - Група 3

1. Функције $f:(x,y)\mapsto u$ и $g:(x,y)\mapsto v$ дефинисане су системом једначина:

$$\begin{aligned} u^2+uv &= \ln(xy) \\ v^2+uv &= x^2+y^2. \end{aligned}$$

Израчунати $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ и $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$ ако је $g(1,1)=\sqrt{2}$.

Решење: Пошто је $g(1,1)=\sqrt{2}$, из датог система једначина следи да је $f(1,1)=0$. Налажењем парцијалних извода по x левих и десних страна датих једначина добијамо систем

$$\begin{aligned} (2u+v)f'_x(x,y)+ug'_x(x,y) &= \frac{y}{xy} \\ vf'_x(x,y)+(2v+4x)g'_x(x,y) &= 2x \end{aligned}$$

У тачки $(1,1)$ систем постаје

$$\begin{aligned} \sqrt{2}f'_x(1,1) &= 1 \\ \sqrt{2}f'_x(1,1)+2\sqrt{2}g'_x(1,1) &= 2 \end{aligned}$$

па је $f'_x(1,1)=1/\sqrt{2}$ и $g'_x(1,1)=1/2\sqrt{2}$.

На сличан начин, налажењем парцијалних извода по y, добијамо да је

$$f'_y(1,1)=1/\sqrt{2}, \qquad g'_y(1,1)=1/2\sqrt{2}.$$

2. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу $(x-1)^2+y^3+6y^2+2z^2+2xz-8=0$.

Решење: Диференцирањем леве стране дате једнакости, под претпоставком да је $2z+x\neq 0$, добијамо да је

$$f'_x(x,y)=-\frac{z+x-1}{2z+x}, \qquad f'_y(x,y)=-\frac{3y^2+12y}{4z+2x}.$$

Из услова $z=-x+1$, $y(y+4)=0$ и дате једнакости добијамо две стационарне тачке $A(5,0)$ и $B(-1,0)$. Пошто је

$$f''_{x^2}(x,y)=-\frac{1}{2z+x}, \quad f''_{y^2}(x,y)=-\frac{3y+6}{2z+x}, \quad f''_{xy}(x,y)=0,$$

добијамо да је $f''_{x^2}(A)=1/3$, $f''_{y^2}(A)=2$, $f''_{x^2}(B)=-1/3$, $f''_{y^2}(B)=-2$, па је $f_{\min}=f(A)=-4$ и $f_{\max}=f(B)=2$.

3. Одредити локалне екстремуме функције $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ при услову

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Решење: За Лагранжову функцију

$$L(x,y,z;\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1\right)$$

je

$$L'_x = 2x + \frac{\lambda}{8}x, \quad L'_y = 2y + \frac{2\lambda}{9}y, \quad L'_z = 2z + \frac{\lambda}{2}z.$$

Из система

$$\left(1 + \frac{1}{16}\lambda\right)x = 0, \quad \left(1 + \frac{1}{9}\lambda\right)y = 0, \quad \left(1 + \frac{1}{4}\lambda\right)z = 0, \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

добијамо шест стационарних тачака:

$$A(4,0,0), \quad B(-4,0,0), \quad C(0,3,0), \quad D(0,-3,0), \quad E(0,0,2), \quad F(0,0,-2).$$

Пошто су мешовити парцијални изводи другог реда једнаки нули, а

$$L''_{x^2}(A) = L''_{x^2}(B) = 0, \quad L''_{y^2}(A) = L''_{y^2}(B) < 0, \quad L''_{z^2}(A) = L''_{z^2}(B) < 0,$$

то је $d^2L(A) = d^2L(B) < 0$ па је $f_{\max} = f(A) = f(B) = 16$. На сличан начин добијамо да је $d^2L(E) = d^2L(F) > 0$ па је $f_{\min} = f(E) = f(F) = 4$. Међутим, за $dx = 0$ и $dz \neq 0$ добијамо да је $d^2L(C) = d^2L(D) < 0$, а за $dz = 0$ и $dx \neq 0$ добијамо да је $d^2L(C) = d^2L(D) > 0$, што значи да у тачкама C и D функција f нема екстремум.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (30.3.1996) - Група 1

1. Дата је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

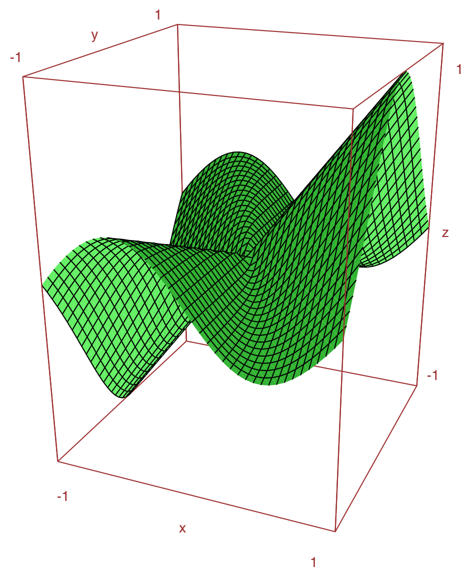
$a)$ Испитати непрекидност функције f у тачки $(0,0)$.

$b)$ Испитати диференцијабилност функције f у тачки $(0,0)$.

Решење: $a)$ На основу неједнакости

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}|x| \leq |x|$$

следи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, што значи да је f непрекидна у $(0,0)$.



$b)$ На основу дефиниције извода је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0,$$

а на основу дефиниције прираштаја

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\Delta x.$$

Функција је у $(0,0)$ диференцијабилна ако је

$$\Delta f(0,0) = \Delta x + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right), \quad \text{кад} \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

Међутим, како за $\Delta y = \Delta x$

$$\frac{\Delta f(0,0) - \Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = -\frac{2\Delta x(\Delta y)^2}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \begin{cases} -\sqrt{2}/2, & x > 0 \\ \sqrt{2}/2, & x < 0 \end{cases},$$

то функција f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

2. Функција $f : (x,y) \mapsto z$ задата је имплицитно једнакошћу

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 32 - 0, \quad z > 0.$$

Одредити Тејлоров полином другог степена за функцију f у тачки $M(1,-1)$.

Решење: Парцијалним диференцирањем дате једнакости добијамо једнакости

$$10x + 10z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2y - 2z - 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$10y + 10z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2x - 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2z - 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

из којих следи

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y + z - 5x}{5z - x - y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x + z - 5y}{5z - x - y}.$$

Из ових једнакости налазимо да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - 5\right)(5z - x - y) - \left(5\frac{\partial f}{\partial x} - 1\right)(y + z - 5x)}{(5z - x - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\left(1 + \frac{\partial f}{\partial y}\right)(5z - x - y) - \left(5\frac{\partial f}{\partial y} - 1\right)(y + z - 5x)}{(5z - x - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - 5\right)(5z - x - y) - \left(5\frac{\partial f}{\partial y} - 1\right)(y + z - 5x)}{(5z - x - y)^2},$$

па је

$$d^2 f(1,-1) = -\frac{3}{50}\left(11dx^2 - 10dxdy + 11dy^2\right).$$

Из дате једнакости за $x = 1$ и $y = -1$ добијамо да је $z^2 = 4$, што значи да је $f(M) = 2$. Како је $\frac{\partial z}{\partial x}(M) = -\frac{2}{5}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{4}{5}$, то је

$$df(M) = -\frac{2}{5}dx + \frac{4}{5}dy = -\frac{2}{5}(x-1) + \frac{4}{5}(y+1).$$

Дакле, у околини тачке M је $f(x,y) \approx T_2(x,y)$ где је

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= 2 - \frac{2}{5}(x-1) + \frac{4}{5}(y+1) - \\ &\quad -\frac{3}{100}\left(11(x-1)^2 - 15(x-1)(y+1) + 11(y+1)^2\right). \end{aligned}$$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x,y,z) \mapsto x + y + z$ при услову $x^2 + yz = 5$.

Решење: За Лагранжову функцију

$$L(x,y,z;\lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + yz - 5)$$

имамо да је

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda z, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + \lambda y.$$

Из система $1 + 2\lambda x = 0,\ 1 + \lambda z = 0,\ 1 + \lambda y = 0,\ x^2 + yz = 5$ добијамо две стационарне тачке: $M_1(-1, -2, -2)$ за $\lambda = 1/2$ и $M_2(1, 2, 2)$ за $\lambda = -1/2$. Пошто је

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, z) = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \lambda,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, z) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, y, z) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0$$

и

$$2zdx + zdy + ydz = 0 \quad (\text{следи из } x^2 + yz = 5),$$

добијамо да је

$$d^2L(M_1) = dx^2 + dydz = dx^2 + dy(-dx - dy) = dx^2 - dy^2 - dxdy,$$

$$d^2L(M_2) = -dx^2 - dydz = -dx^2 + dy(dx + dy) = -dx^2 + dy^2 + dxdy,$$

па дата функција у тачкама M_1 и M_2 нема локалне екстремуме.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (30.3.1996) - Група 2

1. Функција $f:(x,y)\mapsto z$ је дефинисана имплицитно једнакошћу $F\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)=0$, где је F диференцијабилна на R^2. Доказати да је $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=f(x,y)$.

Решење: Пошто је F диференцијабилна, то је $dF=0$, односно $F'_u du+F'_v dv=0$. Из

$$\begin{aligned} dF &= F'_u\frac{ydx-xdy}{y^2}+F'_v\frac{zdy-ydz}{z^2} \\ &= \frac{z^2}{y^2}\cdot\frac{F'_u}{F'_v}dx+\left(\frac{z}{y}-\frac{z^2x}{y^3}\cdot\frac{F'_u}{F'_v}\right)dy \end{aligned}$$

добијамо да је

$$xf'_x+yf'_y=\frac{xz^2}{y^2}\cdot\frac{F'_u}{F'_v}+z-\frac{xz^2}{y^2}\cdot\frac{F'_u}{F'_v}=z=f(x,y).$$

Други начин. Парцијалним диференцирањем једнакости

$$F\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)=0$$

добијамо да је

$$F'_u\cdot u'_x+F'_v\cdot v'_x=0,\quad F'_u\cdot u'_y+F'_v\cdot v'_y=0$$

где је $u=x/y$ и $v=y/z$. Како је $u'_x=1/y$, $u'_y=-x/y^2$, $v'_x=-yx'_x/z^2$ и $v'_y=1/z-yz'_y/z^2$, следи да је

$$z'_x=\frac{z^2}{y^2}\cdot\frac{F'_u}{F'_v},\qquad z'_y=\frac{z}{y^3}-\frac{xz^2}{y^3}\cdot\frac{F'_u}{F'_v}.$$

Трећи начин. Како је $F(x/y,y/z)=G(x,y,z)=0$, то је

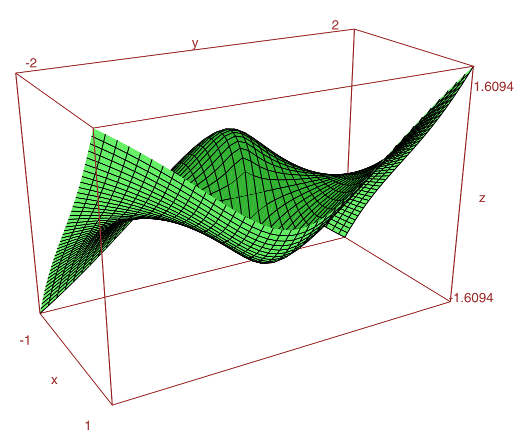
$$z'_x=-\frac{G'_x}{G'_z}=-\frac{F'_u\cdot u'_x+F'_v\cdot v'_x}{F'_u\cdot u'_z+F'_v\cdot v'_z}=\frac{F'_uz^2}{F'_vy^2}.$$

Слично је и $z'_y=-G'_y/G'_z$.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto x\ln(x^2+y^2)$.

Решење: Како је

$$f'_x(x,y)=\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2},\quad f'_y(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$$



то су $A(0,1)$, $B(0,-1)$, $C(1/e,0)$ и $D(-1/e,0)$ стационарне тачке.

Пошто је $f(A)=f(B)=0$, а $f(x,1)=f(x,-1)>0$ за $x>0$ и $f(x,1)=f(x,-1)<0$ за $x<0$, то у A и B нема екстремума.

Из $f''_{x^2}(x,0)=2/x$, $f''_{y^2}(x,0)=2/x$ и $f''_{xy}(x,0)=0$ добијамо да је

$$d^2f(C)=2e(dx^2+dy^2),\qquad d^2f(D)=-2(dx^2+dy^2),$$

па је $f_{\min}=f(C)=-2/e$ и $f_{\max}=f(D)=2/e$.

3. Одредити најмању и највећу вредност функције $f:(x,y)\mapsto 2x^3+4x^2+y^2-2xy$ на области $\mathcal{D}=\big\{(x,y)\ :\ -1\le y\le -x^2\big\}$.

Решење: Из $f'_x(x,y)=0$ и $f'_y(x,y)=0$ следи $y=x$ и $x(x+1)=0$ што даје две критичне тачке: $A(0,0)$ и $B(-1,-1)$. Из $\phi(x)=f(x,-1)$ добијамо да је $\phi'(x)=0$ за $x=-1/3$ или $x=-1$, па имамо још две критичне тачке: $C(-1/3,-1)$ и $D(1,-1)$. Слично, из $\psi(x)=f(x,-x^2)$ добијамо да је $\psi'(x)=0$ за $x\in\{-2,-1,0\}$, што не даје нове критичне тачке. Како је

$$\min\{f(A),f(B),f(C),f(D)\}=f(A)=0,$$

$$\max\{f(A),f(B),f(C),f(D)\}=f(D)=9,$$

то је $\min\limits_{\mathcal{D}} f=f(A)=0$ и $\max\limits_{\mathcal{D}} f=f(D)=9$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (25.3.2000) - Група 1

1. Дата је функција $f(x,y) = |x| + |y| + |x+y|$.

а) Испитати да ли је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

б) Одредити у ком смеру постоји извод функције f у тачки $(0,0)$.

Решење: *a*) Како је

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$$

и

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{|\Delta x| + |\Delta y| - |\Delta x + \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = \Delta y \neq 0 \\ \sqrt{2}, & \Delta x = -\Delta y \neq 0. \end{cases}$$

Дакле, f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

b) Из чињенице да је

$$\frac{f(tl_x, tl_y) - f(0,0)}{t} = (|l_x| + |l_y| - |l_x + l_y|) sgnt$$

следи да функција има извод у смеру вектора (l_x, l_y) ако и само ако је $|l_x| + |l_y| = |l_x + l_y|$, односно када је $l_x \cdot l_y > 0$.

2. Функција $f : (x,y) \mapsto z$ задата је имплицитно једнакошћу

$$z^2 - x^2 y - y^3 + xyz = 0, \quad z > 0.$$

Одредити Тејлоров полином другог степена функције f у околини тачке $A(0,1)$.

Решење: Из једнакости

$$\begin{aligned}
2z'_x z'_x - 2xy + yz + xyz'_x &= 0 \\
2zz'_y - x^2 - 3y^2 + xz + xyz'_y &= 0 \\
2z'_x z'_x + 2zz''_{xx} - 2y + yz'_x + yz'_x + xyz''_{xx} &= 0 \\
2z'_y z'_x + 2zz''_{xy} - 2x + z + yz'_y + xz'_x + xyz'_{xy} &= 0 \\
2z'_y z'_y + 2zz''_{yy} - 6y + xz'_y + xyz''_{yy} &= 0
\end{aligned}$$

добија се да у тачки A важи $z'_x = -1/2$, $z'_y = 3/2$, $z''_{xx} = 5/4$, $z''_{xy} = -1/2$, $z''_{yy} = 3/4$, па је

$$f(dx, 1+dy) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) dx + \frac{3}{2} dy + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} dx^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dxdy + \frac{3}{4} dy^2\right).$$

Према томе,

$$T_2(x,y) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{4} y + \frac{5}{8} x^2 - \frac{1}{2} xy + \frac{3}{8} y^2.$$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x,y) \mapsto xye^{-x^2-y^2}$.

Решење: Нека је $f(x,y) = xyg(x,y)$. Стационарне тачке одређујемо из система једначина

$$f'_x(x,y) = yg(x,y)(1-2x^2) = 0, \;\; f'_y(x,y) = xg(x,y)(1-2y^2) = 0.$$

Из прве једначине следи да је $y = 0$ или $1 = 2x^2$, а из друге да је $x = 0$ или $1 = 2y^2$. Стационарне тачке су: $A(0,0)$, $B(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $C(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $D(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $E(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Парцијални изводи другог реда су

$$\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= yg(x,y)(1-2x^2) + yg(x,y)(-4x), \\
f''_{xy}(x,y) &= (1-2x^2)g(x,y) + (1-2x^2)yg((x,y)(-2y), \\
f''_{yy}(x,y) &= xg(x,y)(-2y)(1-2y^2) + xg(x,y)(-4y).
\end{aligned}$$

За тачку A је $f''_{xx} = f''_{yy} = 0,\ f''_{xy} = 1$ па је

$$d^2 f(A) = 2dxdy = \begin{cases} > 0, & \text{за} dx = dy \neq 0 \\ < 0, & \text{за} dx = -dy \neq 0. \end{cases}$$

У тачкама B, C, D, E је $f''_{xx} = -\dfrac{4}{e}xy,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = -\dfrac{4}{e}xy$, па је

$$d^2 f = -\frac{4}{e}xydx^2 - \frac{4}{e}xydy^2 = -\frac{4}{e}xy(dx^2 + dy^2).$$

Према томе, $f_{\max} = f(B) = f(E)$, а $f_{\min} = f(C) = f(D)$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (30.3.2002) - Група 3

1. Дата је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$a)$ Испитати непрекидност функције f'_x.

$b)$ Израчунати $f''_{xy}(0,0)$ и $f''_{yx}(0,0)$.

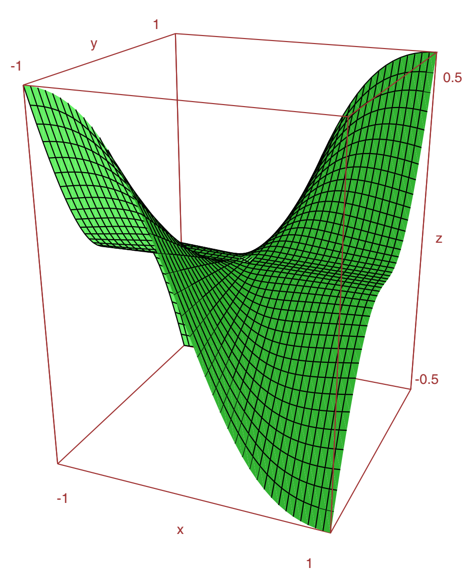
Решење: $a)$ За $(x,y) \neq (0,0)$ је

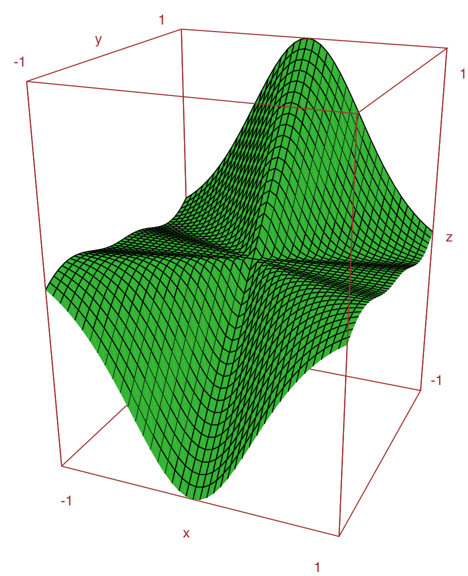
$$f'_x(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - xz^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \rho(\sin^5\varphi - \cos^2\varphi \sin^3\varphi),$$

где су (ρ, φ) поларне координате. Како је $f'_x(0,0) = 0$ и

$$|f'_x| = \rho|\sin^5\varphi - \cos^2\varphi\sin^3\varphi| \leq 2\rho \to 0. \quad \rho \to 0,$$

функција f'_x је непрекидна у тачки $(0,0)$. На следећој слици је график функције f (лево) и график функције f'_x (десно) у околини тачке $(0,0)$.





$b)$ Користећи израз за f'_x и дефиницију парцијалног извода по y имамо да је

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \cdot \frac{(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4} = 1.$$

На сличан начин, користећи израз за f'_y,

$$f'_y = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

за $(x,y) \neq (0,0)$ и једнакост $f'_y(0,0) = 0$, добијамо да је $f''_{yx}(0,0) = 0$.

2. Функција $f : (x,y) \mapsto z$ задата је имплицитно једнакошћу $F(x+y+z, 2xz+y^2) = 0$, где је $F : R^2 \to R$ диференцијабилна функција. Упростити израз $(y-x)f'_x(x,y) + (x-z)f'_y(x,y)$.

Решење: Ако је $u = x + y + z$ и $v = 2xz + y^2$, тада је $F'_u du + F'_v dv = 0$, односно

$$F'_u(dx + dy + dz) + F'_v(2xdz + 2zdx + 2ydy) = 0,$$

односно

$$(F'_u + 2zF'_v)dx + (F'_u + 2yF'_v)dy + (F'_u + 2xF'_v)dz = 0.$$

Из ове једнакости следи да је

$$dz = -\frac{F'_u + 2zF'_v}{F'_u + 2xF'_v}dx - \frac{F'_u + 2yF'_v}{F'_u + 2xF'_v}dy,$$

што значи да је

$$f'_x = -\frac{F'_u + 2zF'_v}{F'_u + 2xF'_v}, \quad f'_y = -\frac{F'_u + 2yF'_v}{F'_u + 2xF'_v}.$$

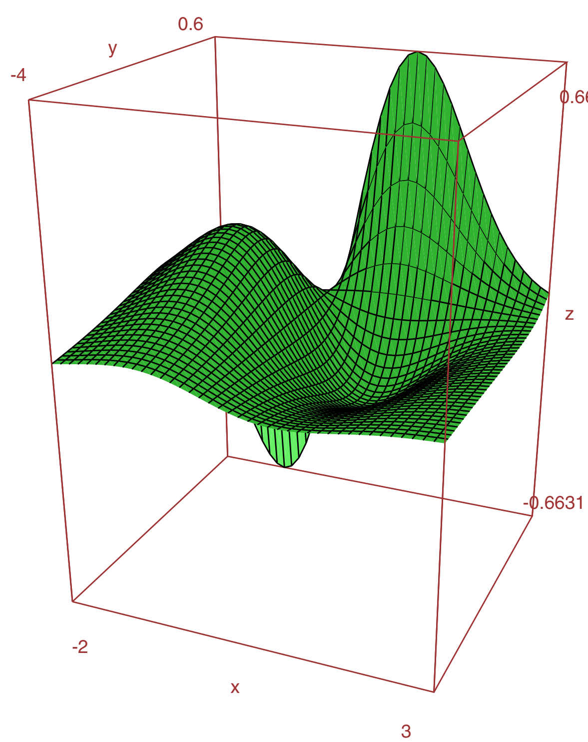
Заменом f'_x и f'_y у датом изразу добијамо

$$\begin{aligned}(y-x)f'_x + (x-z)f'_y &= -\frac{F'_u - 2xzF'_v + 2yzF'_v - zF'_u}{F'_u + 2xF'_v}\\ &= -\frac{(y-z)F'_u + 2x(y-z)F'_v}{F'_u + 2xF'_v}\\ &= -(y-z)\frac{F'_u + 2xF'_v}{F'_u + 2xF'_v}\\ &= z - y.\end{aligned}$$

Напомена. Парцијалне изводе f'_x и fy можемо добити и диференцирањем по x и по y у једнакости $F(u,v) = 0$.

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x,y) \mapsto xye^{y-x^2/2}$.

Решење: Ако је $f(x,y) = xyg(x,y)$, тада је $f'_x = (y - yx^2)g$ и $f'_y = (x + xy)g$. Како је $g(x,y) \neq 0$, стационарне $A(0,0)$, $B(1,-1)$ и $C(-1,-1)$ добијамо решавањем система $y(1-x^2) = 0$ и $x(x(1+y) = 0$.



За проверу да ли су у стационарним тачкама локални екстремуми, потребни су парцијални изводи другог реда. Диференцирањем израза за f'_x и f'_y добијамо

$$a = f''_{x^2} = (yx^3 - 3xy)g, \quad b = f''_{xy} = (1+y)(1-x^2)g, \quad f''_{y^2} = x(2+y)g.$$

У тачки A је $a = c = 0$, $b = 1$, $ac - b^2 < 0$, па функција f у тој тачки нема локални екстремум. У тачки B је $a = 2e^{-3/2}$, $b = 0$, $c = e^{-3/2}$, $ac - b^2 = 2e^{-3} > 0$, па је $f_{\min} = f(B) = -e^{-3/2}$. У тачки C је $a = -2e^{-3/2}$, $b = 0$, $c = -e^{-3/2}$, $ac - b^2 = 2e^{-3} > 0$, па је $f_{\max} = f(C) = e^{-3/2}$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (20.4.2003) - Група 1

1. Дата је функција

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y-xy^2}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

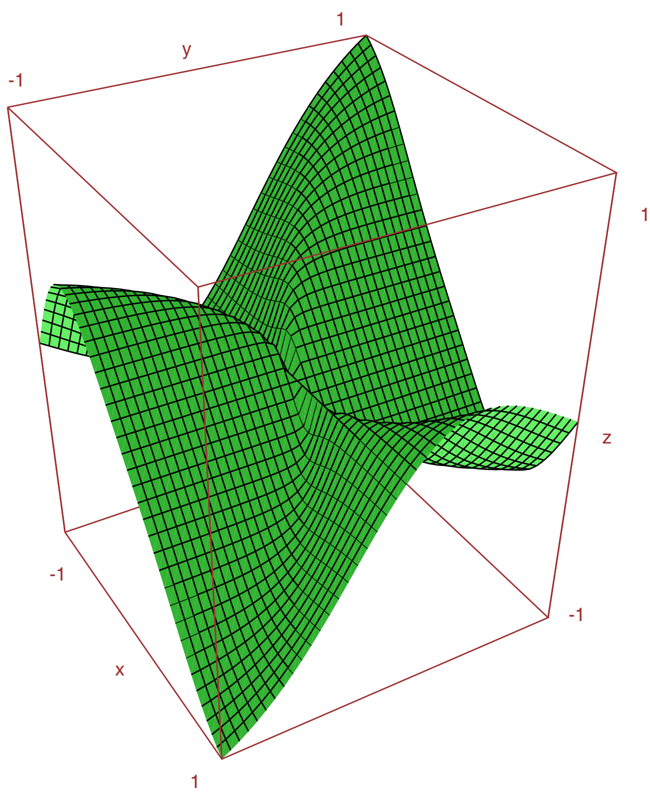
а) Доказати да је функција f непрекидна у тачки $(0,0)$.

б) Испитати да ли је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Решење: *а*) Како је $f(0,0)=0$ и

$$|f(x,y)|\leq\frac{x^4}{x^4+y^2}\cdot|y|+\frac{y^2}{x^4+y^2}\cdot|x|\to 0,\quad (x,y)\to(0,0),$$

функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$. На следећој слици је график функције f.



b) Пошто је $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ и

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{(\Delta x)^4\Delta y-\Delta x(\Delta y)^2}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{3/2}}=\begin{cases}0, & \Delta x=0,\ \Delta y\neq 0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & \Delta x=\Delta y>0,\end{cases}$$

функција f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

2. Функција $f:(x,y)\mapsto z$ задата је имплицитно једнакошћу

$$(x+y)z^2-xy-x-y+z=0,\quad z>0.$$

Одредити Тејлоров полином другог степена функције f у околини тачке $A(1,1)$.

Решење: Диференцирањем Лагранжове функције $F = 3x + 4y - 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ добијамо $F'_x = 3 + 2\lambda x$ и $F'_y = 4 + 2\lambda y$. Из система

$$3 + 2\lambda x = 0, \quad 4 + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

следи да је

$$2\lambda = -\frac{3}{x} = -\frac{4}{y}, \quad 3y = 4x, \quad x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1, \quad x^2 = \frac{9}{25}.$$

Стационарне тачке су $A(3/5, 4/5)$ са $\lambda = -5/2$ и $B(-3/5, -4/5)$ са $\lambda = 5/2$.

Како је $F''_{x^2} = F''_{y^2} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = 0$, то је

$$d^2F(A^*) = -5(dx^2 + dy^2) < 0, \quad d^2F(B^*) = 5(dx^2 + dy^2) > 0,$$

па је $f_{\max} = f(A) = 3$, $f_{\min} = f(B) = -7$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto 3x + 4y - 2$ при услову $x^2 + y^2 = 1$.

Решење: Диференцирањем по x у датој једнакости имамо да је

$$z^2 + (x + y)2zz'_x - y - 1 + z'_x = 0. \tag{1}$$

Решавањем по z'_x добијамо да је

$$z'_x = \frac{1 + y - z^2}{1 + 2z(x + y)}.$$

Слично диференцирањем по y добијамо

$$z'_y = \frac{1 + x - z^2}{1 + 2z(x + y)}.$$

Диференцирањем по x и y у једнакости (1) добијамо једнакости

$$2zz'_x + 2zz'_x + (x + y)[2z'_x z'_x + 2zz''_{x^2}] + z''_{x^2} = 0$$

$$2zz'_y + 2zz'_x + (x + y)[2z'_y z'_x + 2zz''_{xy}] - 1 + z''_{xy} = 0$$

из којих налазимо да је

$$z''_{x^2} = -\frac{4zz'_x + 2(x + y){z'_x}^2}{1 + 2(x + y)z}, \quad z''_{xy} = \frac{1 - 2zz'_y - 2zz'_x - 2(x + y)z'_y z'_x}{1 + 2(x + y)z}.$$

Слично добијамо да је

$$z''_{y^2} = -\frac{4zz'_y + 2(x + y){z'_y}^2}{1 + 2(x + y)z}.$$

У тачки A је

$$z'_x(A) = \frac{1}{5}, \quad z'_y(A) = \frac{1}{5}, \quad z''_{x^2}(a) = -\frac{24}{125}, \quad z''_{y^2}(A) = -\frac{24}{125}, \quad z''_{xy} = \frac{1}{125}.$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= z(A) + dz(A) + \frac{1}{2}d^2z(A) \\
&= 1 + \frac{1}{5}(x - 1) + \frac{1}{5}(y - 1) - \frac{12}{125}(x - 1)^2 + \frac{1}{125}(x - 1)(y - 1) - \frac{12}{125}(y - 1)^2 \\
&= \frac{1}{125}(52 + 48x + 48y + xy - 12x^2 - 12y^2).
\end{aligned}$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (24.4.2004) - Група 1

1. Дата је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

а) Доказати да је функција f непрекидна у тачки $(0,0)$.

б) Испитати да ли је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Решење: *a*) Нека је $f = 1 - g$, где је

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,0) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Како је

$$|g(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{|x|^2+y^2}} \cdot |y| \leq |y| \to 0, \quad y \to 0$$

то $g(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$, па је f непрекидна у тачки $(0,0)$.

b) На основу дефиниције парцијалног извода имамо да је

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-1}{\Delta x} = 0$$

Слично је и $f'_y(0,0) = 0$.

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = -\frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to \begin{cases} 0, & \Delta x = 0, \Delta y \to 0 \\ -\frac{1}{2}, & \Delta x = \Delta y \to 0 \end{cases}$$

Према томе, f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

2. Функција $f : (x,y) \mapsto z$ задата је имплицитно једнакошћу

$$x^2y + xz^2 - 2yz + xz - 2 = 0, \quad z > 0.$$

Одредити Тејлоров полином другог степена функције f у околини тачке $A(1,0)$.

Решење: У тачки A је $z^2 + z - 2 = 0$, па је $z = 1$ (због $z > 0$).

$$2xy + z^2 + x \cdot 2zz'_x - 2yyz'_x + z + xz'_x = 0$$

У тачки A је $z^2 + 2zz'_x + z + z'_x = 0$, па је $\boxed{z'_x(A) = -2/3}$.

$$x^2 + 2x \cdot zz'_y - 2z - 2yz'_y + xz'_y = 0$$

У тачки A је $1 + 2z'_y - 2 + z'_y = 0$, па је $\boxed{z'_y(A) = 1/3}$.

$$2y + 2zz'_x + (2z + 2xz'_x)z'_x + 2zxz''_{x^2} - 2yz''_{x^2} + z'_x + z'_x + xz''_{x^2} = 0$$

У тачки A је $\boxed{z''_{x^2}(A) = 28/27}$.

Слично налазимо $\boxed{z''_{xy}(A) = -35/27}$ и $\boxed{z''_{y^2}(A) = 10/27}$.

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2f(A) \\
&= 1 - \frac{2}{3}dx + \frac{1}{3}dy + \frac{1}{2}\left(\frac{28}{27}dx^2 - 2\cdot\frac{35}{27}dxdy + \frac{10}{27}dy^2\right) \\
&= 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}\left(\frac{28}{27}(x-1)^2 - \frac{70}{27}(x-1)y + \frac{10}{27}y^2\right) \\
&= 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}y + \frac{14}{27}(x-1)^2 - \frac{35}{27}(x-1)y + \frac{5}{27}y^2
\end{aligned}$$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x,y,z) \mapsto 2x + 2y + 3z$ при услову $xy + yz + zx = \dfrac{15}{4}$.

Решење:

$$F = 2x + 2y + 3z + \lambda\left(xy + yz + zx - \frac{15}{4}\right)$$

$$F'_x = 2 + \lambda(y+z), \quad F'_y = 2 + \lambda(x+z), \quad F'_z = 3 + \lambda(x+y)$$

Систем за СТ

$$2 + \lambda(y+z) = 0, \quad 2 + \lambda(x+z) = 0, \quad 3 + \lambda(x+y) = 0, \quad xy + yz + zx = \frac{15}{4}$$

Из прве две једначине следи $\lambda(y-x) = 0$, односно $y = x$.

Из прве и треће једначине је $1 + \lambda x - \lambda z = 0$.

Из ове и друге једначине је $3 + 2\lambda x = 0$, односно $\lambda x = -3/2$.

Како је сада $\lambda z = -1/2$, то је $x = 3z$.

Заменом $x = y = 3z$ у четвртој једначини система добијамо $z^2 = 1/4$.

Стационарне тачке су: $A^*\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$ и $B^*\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

Довољни услови

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 0,\ F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = \lambda,\ d^2F = 2\lambda(dxdy + dydz + dzdx)$$

$$(x+y)dz + (x+z)dy + (y+z)dx = 0$$

1. У тачки A је $3dz + 2dy + 2dx = 0$, односно $dz = -\dfrac{2}{3}(dx+dy)$, па је

$$\begin{aligned}
d^2F(A^*) &= -2(dx+dy) - 2dy\left(-\frac{2}{3}\right)(dx+dy) - 2dy\left(-\frac{2}{3}\right)(dx+dy) \\
&= \frac{4}{3}dx^2 + \frac{4}{3}dy^2 + \frac{2}{3}dxdy \\
&= \frac{1}{3}(dx+dy)^2 + dx^2 + dy^2
\end{aligned}$$

Како је $d^2F(A^*) > 0$ за $dx^2 + dy^2 \neq 0$, функција f у тачки A има условни локални минимум.

2. Слично се показује да f у тачки B има условни локални максимум.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (22.4.2006) - Група 2

1. Дата је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

а) Доказати да је функција f непрекидна у тачки $(0,0)$.

б) Испитати да ли је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Решење: *а*) Како је $f(0,0) = 0$ и

$$|f(x,y)| \leq \frac{|y|^3}{x^2+y^2} + \frac{|x^3|}{x^2+y^2} \leq |y| + |x| \to 0, \quad (x,y) \to (0,0),$$

то $f(x,y) \to f(0,0)$ када $(x,y) \to (0,0)$, што значи да је функција f непрекидна у тачки $(0,0)$.

Друго решење. Ако су (ρ, φ) поларне координате, тада је $f(x,y) = \rho(\sin^3\varphi - \cos^3\varphi)$. Из неједнакости

$$|f(x,y)| = \rho|\sin^3\varphi - \cos^3\varphi| \leq 2\rho$$

следи да $f(x,y) \to 0$ када $\rho \to 0$.

b) Парцијални изводи функције f у тачки $(0,0)$ постоје,

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x^3}{\Delta x^2 \cdot \Delta x} = -1,$$

$$f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y^3}{\Delta y^2 \cdot \Delta y} = 1.$$

Како је

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y &= \frac{\Delta y^3 - \Delta x^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \Delta x - \Delta y \\ &= \frac{\Delta x \Delta y^2 - \Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \end{aligned}$$

то је

$$\frac{\Delta f(0,0) - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x \Delta y^2 - \Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{3/2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0, \ \Delta y \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & \Delta y = -\Delta x \neq 0 \end{cases}$$

Према томе, не важи

$$\Delta f(0,0) - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0),$$

што значи да функција f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

2. Функција $f : (x,y) \mapsto z$ задата је имплицитно једнакошћу

$$2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2 = 1, \quad z > 0.$$

Одредити Тејлоров полином другог степена функције f у околини тачке $A(0,1)$.

Решење: Диференцирањем у датој једнакости по x и по y добијамо

$$4x - y + 2z + 2xz'_x + 2z \cdot z'_x = 0$$

$$-x + 2xz'_y - 1 + 3y^2 + 2z \cdot z'_y = 0,$$

а затим диференцирањем у прврвој једнакости по x и по y, а у другој по y имамо

$$4 + 2z'_x + 2z'_x + 2xz''_{x^2} + 2z'_x z'_x + 2zz''_{x^2} = 0,$$

$$-1 + 2z'_y + 2xz''_{xy} + 2z'_y z'_x + 2zz''_{xy} = 0,$$

$$2xz''_{y^2} + 6y + 2zz''_{y^2} + 2z'_y z'_y = 0.$$

Из добијених једнакости налазимо да је

$$z'_x = \frac{y - 4x - 2z}{2x + 2z}, \quad z'_y = \frac{x + 1 - 3y^2}{2x + 2z}, \quad z''_{x^2} = -\frac{4 + 4z'_x + 2{z'_x}^2}{2x + 2z}$$

$$z''_{y^2} = -\frac{6y + 2{z'_y}^2}{2x + 2z}, \quad z''_{xy} = \frac{1 - 2z'_y - 2z'_x z'_y}{2x + 2z},$$

$$z'_x(A) = -\frac{1}{2},\ z'_y(A) = -1,\ z''_{x^2}(A) = -\frac{5}{4},\ z''_{y^2}(A) = -4,\ z''_{xy}(A) = 1.$$

За $x = 0$ и $y = 1$ из дате једнакости добијамо $z^2 = 1$, што значи да је $f(A) = 1$, а из израза за парцијалне изводе имамо да је

$$df(A) = f'_x(A)\Delta x + f'_y(A)\Delta y = -\frac{1}{2}\Delta x - \Delta y,$$

$$d^2 f(A) = f''_{x^2}(A)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(A)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(A)\Delta y^2 = \frac{-5}{4}\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y - 4\Delta y^2.$$

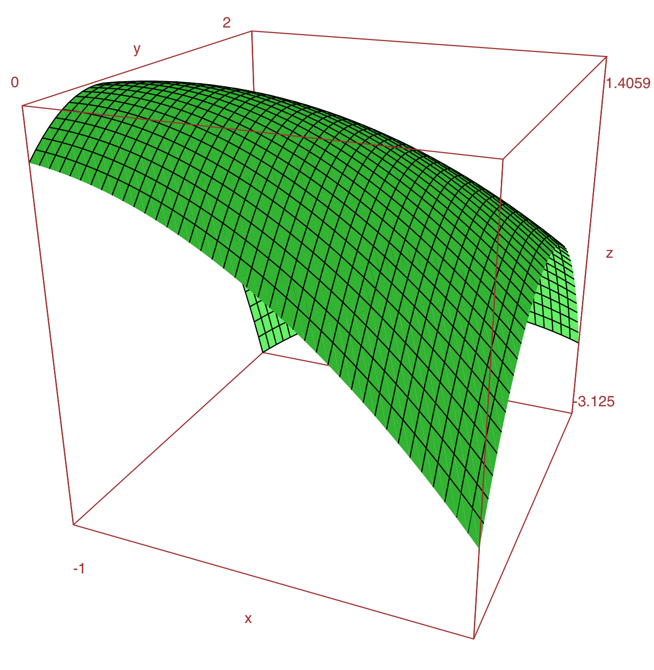
Према томе,

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2 f(A) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\Delta x - \Delta y + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y - 4\Delta y^2\right). \end{aligned}$$

Заменом $\Delta x = x$ и $\Delta y = y - 1$ добијамо да је

$$T_2(x, y) = -\frac{3}{2}x + 3y - \frac{5}{8}x^2 + xy - 2y^2.$$

График полинома T_2 дат је на следећој слици.



Тејлоров полином $T_2(x, y)$ у околини тачке $A(0, 1)$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x, y, z) \mapsto x + 2y - z$ при услову

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6.$$

Решење: Диференцирањем Лагранжове функције

$$F(x, y; \lambda) = x + 2y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6)$$

добијамо

$$F'_x = 1 + 2\lambda x, \quad F'_y = 2 + 2\lambda y, \quad F'_z = -1 + 2\lambda z.$$

Из система $F'_x = 0,\ F'_y = 0,\ F'_z = 0,\ F = 0$ следи да је

$$x = -\frac{1}{2\lambda},\ y = -\frac{1}{\lambda},\ z = \frac{1}{2\lambda},\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 6,\ \lambda^2 = \frac{1}{4},\ \lambda = \pm\frac{1}{2}.$$

Стационарне тачке су

$$A(-1, -2, 1),\ \lambda_A = \frac{1}{2}, \quad B(1, 2, -1),\ \lambda_B = -\frac{1}{2},$$

Како је

$$F''_{x^2} - F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = F''_{xz} = F''_{yz} = 0,$$

то је

$$d^2F(A) = dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0, \quad d^2F(B) = -(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0.$$

Према томе,

$$f_{\min} = f(A) = -6, \quad f_{\max} = f(B) = 6$$

.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (22.4.2006) - Група 6

1. Дата је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

а) Доказати да је функција f непрекидна у тачки $(0,0)$.

б) Испитати да ли је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Решење: *a*) Како је $f(0,0) = 0$ и

$$|f(x,y)| \leq |xy| \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |xy| \to 0, \quad (x,y) \to (0,0),$$

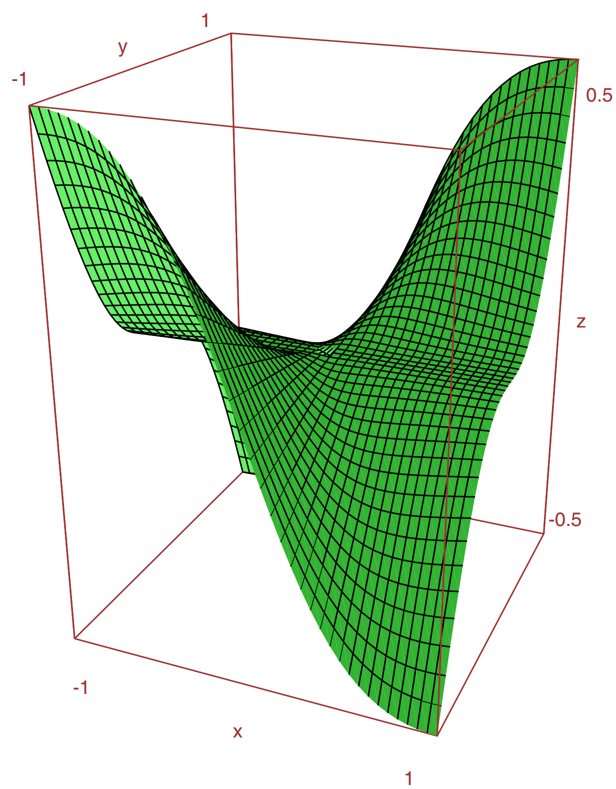
то $f(x,y) \to f(0,0)$ када $(x,y) \to (0,0)$, што значи да је функција f непрекидна у тачки $(0,0)$.

Друго решење. Ако су (ρ, φ) поларне координате, тада је $f(x,y) = \rho^2 \cos\varphi \sin^3\varphi$. Из неједнакости

$$|f(x,y)| = \rho^2 |\cos\varphi \sin^3\varphi| \leq \rho^2$$

следи да $f(x,y) \to 0$ када $\rho \to 0$.

На следећој слици је график функције f и јасно се види да је функција непрекидна у тачки $(0,0)$.



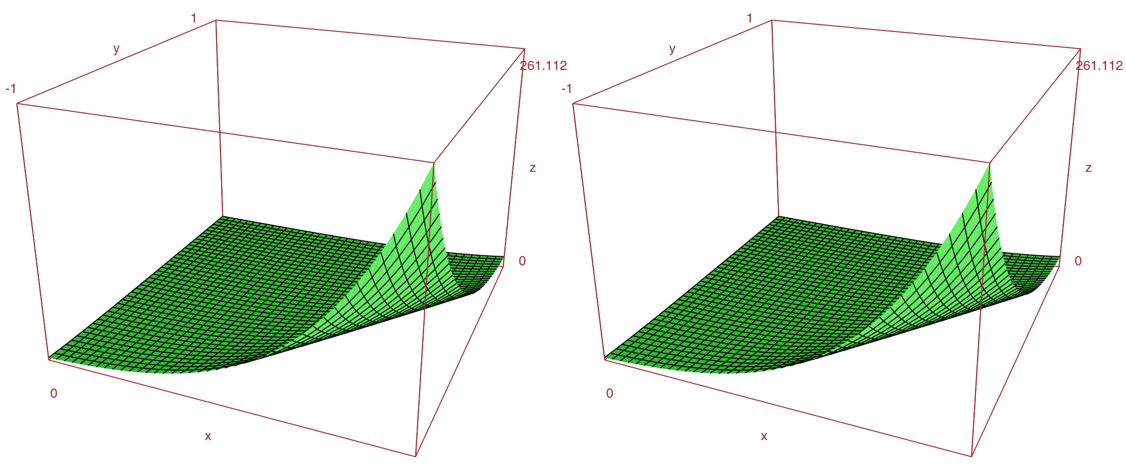
b) Парцијални изводи функције f у тачки $(0,0)$ постоје,

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0, \quad f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

Како је
$$\frac{\Delta f(0,0) - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x \Delta y^3}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{3/2}} = \rho \cos\varphi \sin^3\varphi,$$
где су (ρ, φ) поларне координате, то је
$$\Delta f(0,0) - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$
Према томе, функција f је диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

2. Одредити Тејлоров полином другог степена функције $f : (x, y) \mapsto e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2)$ у околини тачке $A(1, 0)$.

Решење: Налажењем парцијалних извода функције f добијамо да је у тачки (x, y)
$$f'_x = e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 2y), \quad f'_y = e^{x-y}(-2x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y),$$
$$f''_{x^2} = e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 4y + 4), \quad f''_{xy} = e^{x-y}(-2x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 2),$$
$$f''_{y^2} = e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 2).$$
Специјално, у тачки A је
$$f'_x(A) = 6e, \ f'_y(A) = -4e. \ f''_{x^2}(A) = 14e, \ f''_{xy}(A) = -10e, \ f''_{y^2}(A) = 8e.$$
Према томе,
$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2 f(A) \\ &= 2e + 6e(x-1) - 4ey + \frac{1}{2}(14e(x-1)^2 + 2(-10e)(x-1)y + 8ey^2) \\ &= 7ex^2 + 4ey^2 - 10exy - 8ex + 6ey + 3e. \end{aligned}$$



Графици функције f (лево) и Тејлоровог полинома T_2 (десно) у околини тачке A

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу $x^2 + xy + y^2 + z^2 = 3y = 1, \ z > 0$.

Решење: Диференцирањем у датој једнакости по x и по y добијамо једнакости
$$2x + y + 2zz'_x = 0, \quad x + 2y + 2zz'_y - 3 = 0 \tag{1}$$

из којих следи да је

$$z'_x = -\frac{2x+y}{2z}, \quad z'_y = \frac{3-x-2y}{2z}.$$

Решавањем система $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, односно $2x+y=0$, $x+2y=3$, налазимо стационарну тачку $A(-1,2)$. Диференцирањем у једнакостима (1) добијамо једнакости

$$2+2z'_x z'_x + 2zz''_{x^2} = 0, \quad 1+2z'_y z'_x + 2zz''_{xy} = 0, \quad 2+2z'_y z'_y + 2zz''_{x^2} = 0$$

из којих следи да је

$$z''_{x^2}(A) = -\frac{1}{2} = a, \quad z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{2} = c, \quad z''_{xy}(A) = -\frac{1}{4} = b.$$

Како је $ac - b^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16} > 0$ и $a < 0$, то је $z_{\max} = z(A) = 2$.

Драган Ђорић

Први колоквијум из МАТЕМАТИКЕ 2 *
(2007, трећа група задатака)

Драган Ђорић

Задатак 1 *Испитати непрекидност функције* $f : R^2 \to R$ *у тачки* $(0,0)$ *ако је*

$$f(x,y) = (x-y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

за $(x,y) \neq (0,0)$ *и* $f(0,0) = 0$.

Решење. Из неједнакости

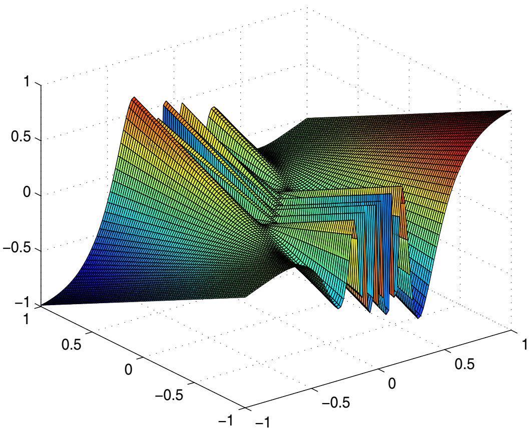
$$|f(x,y) \leq |x-y| \leq |x| + |y|$$

следи $|f(x,y)| \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$, што значи да и $f(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$. Према томе,

$$f(x,y) \to f(0,0), \quad (x,y) \to (0,0),$$

па је функција f непрекидна у $(0,0)$.

На следећој слици је дат график функције f у околини тачке $(0,0)$.



*Овде су дата комплетна решења, а не само одговори који су бодовани. Поред тога, трећи задатак је решен без ограничења $x, y < 0$.

Задатак 2 *Функција $f : R^2 \to$ дата је имлицитно једнакошћу*

$$x + y + z + xyz - xy^2 + yz^2 = 0,$$

где је $z = f(x, y)$. Одредити парцијалне изводе првог и другог реда и Тејлоров полином другог реда функције f у околини тачке $M(1, 0)$.

Решење. Диференцирањем леве и десне стране дате једнакости по x добијамо

$$1 + z'_x + yz + xyz'_x - y^2 + 2yzz'_x = 0, \tag{1}$$

одакле следи да је

$$z'_x = \frac{y^2 - yz - 1}{1 + xy + 2yz}.$$

Слично диференцирањем по y добијамо

$$1 + z'_y + xz + xyz'_y - 2xy + z^2 + 2yzz'_y = 0, \tag{2}$$

односно

$$z'_y = \frac{2xy - z^2 - 1 - xz}{1 + xy + 2yz}.$$

Диференцирањем леве стране једнакости (1) по x добијамо

$$z''_{x^2} = -\frac{2yz'_x + 2yz'^2_x}{1 + xy + 2yz},$$

а диференцирањем по y добијамо

$$z''_{xy} = \frac{2y - 2zz'_x - xz'_x - yz'_y - z}{1 + xy + 2yz}.$$

Слично из једнакости (2) диференцирањем по y добијамо

$$z''_{y^2} = \frac{2x - 4zz'_y - 2yz'^2_y - 2xz'_y}{1 + xy + 2yz}.$$

Замено вредности $x = 1$, $y = 0$ и $z = -1$ (следи из дате једнакости) у изразима за парцијалне изводе налазимо да је

$$z'_x(M) = z'_y(M) = -1, \quad z''_{x^2}(M) = z''_{y^2}(M) = z''_{xy}(M) = 0.$$

Према томе,

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(M) + df(M) + \frac{1}{2}d^2 f(M) \\ &= -1 - dx - dy \\ &= -1 - (x - 1) - y \\ &= -x - y. \end{aligned}$$

Задатак 3 *Функције $f : R^2 \to R$ и $\varphi : R^2 \to R$ дефинисане су са*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy, \quad \varphi(x, y) = 3x^2 + y^2 - 12.$$

Одредити локалне екстремуме функције f при услову $\varphi(x, y) = 0$.

Решење. Парцијални изводи Лагранжове функције $F = f + \lambda\varphi$ ($\lambda \in R$) дати су са

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= 2x - 2y + 6\lambda x, \\ F'_y(x, y) &= 2y - 2x + 2\lambda y. \end{aligned} \tag{3}$$

Из једнакости (3) налазимо парцијалне изводе другог реда

$$F''_{x^2}(x, y) = 2 + 6\lambda, \quad F''_{xy}(x, y) = -2, \quad F''_{y^2}(x, y) = 2 + 2\lambda.$$

Услови за стационарне тачке

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad \varphi = 0$$

дају систем

$$x - y + 3\lambda x = 0, \quad y - x + \lambda y = 0, \quad 3x^2 + y^2 = 12.$$

Сабирањем прве две једначине овог система добијамо $\lambda(3x + y) = 0$.

1. Ако је $\lambda = 0$, тада је $x = y$ (из прве једначине система), па је $x^2 = 3$ (из треће једначине). Дакле у овом случају имамо две стационарне тачке: $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $B(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. При томе је $dy = -3dx$ и $dx \neq 0$ (из услова $\varphi = 0$), па је

$$d^2 f(A) = 2(dx^2 2dxdy + dy^2) = 2(dx - dy)^2 = 32dx^2 > 0.$$

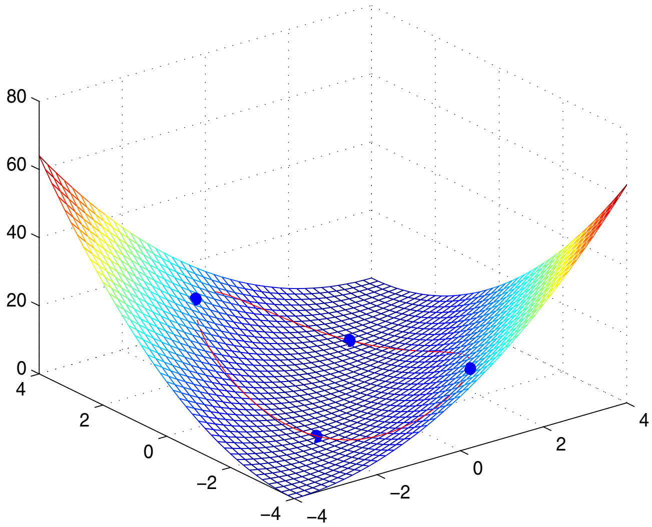
Исто важи и за тачку B, што значи да у тачкама A и B функција f има локални минимум при услову $\varphi = 0$.

2. Ако је $3x + y = 0$, тада је $y = -3x$, па из треће једначине следи $x^2 = 1$. Према томе, имамо још две стационарне тачке: $C(1, -3)$ и $D(-1, 3)$. За обе је $\lambda = -4/3$. Из услова $\varphi = 0$ следи да је $dy = dx \neq 0$ у тачкама C и D, па је

$$d^2 f(C) = d^2 f(D) = -6dx^2 - 4dxdy - \frac{2}{3}dy^2 = -\frac{32}{3}dx^2 < 0.$$

Према томе, функција f у тачкама C и D има локални максимум при услову $\varphi = 0$.

На слици је приказан график функције, при чему су истакнуте вредности при услову, као и тачке локалних екстремума.



МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (19.4.2008) - Група 5

1. Испитати непрекидност функције $f : R^2 \to R$ у тачки $(0,0)$ ако је

$$a)\ f(x.y) = \begin{cases} \dfrac{x+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad b)\ f(x.y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Решење: $a)$ Из $f(0,0) = 0$ и $f(x,0) = \dfrac{1}{x} \to +\infty$ када $x \to 0_+$ (или $f(x,\sqrt{x}) \to 1$ када $x \to 0_+$) следи да функција f у тачки $(0,0)$ има прекид, односно није непрекидна.

$b)$ Из неједнакости

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \leq |x| + |y|$$

следи $|f(x,y)| \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$, а то значи да и $f(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$. Како је $f(0,0) = 0$, функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x.y) \mapsto z$ дефинисане имплицитно са

$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0.$$

Решење: Ако је $F(x,y,z) = z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8$, тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz+2x}{3z^2+xy}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz+4y}{3z^2+xy}.$$

Стационарне тачке добијамо решавањем система

$$2x + zy = 0, \quad zx + 4y = 0, \quad F(x,y,z) = 0.$$

1. Ако је $z^2 \neq 8$, прве две једначине имају тривијално решење (по x и y), при чему из треће једначине ($F = 0$) добијамо $z = -2$. У том случају имамо стационарну тачку $A(0,0)$ за коју је $z(A) = -2$.
2. Ако је $z^2 = 8$, односно $z = 2\sqrt{2}$ или $z = -2\sqrt{2}$, систем нема решења.

Према томе, једина стационарна тачка је $A(0,0)$. Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо $z''_{x^2}(A) = -\dfrac{1}{6}$, $z''_{xy}(A) = \dfrac{1}{6}$ и $z''_{y^2}(A) = -\dfrac{1}{3}$. Како је

$$z''_{x^2}(A) \cdot z''_{y^2}(A) - \left(z''_{xy}(A)\right)^2 > 0, \quad z''_{x^2}(A) < 0,$$

то је $f_{\max} = f(A) = -2$.

3. Дати су функција $f : R^2 \to R$ и скуп $\mathcal{D} \subset R^2$ са

$$f(x, y) = 2(x+2)^2 + 3(y-1)^2 + 1, \quad \mathcal{D} = \{(x, y)\ :\ 0 \le y \le x+4,\ x \le 0\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције f на скупу D.

Прво решење: Функција f има најмању вредност 1 и то у тачки $A(-2, 1)$. Из $A \in \mathcal{D}$ следи да је $\min\limits_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(A) = 1$.

Како је скуп $\mathcal{D}$ је троугао са теменима $E(-4, 0)$, $F(0, 4)$ и $G(0, 0)$ и како је график функције f параболоид (елиптички) са теменом у тачки A, највећа вредност функције на скупу $\mathcal{D}$ је у некој од тачака E, F или G. Пошто је $f(E) = f(G) = 12$ и $f(F) = 36$, то је $\max\limits_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(F) = 36$.

Друго решење: Како је $f'_x = 4(x+2)$ и $f'_y = 6(y-1)$, тачка A је јединa стационарна тачка функције f и она припада скупу $\mathcal{D}$. Функције $f(0, y)$, $f(x, 0)$ и $f(x, x+4)$ (које одређују границу скупа $\mathcal{D}$) имају стационарне тачке $B(0, 1)$, $C(-2, 0)$ и $D(-13/5, 7/5)$, при чему је $f(B) = 9$, $f(C) = 4$ и $f(D) = 11/5$. Упоређујући вредности функције f у тачкама A, B, C, D, E, F, G видимо да је

$$\min_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(A) = 1, \quad \max_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(F) = 36.$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (19.4.2008) - Група 6

1. Испитати непрекидност функције $f : R^2 \to R$ у тачки $(0,0)$ ако је

$$a)\ f(x.y) = \begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad b)\ f(x.y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^5}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Решење: $a)$ Из неједнакости

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^5}{x^4+y^4} + \frac{|y|^5}{x^4+y^4} = \frac{x^4}{x^4+y^4}|x| + \frac{y^4}{x^4+y^4}|y| \leq |x| + |y|$$

следи $|f(x,y)| \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$, а то значи да и $f(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$. Како је $f(0,0) = 0$, функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$.

$b)$ Из $f(0,0) = 0$ и $f(x,0) = \dfrac{1}{x} \to +\infty$ када $x \to 0_+$ следи да функција f у тачки $(0,0)$ има прекид, односно није непрекидна.

2. Одредити Тејлоров полином другог реда који у околини тачке $M(1,-1)$ апроксимира функцију $f : (x.y) \mapsto z$ дефинисану имплицитно са

$$z^3 + xyz + x^2 - 2y^2 + 1 = 0, \quad z > 0.$$

Решење: За $x = 1$ и $y = -1$ из дате једнакости и услова $z > 0$ добијамо $\boxed{z(M) = 1}$.
Диференцирањем по x дате једнакости имамо

$$3z^2 z'_x + yz + xyz'_x + 2x = 0, \tag{1}$$

одакле заменом $x = z = 1$, $y = -1$ добијамо $\boxed{z'_x(M) = -1/2}$.
Слично, диференцирањем дате једнакости по y имамо

$$3z^2 z'_y + xz + xyz'_y - 4y = 0, \tag{2}$$

одакле добијамо $\boxed{z'_y(M) = -5/2}$.
Диференцирањем једнакости (1) по x и заменом $x = z = 1$, $y = -$ и $z'_x = -1/2$ добијамо $\boxed{z''_{x^2}(M) = -9/4}$, а диференцирањем једнакости (1) по y и заменом наведених вредности, као и $z'_y = -5/2$, добијамо $z''_{xy}(M) = -21/4$.
Диференцирањем једнакости (2) по y и заменом одговарајућих вредности добијамо $\boxed{z''_{y^2}(M) = -57/4}$.
Узимајући у обзир вредности парцијалних извода првог и другог реда функције f у тачки M имамо

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= z(A) + dz(A) + \frac{1}{2}d^2z(A) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{2}(y+1) - \frac{9}{8}(x-1)^2 - \frac{21}{4}(x-1)(y+1) - \frac{57}{8}(y+1)^2 \\ &= -4 - \frac{7}{2}x - \frac{23}{2}y - \frac{9}{8}x^2 - \frac{57}{8}y^2 - \frac{21}{4}xy. \end{aligned}$$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : R^+ \times R^+ \to R$ дате са $f(x, y) = x^2 + y^2$ при услову $xy = x + y$.

Прво решење: Из услова следи $y = \dfrac{x}{x-1}$ (јер је $x \neq 1$), па је (при том услову)

$$f(x, y) = x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2} = g(x).$$

Како је

$$g'(x) = \frac{2x}{(x-1)^3}(x-2)(x^2 - x + 1),$$

то функција g у тачки $x = 2$ има локални минимум. Према томе, $\boxed{f_{\min, xy=x+y} = f(2, 2) = 8}$.

Друго решење: За Лагранжову функцију F, где је

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - x - y),$$

имамо

$$F'_x = 2x + \lambda y - \lambda, \quad F'_y = 2y + \lambda x - \lambda.$$

Из једнакости $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$ добијамо $2(x - y) = \lambda(x - y)$.

Ако је $x = y$, тада из датог услова следи $x = 2$ (јер је $x > 0$) и $\lambda = -4$, па имамо стационарну тачку $A(2, 2)$. Ако је $\lambda = 2$, тада имамо систем $x + y = 1$, $xy = 1$ који нема реалних решења.

Како је $F''_{x^2} = 2$, $F''_{xy} = \lambda$, $F''_{y^2} = 2$ и $dy = -dx$ при датом услову, то је

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= 2dx^2 + 2\lambda dxdy + 2dy^2 \\ &= 2dx^2 - 8dxdy + 2dy^2 \\ &= 12dx^2. \end{aligned}$$

Према томе, $d^2F(A) > 0$ за $dx \neq 0$, па f у тачки A има локални минимум.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (25.4.2009) - Група 7

1. Дата је функција $f:(x,y)\mapsto 3xy^3-x^2y+4x$.

$a)$ Одредити градијент функције f у тачки $M(2,-2)$.

$b)$ Израчунати извод функције f у тачки M у правцу вектора $v=(4,-3)$.

$c)$ Одредити једначину тангентне равни и једначину нормале површи дефинисане једначином $z=f(x,y)$ у тачки $(2,-2,f(M))$.

Решење: $a)$ Из $f'_x=3y^3-2xy+4$ и $f'_y=9xy^2-x^2$ налазимо

$$\nabla f(M)=(f'_x(M),f'_y(M))=(-12,68).$$

На слици (Сл.1) су дати градијенти и у тачкама из околине тачке M.

$b)$ Како је f диференцијабилна у R^2 (јер су f'_x и f'_y непрекидне функције у R^2), то је

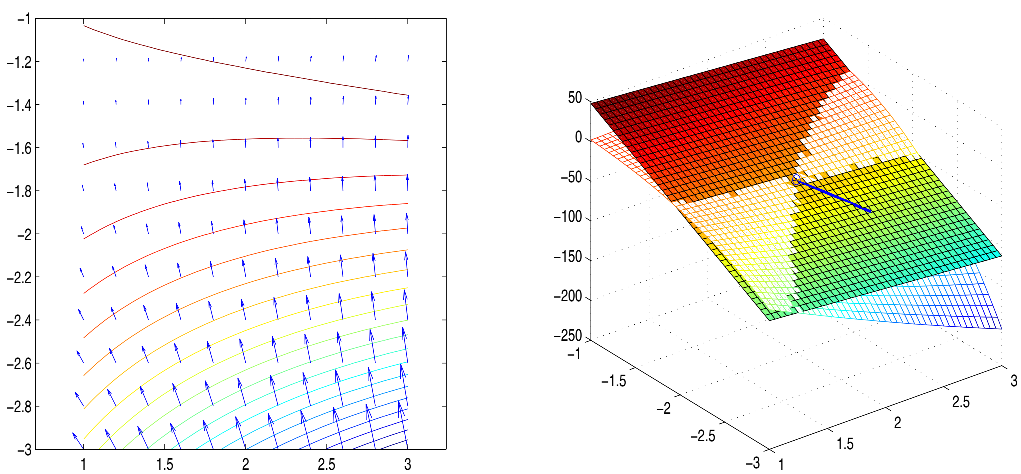
$$f'_v(M)=\nabla f(M)\cdot\frac{v}{|v|}=(-12,68)\cdot\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=-\frac{252}{5}.$$

$c)$ Пошто је $f(M)=-32$, једначина тангентне равни (Сл.1) је

$$z+32=-12(x-2)+68(y+2),$$

односно $12x-68y+z-128=0$, а једначина нормале (Сл.1) је

$$\frac{x-2}{-12}=\frac{y+2}{68}=\frac{z+32}{-1}.$$



Сл.1 Поље градијената (лево) и графици функције и тангентне равни (десно) у околини тачке M. Због различите размере оса на слици није уочљиво да је угао између тангентне равни и нормале прав. Међутим, са слике се види да тангентна раван после додира са графиком функције f у неким деловима врло брзо пресеца график.

2. Одредити Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $D(-1,-1)$ апроксимира функцију $f:(x,y)\mapsto z$ дефинисану са

$$3xz + yz + \ln xy + 4 = 0.$$

Решење: За $x=-1$ и $y=-1$ из дате једнакости добијамо $\boxed{z(D)=1}$.

Диференцирањем по x дате једнакости имамо

$$3z + 3xz'_x + yz'_x + \frac{1}{x} = 0, \tag{1}$$

одакле заменом $x=y=-1$, $z=1$ добијамо $\boxed{z'_x(D)=1/2}$.

Слично, диференцирањем дате једнакости по y имамо

$$3xz'_y + z + yz'_y + \frac{1}{y} = 0, \tag{2}$$

одакле добијамо $\boxed{z'_y(D)=0}$.

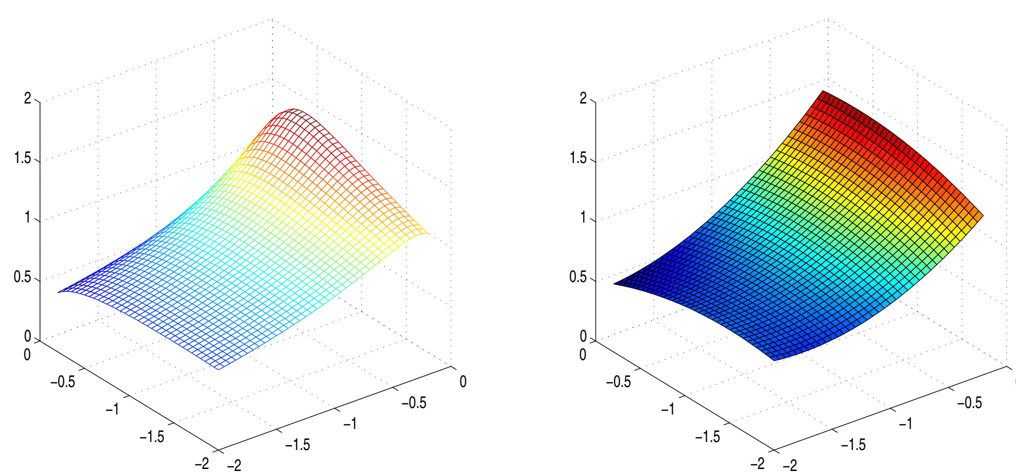
Диференцирањем једнакости (**??**) по x и заменом $x=y=-1$, $z=1$ и $z'_x=1/2$ добијамо $\boxed{z''_{x^2}(D)=1/2}$, а диференцирањем једнакости (**??**) по y и заменом наведених вредности, као и $z'_y=0$, добијамо $z''_{xy}(D)=1/8$.

Диференцирањем једнакости (**??**) по y и заменом одговарајућих вредности добијамо $\boxed{z''_{y^2}(D)=-1/4}$.

Узимајући у обзир вредности парцијалних извода првог и другог реда функције f у тачки D имамо

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= z(D) + dz(D) + \frac{1}{2}d^2z(D) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2\cdot\frac{1}{8}(x+1)(y+1) - \frac{1}{4}(y+1)^2\right] \\ &= \frac{7}{4} + \frac{9}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}xy. \end{aligned}$$

Напомена: Задатак је решаван сматрајући да је функција f имплицитно дефинисана датом једнакошћу. Међутим, из те једнакости имамо и експлицитно вредност функције f (видети Друго решење.) Са графика функције f и добијеног Тејлоровог полинома (Сл.2) добијамо утисак о томе како Тејлоров полином апроксимира дату функцију.



Сл.2 Графици функције f (лево) и Тејлоровог полинома T_2 (десно) у околини тачке D

Друго решење: Из дате једнакости следи да је

$$f(x,y)=z=-\frac{4+\ln xy}{3x+y}, \quad xy>0.$$

Налажењем парцијалних извода добијамо

$$f'_x=\frac{9x-y+3x\ln xy}{x(3x+y)^2}, \quad f'_y=-\frac{3x-3y-y\ln xy}{y(3x+y)^2},$$

$$f''_{x^2}=-\frac{45x^2-12xy-y^2+18x^2\ln xy}{x^2(3x+y)^3},$$

$$f''_{xy}=\frac{-18xy+y^2+9x^2-6xy\ln xy}{xy(3x+y)^3},$$

$$f''_{y^2}=\frac{9x^2+12xy-5y^2-2y^2\ln xy}{y^2(3x+y)^3}.$$

Заменом $x=y=-1$ у добијеним парцијалним изводима имамо

$$f'_x(D)=\frac{1}{2}, \quad f'_y(D)=0, \quad f''_{x^2}(D)=\frac{1}{2}, \quad f''_{xy}(D)=\frac{1}{8}, \quad f''_{y^2}(D)=-\frac{1}{4},$$

а даље исто као у Првом решењу.

3. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto 4xy-5$ при услову $x^2+y^2=18$.

Прво решење: За Лагранжову функцију F, где је

$$F(x,y)=4xy-5+\lambda(x^2+y^2-18),$$

имамо

$$F'_x=4y+2\lambda x, \quad F'_y=4x+2\lambda y.$$

Из једнакости $F'_x=0$ и $F'_y=0$ добијамо $(y-x)(2-\lambda)=0$.

Ако је $x=y$, тада из датог услова следи $x^2=9$, па имамо стационарне тачке $A(3,3;-2)$ и $C(-3,-3;-2)$ (функције F). Ако је $\lambda=2$, тада је $y=-x$, па имамо стационарне тачке $B(3,-3;2)$ и $D(-3,3;2)$.

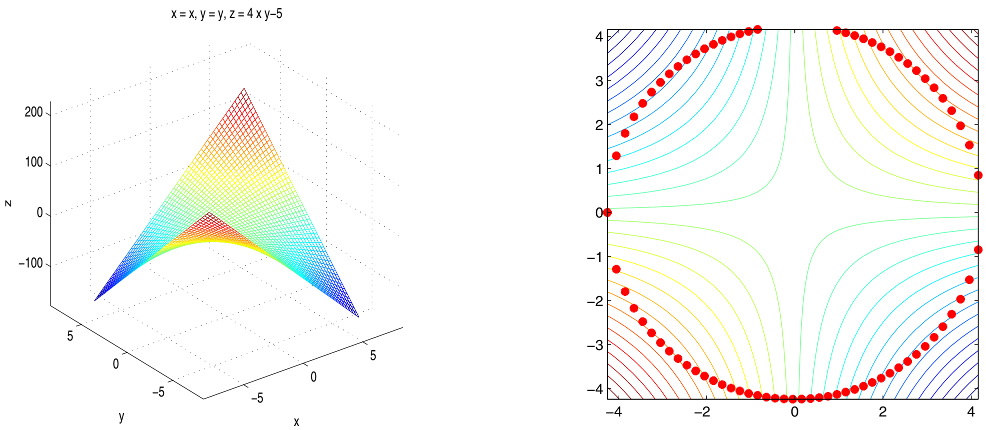
Како је $F''_{x^2}=2\lambda$, $F''_{xy}=4$, $F''_{y^2}=2\lambda$ и $dy=-dx$ (при датом услову) за тачке A и C, односно $dy=dx$ за тачке B и D, то је

$$\begin{aligned} d^2F(A)=d^2F(C) &= -4dx^2+8dxdy-4dy^2 \\ &= -16dx^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2F(B)=d^2F(D) &= 4dx^2+8dxdy+4dy^2 \\ &= 16dx^2. \end{aligned}$$

Према томе, за $dx\neq 0$ је $d^2F(A)=d^2F(C)<0$ и $d^2F(B)=d^2F(D)>0$, па f у тачкама A и C има условни локални минимум (једнак -41), а у тачкама B и D има условни локални максимум (једнак 31).

Друго решење: Ниво линија $4xy-5=C$ површи дефинисане функцијом f и крива дефинисана условом $x^2+y^2=18$ се додирују ако је $y+xy'=0$ и $x+yy'=0$, односно ако је $x^2=y^2$. Према томе, једине могуће тачке условног локалног екстремума су тачке A, B C и D (из првог решења). На слици (Сл.3) се лако уочавају додирне тачке ниво линија и криве $\varphi=0$.



Сл.3 График функције f (лево) и ниво̂ линије функције f заједно са линијом дефинисаном условом $\varphi = 0$ (десно).

Функције f и $g : (x, y) \mapsto 2xy$ достижу локални минимум у истим тачкама. Како је, при датом услову,

$$g(x, y) = 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (x + y)^2 - 18,$$

минимум функције g се достиже за $y = -x$, односно у тачкама B и D.

Ако f у датој тачки има локални екстремум, тада и $h : (x, y) \mapsto x^2y^2$ има у тој истој тачки локални екстремум. Како је, при датом услову,

$$h(x, y) = x^2y^2 = x^2(18 - y^2) = 18x^2 - x^4 = \varphi(x)$$

и

$$\varphi'(x) = 4x(9 - x^2), \quad \varphi''(x) = 36 - 12x^2,$$

функција h има условне локалне максимуме у тачкама A, B, C и D, а функција f у тачкама A и C. На графику функције f (Сл.3) се лако уочавају тачке условних локалних екстремума, као и то да функција нема локалних екстремума (безусловних).

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (25.4.2009) - Група 8

1. Дата је функција $f : (x, y) \mapsto 2x^3y + xy^2 - 3y + 1$.

$a)$ Одредити градијент функције f у тачки $M(-2, 3)$.

$b)$ Израчунати извод функције f у тачки M у правцу вектора $v = (-4, -3)$.

$c)$ Одредити једначину тангентне равни и једначину нормале површи дефинисане једначином $z = f(x, y)$ у тачки $(-2, 3, f(M))$.

Решење: $a)$ Из $f'_x = 6x^2 + y^2$ и $f'_y = 2x^3 + 2xy - 3$ налазимо

$$\nabla f(M) = (f'_x(M), f'_y(M)) = (81, -31).$$

На слици (Сл.1) су дати градијенти и у тачкама из околине тачке M.

$b)$ Како је f диференцијабилна у R^2 (јер су f'_x и f'_y непрекидне функције у R^2), то је

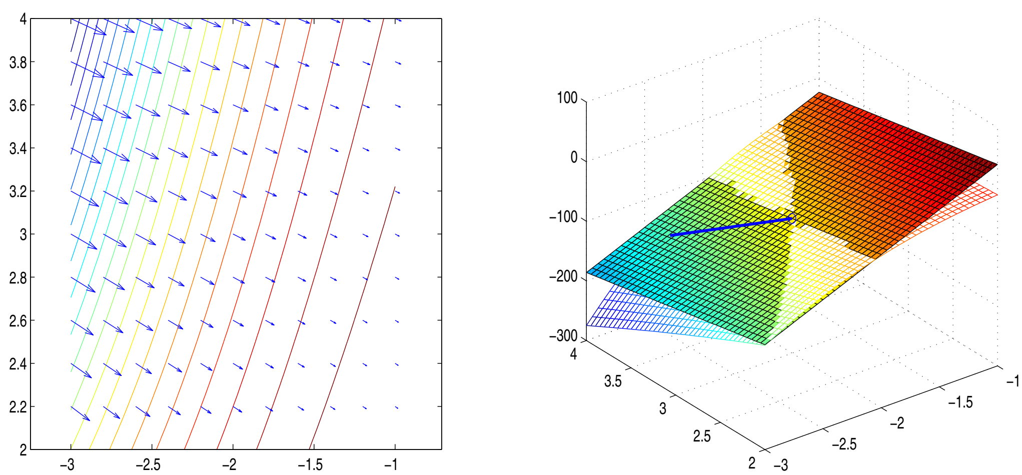
$$f'_v(M) = \nabla f(M) \cdot \frac{v}{|v|} = (81, -31) \cdot \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -\frac{231}{5}.$$

$c)$ Пошто је $f(M) = -74$, једначина тангентне равни (Сл.1) је

$$z + 74 = 81(x + 2) - 31(y - 3),$$

односно $81x - 31y - z + 181 = 0$, а једначина нормале (Сл.1) је

$$\frac{x + 2}{81} = \frac{y - 3}{-31} = \frac{z + 74}{-1}.$$



Сл.1 Поље градијената (лево) и графици функције и тангентне равни (десно) у околини тачке M. Због различите размере оса на слици није уочљиво да је угао између тангентне равни и нормале прав. Међутим, са слике се види да тангентна раван после додира са графиком функције f у неким деловима врло брзо пресеца график.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto z$ дефинисане једнакошћу

$$3xz+yz-\ln(3xy)=2.$$

Прво решење: Диференцирањем по x дате једнакости имамо

$$3z+3xz'_x+yz'_x-\frac{1}{x}=0, \tag{1}$$

одакле добијамо $\boxed{z'_x=\dfrac{1-3xz}{3x^2+xy}}$. Приметимо да је $3x^2+xy\neq 0$ јер је $xy>0$.

Слично, диференцирањем дате једнакости по y имамо

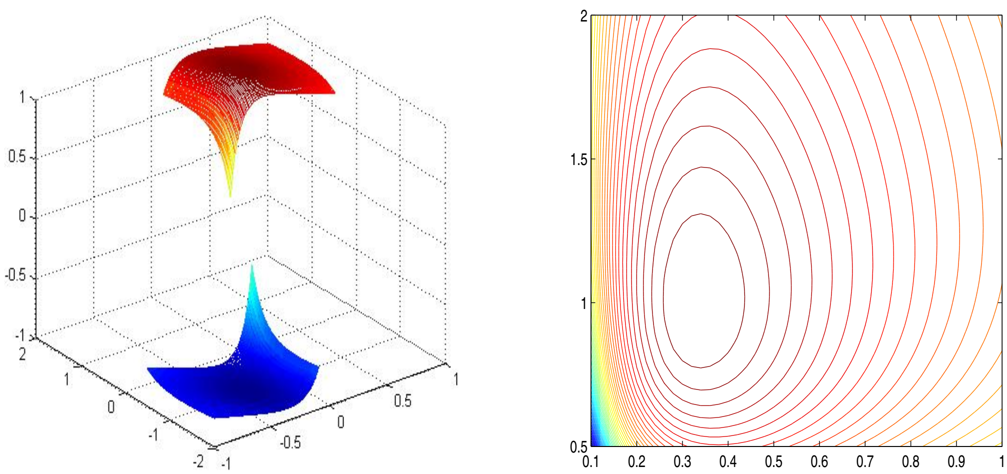
$$3xz'_y+z+yz'_y-\frac{1}{y}=0, \tag{2}$$

одакле добијамо $\boxed{z'_y=\dfrac{1-yz}{3xy+y^2}}$.

Из система

$$1-3xz=0,\quad 1-yz=0,\quad 3xz+yz-\ln(3xy)=2$$

добијамо две стационарне тачке $A(1/3,1)$ и $B(-1/3,-1)$, при чему је $z(A)=1$ и $z(B)=-1$. Са слике (Сл.2) је јасно да су у тим тачкама локални екстремуми функције f.



Сл.2 График функције f (лево) и ниво линије (десно) у околини тачке A (слично је и у околини тачке B).

Диференцирањем једнакости (1) најпре по x, а затим и по y, као и једнакости (2) по y, узимајући у обзир да је $z'_x(A)=z'_y(A)=z'_x(B)=z'_y(B)=0$, добијамо да је у стационарним тачкама

$$(3x+y)z''_{x^2}+\frac{1}{x^2}=0,\quad z''_{xy}=0,\quad (3x+y)z''_{y^2}+\frac{1}{y^2}=0.$$

Заменом одговарајућих вредности налазимо

$$\boxed{z''_{x^2}(A)=-z''_{x^2}(B)=-9/2}\quad \text{и}\quad \boxed{z''_{y^2}(A)=-z''_{y^2}(B)=-1/2},$$

што значи да је у тачки A локални максимум, а у тачки B локални минимум.

Према томе, $f_{\min}=f(B)=-1$ и $f_{\max}=f(A)=1$.

Напомена: Задатак је решаван сматрајући да је функција f имплицитно дефинисана датом једнакошћу. Међутим, из те једнакости имамо и експлицитно вредност функције f (видети Треће решење.)

Друго решење: Ако је $F(x,y,z) = 3xz + yz - \ln(3xy) - 2$, тада је (слајдови са предавања: Тема3, егзистенција и диференцијабилност имплицитне функције)

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3z - 1/x}{3x + y}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z - 1/y}{3x + y}.$$

Стационарне тачке A и B добијамо решавањем система

$$3z - \frac{1}{x} = 0, \quad z - \frac{1}{y} = 0, \quad F(x,y,z) = 0.$$

Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо

$$F''_{x^2} = \frac{1}{x^2}, \quad F''_{y^2} = \frac{1}{y^2}, \quad F''_{z^2} = 0, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{xz} = 3, \quad F''_{yz} = 1$$

и

$$z''_{x^2} = \frac{-9x + 18x^2z - y}{x^2(3x+y)^2}, \quad z''_{y^2} = \frac{-3y + 2zy^2 - 3x}{y^2(3x+y)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{-y + 6xyz - 3x}{xy(3x+y)^2}.$$

Даље исто као у Првом решењу.

Треће решење: Из дате једнакости следи да је

$$f(x,y) = z = -\frac{2 + \ln(3xy)}{3x + y}, \quad xy > 0.$$

Налажењем парцијалних извода добијамо

$$f'_x = \frac{-3x + y + -3x\ln(3xy)}{x(3x+y)^2}, \quad f'_y = \frac{3x - y - y\ln(3xy)}{y(3x+y)^2},$$

$$f''_{x^2} = \frac{9x^2 - 12xy - y^2 + 18x^2\ln(3xy)}{x^2(3x+y)^3},$$

$$f''_{xy} = \frac{6xy - y^2 - 9x^2 + 6xy\ln(3xy)}{xy(3x+y)^3},$$

$$f''_{y^2} = \frac{-9x^2 - 12xy + y^2 + 2y^2\ln(3xy)}{y^2(3x+y)^3},$$

а даље исто као у Првом решењу.

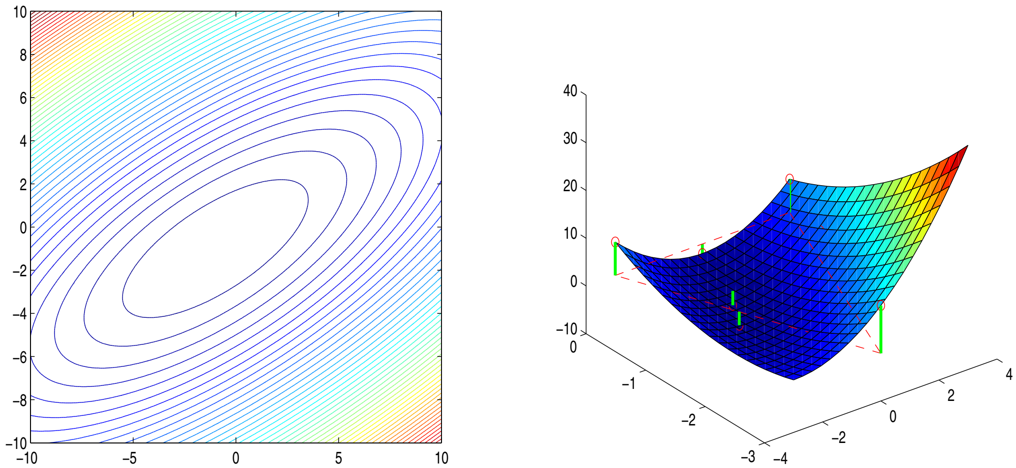
3. Дати су функција $f : R^2 \to R$ и скуп $\mathcal{D} \subset R^2$ са

$$f(x,y) = (x-y)^2 + (y+1)^2 - 3, \quad \mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ y \geq x - 3,\ y \geq -x - 3,\ y \leq 0\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције f на скупу D.

Прво решење: Функција f има најмању вредност -3 и то у тачки $A(-1,-1)$. Из $A \in \mathcal{D}$ следи да је $\min\limits_{\mathcal{D}} f(x,y) = f(A) = -3$.

Како је скуп $\mathcal{D}$ је троугао са теменима $C(-3,0)$, $D(3,0)$ и $F(0,-3)$ и како је график функције f параболоид са теменом у тачки A (Сл.3), највећа вредност функције на скупу $\mathcal{D}$ је у некој од тачака C, D или F. Пошто је $f(C) = f(D) = 7$ и $f(F) = 10$, то је $\max\limits_{\mathcal{D}} f(x,y) = f(F) = 10$.



Сл.2 Ниво линије функције f у околини тачке A (лево) и тачке у области $\mathcal{D}$ чије су вредности тестиране за екстремне вредности (десно).

Друго решење: Како је $f'_x = 2(x-y)$ и $f'_y = 4y - 2x + 2$, тачка A је једина стационарна тачка функције f и она припада скупу $\mathcal{D}$.

Функције $f(x,0)$, $f(x, x-3)$ и $f(x, -x-3)$ (које одређују границу скупа $\mathcal{D}$) имају стационарне тачке $B(0,0)$, $E(2,-1)$ и $G(-8/5, -7/5)$, при чему је $f(B) = -2$, $f(E) = 6$ и $f(G) = -14/5$. Упоређујући вредности функције f у тачкама A, B, C, D, E, F, G видимо да је (Сл.3)

$$\min_{\mathcal{D}} f(x,y) = f(A) = -3, \quad \max_{\mathcal{D}} f(x,y) = f(F) = 10.$$

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (16.4.2010) - Група 6

1. Испитати непрекидност функције $f : R^2 \to R$ у тачки $(0,0)$ ако је

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^4+y^4}\cos\dfrac{1}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Решење: За $(x,y)\neq(0,0)$ је

$$|f(x,y)| \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \le |x|+|y|.$$

Према томе, $f(x,y) \to f(0,0)$ када $(x,y)\to(0,0)$. Како је $f(0,0)=0$, функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$.

2. Одредити Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $B(1,0)$ апроксимира функцију $f : (x.y) \mapsto z$ дефинисану имплицитно са

$$z^2+3x^2+y^2+2xy+6y-2xz-3=0, \quad z\neq 0.$$

Решење: За $x=1$ и $y=0$ из дате једнакости и услова $z\neq0$ добијамо $\boxed{z(B)=2}$.

Диференцирањем по x дате једнакости имамо

$$2zz'_x+6x+2y-2z-2xz'_x=0, \tag{1}$$

одакле заменом $x=1$, $y=0$ и $z=2$ добијамо $\boxed{z'_x(B)=-1}$.

Слично, диференцирањем дате једнакости по y имамо

$$2zz'_y+2y+2x+6-2xz'_y=0, \tag{2}$$

одакле добијамо $\boxed{z'_y(B)=-4}$.

Диференцирањем једнакости (1) по x и заменом $x=1$, $y=0$, $z=2$ и $z'_x=-1$ добијамо $\boxed{z''_{x^2}(B)=-6}$, а диференцирањем једнакости (1) по y и заменом наведених вредности, као и $z'_y=-4$, добијамо $z''_{xy}(B)=-9$.

Диференцирањем једнакости (2) по y и заменом одговарајућих вредности добијамо $\boxed{z''_{y^2}(B)=-17}$.

Узимајући у обзир вредности парцијалних извода првог и другог реда функције f у тачки B имамо

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= z(B)+dz(B)+\frac{1}{2}d^2z(B) \\ &= 2-dx-4dy+\frac{1}{2}\left[-6dx^2+2\cdot(-9)dxdy-17dy^2\right] \\ &= 2-(x-1)-4y-3(x-1)^2-9(x-1)y-\frac{17}{2}y^2 \\ &= 5x+5y-3x^2-\frac{17}{2}y^2-9xy. \end{aligned}$$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2$ при услову $5(x+y)^2 = 4(xy+2)$.

Решење: Пошто дати услов можемо написати у облику $\varphi(x,y)=0$, где је $\varphi(x,y)=5x^2+5y^2+6xy-8$, Лагранжова функција F је дата са

$$F(x,y)=2x^2+2y^2+\lambda(5x^2+5y^2+6xy-8).$$

Налажењем парцијалних извода функције F добијамо систем за стационарне тачке

$$\begin{aligned} 2x+5\lambda x+3\lambda y &= 0\\ 2y+5\lambda y+3\lambda x &= 0\\ 5x^2+5y^2+6xy &= 8 \end{aligned}$$

Прве две једначине можемо посматрати као хомоген систем

$$\begin{aligned} (2+5\lambda)x+3\lambda y &= 0\\ 3\lambda x+(2+5\lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

по x и y. Тривијално решење тог система не даје решење целог система (због треће једначине). Услов за нетривијална решења је

$$\begin{vmatrix} 2+5\lambda & 3\lambda\\ 3\lambda & 2+5\lambda \end{vmatrix}=0$$

Израчунавањем детерминанте добијамо квадратну једначину $4\lambda^2+5\lambda+1=0$ чија су решења $\lambda_1=-1/4$ и $\lambda_2=-1$.

За λ_1 из прве једначине је $y=x$, а из треће $x^2=1/2$.

За λ_2 из прве једначине је $y=-x$, а из треће $x^2=2$.

Према томе, стационарне тачке функције F су: $A^*(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},-1/4)$, $B^*(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-1/4)$, $C^*(\sqrt{2},-\sqrt{2},-1)$, $D^*(-\sqrt{2},\sqrt{2},-1)$, а стационарне тачке функције f при услову $\varphi(x,y)=0$ су: $A(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $B(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $D(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Напомена. Други начин за решавање овог система је да се из прве две једначине (одузимањем једне од друге) добије једнакост $(x-y)(1+\lambda)=0$. Затим се разматрају случајеви $x=y$ и $\lambda=-1$.

Парцијални изводи другог реда функције F су:

$$F''_{x^2}=4+10\lambda,\ F''_{xy}=6\lambda,\ F''_{y^2}=4+10\lambda,$$

па је

$$d^2F(A^*)=d^2F(B^*)=\frac{3}{2}(dx^2-2dxdy+dy^2)=\frac{3}{2}(dx-dy)^2\geq 0$$

Из услова $\varphi(x,y)=0$ следи да је

$$5xdx+5ydy+3xdy+3ydx=0.$$

За тачке A и B је $x=y$, што даје $dy=-dx$, па је за $dx\neq 0$

$$d^2F(A^*)=d^2F(B^*)=\frac{3}{2}(dx+dx)^2=6dx^2>0.$$

Према томе, у тачкама A и B функција f има локални минимум при услову $\varphi(x,y)=0$.

Слично се добија за тачке C и D да је $dy=dx$ и

$$d^2F(C^*)=d^2F(D^*)=-(dx+dy)^2=-24dx^2<0,$$

што значи да у тачкама C и D функција f има локални максимум при услову $\varphi(x,y)=0$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (5.4.2011) - Група 7

1. Дата је функција

$$f(x,y)=\begin{cases} 3+\dfrac{x^3-x^4}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 3, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

а) Доказати да је функција f непрекидна у тачки $(0,0)$.

б) Испитати да ли постоји $f'_y(0,0)$.

Решење: а) Ако је $h(x,y)=f(x,y)-3$, тада за $(x,y)\neq(0,0)$ имамо да је

$$|h(x,y)|\le\frac{|y^3-x^4|}{x^2+y^2}\le\frac{y^2}{x^2+y^2}|y|+\frac{x^2}{x^2+y^2}x^2\le|y|+x^2.$$

Према томе, $h(x,y)\to h(0,0)$ када $(x,y)\to(0,0)$, односно $f(x,y)\to 3$ када $(x,y)\to(0,0)$. Како је $f(0,0)=3$, функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$.

б) За $y\neq 0$ је

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y^3}{y^2}\cos\frac{1}{\sqrt{y^2}}=\cos\frac{1}{|y|}.$$

Међутим, гранична вредност функције $g : y\mapsto\cos\dfrac{1}{|y|}$ када $y\to 0$ не постоји. Заиста, за $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ $(n\in\mathbb{N})$ је $g(y_n)=\cos(2n\pi)=1$, док за $y_n=\dfrac{1}{\pi/2+2n\pi}$ имамо да је $g(y_n)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=0$.

Пошто не постоји гранична вредност количника парцијалног прираштаја по y функције f у тачки $(0,0)$ и прираштаја аргумента y, не постоји ни $f'_y(0,0)$.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x,y)\mapsto z$ дефинисане имплицитно једнакошћу $F(x,y,z)=0$, где је

$$F(x,y,z)=2x^2+y^2-2z^2+2xy+yz+10.$$

Решење: Диференцирањем по x дате једнакости имамо

$$4x-4zz'_x+2y+yz'_x=0, \tag{1}$$

одакле добијамо

$$z'_x=-\frac{4x+2y}{-4z+y}.$$

Слично, диференцирањем дате једнакости по y имамо

$$2y-4zz'_y+2x+z+yz'_y=0, \tag{2}$$

одакле добијамо

$$z'_y=-\frac{2x+2y+z}{-4z+y}.$$

Стационарне тачке налазимо решавањем система

$$F(x,y,z)=0,\quad z'_x=0,\quad z'_y=0.$$

Из $z'_x = 0$ имамо $y = -2x$, а из $z'_y = 0$ имамо $z = 2x$. Заменом ових вредности у једнакости $F(x, y, z) = 0$ добијамо $x^2 = 1$. Према томе, стационарне тачке су $A(1, -2)$ и $B(-1, 2)$, при чему је $z(A) = 2$ и $z(B) = -2$.

Сада треба проверити да ли су у тачкама A и B локални екстремуми функције f.

Диференцирањем једнакости (1) по x, односно по y добијамо

$$4 - 4z'_x z'_x - 4zz''_{x^2} + yz''_{x^2} = 0,$$

$$-4z'_y z'_x - 4zz''_{xy} + 2 + z'_x + yz''_{xy} = 0,$$

а диференцирањем једнакости (2) по y добијамо

$$2 - 4z'_y z'_y - 4zz''_{y^2} + z'_y + z'_y + yz''_{y^2} = 0.$$

Из ових једнакости налазимо да је

$$a = z''_{x^2}(A) = \frac{2}{5}, \quad b = z''_{xy}(A) = \frac{1}{5}, \quad c = z''_{y^2}(A) = \frac{1}{5}.$$

Како је $ac - b^2 = \dfrac{1}{25} > 0$ и $a > 0$, у тачки A је локални минимум, $f_{\min} = f(A) = 2$. Слично добијамо да је у тачки B локални максимум, $f_{\max} = f(B) = -2$, јер је у њој $a = -\dfrac{2}{5}$, $b = c = -\dfrac{1}{5}$, $ac - b^2 = \dfrac{1}{25} > 0$, $a < 0$.

3. Одредити најмању и највећу вредност функције

$$f : (x, y) \mapsto 2x^2 - 4xy - y^2 + 12x - 3$$

на области $D = \{(x, y) : -2 \le x \le 4, \ -1 \le y \le 5\}$.

Решење: Област D је компактан скуп у $\mathbb{R}^2$ (затворен и ограничен), па функција f (која је непрекидна на D) заиста има и најмању и највећу вредност на области D. Те вредности се достижу или у унутрашњости области D или на њеној граници коју чине четири дужи

$$L_1 : x = -2, \ y \in [-1, 5]; \quad L_2 : x = 4, \ y \in [-1, 5];$$

$$L_3 : y = -1, \ x \in [-2, 4]; \quad L_4 : y = 5, \ x \in [-2, 4].$$

1. Како је $f'_x = 4x - 4y + 12$ и $f'_y = -4x - 2y$, у унутрашњости области D постоји само једна стационарна тачка, $A(-1, 2)$, при чему је $f(A) = -9$.

2. На дужи L_1 имамо функцију $g_1(y) = f(-2, y)$. Како је $g'_1(y) = f'_y(-2, y)$, из једнакости $f'_y(-2, y) = 0$ добијамо $y = 4$. Стационарна тачка функције f (условно, на дужи L_1) је $B(-2, 4)$, при чему је $f(B) = -3$.

3. На дужи L_2 не постоји стационарна тачка јер из једнакости $f'_y(4, y) = 0$ добијамо $y = -8$.

4. На дужи L_3 такође не постоји стационарна тачка јер из једнакости $f'_x(x, -1) = 0$ добијамо $x = -4$.

5. На дужи L_4 добијамо стационарну тачку $C(2, 5)$ (из услова $f'_x(x, 5) = 0$ имамо $x = 2$), при чему је $f(C) = -36$.

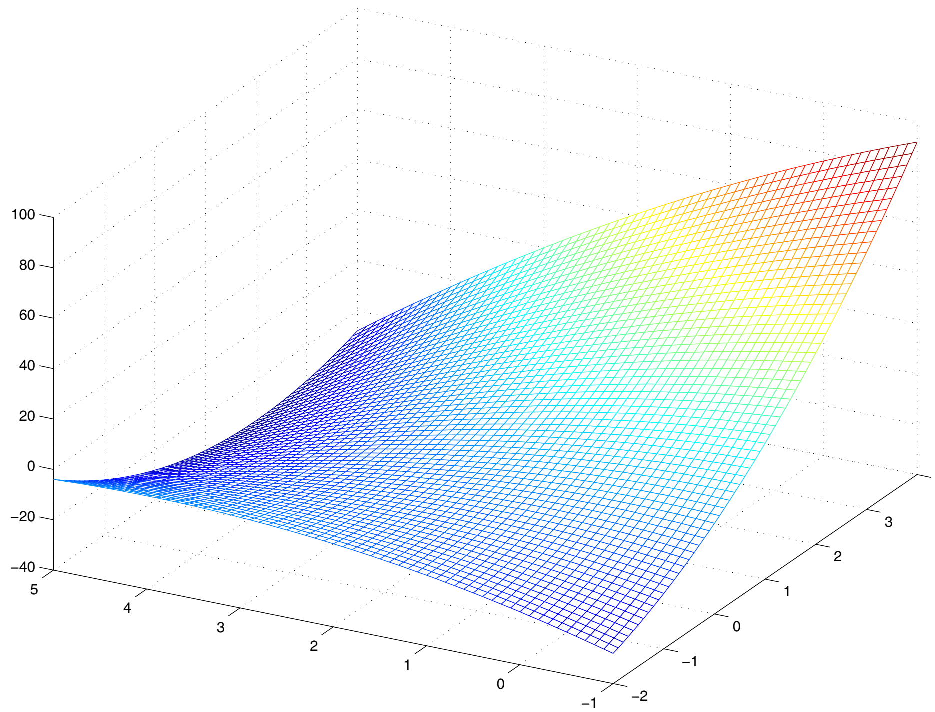
6. У критичне тачке укључујемо и граничне тачке ових дужи. То су тачке $P(-2, -1)$, $Q(4, -1)$, $R(-2, 5)$ и $S(4, 5)$, при чему је

$$f(P) = -28, \quad f(Q) = 92, \quad f(R) = -4, \quad f(S) = -28.$$

Упоређујући вредности функције f у тачкама A, B, C, P, Q, R, S налазимо да је

$$\max_D f = f(Q) = 92, \quad \min_D f = f(C) = -36.$$

На слици графика функције f над облашћу D јасно се виде добијене екстремне вредности.



Драган Ђорић

На крају, ево и три одабрана 'бисера' из радова ове групе задатака.

$$z'_y \cdot z'_y = z''_{y^2}, \quad \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 1, \quad \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{10}.$$

МАТЕМАТИКА 2

Први писмени колоквијум, 17.4.2012

Група 8

Решења задатака и резултати

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Испитати непрекидност функције $f : R^2 \to R$ у тачки $(0,0)$ ако је

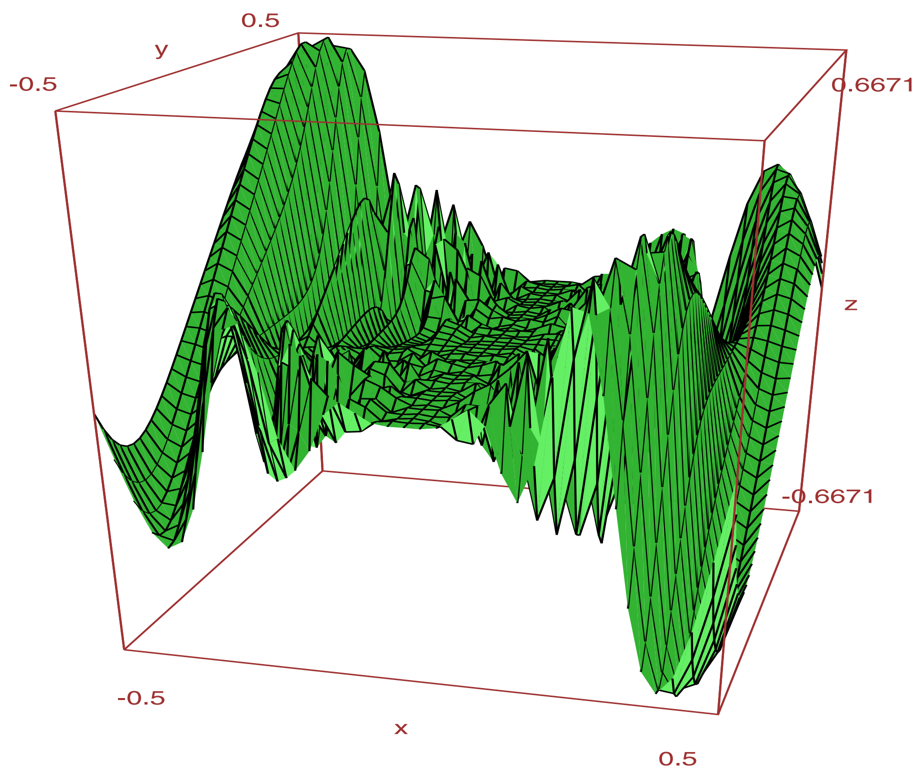
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 y}{\sqrt{x^2+y^4}} \sin \dfrac{1}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Решење: За $(x,y) \neq (0,0)$ је

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^4}} \cdot |x-3y| \leq \frac{x^2+y^4}{\sqrt{x^2+y^4}} \cdot |x-3y| = \sqrt{x^2+y^4}|x-3y| \to 0, \quad (x,y) \to (0,0).$$

Према томе, $f(x,y) \to f(0,0)$ када $(x,y) \to (0,0)$. Како је $f(0,0) = 0$, функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$.

На слици је дат график функције f у околини тачке $(0,0)$.



2. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу

$$x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y-14=0.$$

Решење: Ако је $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y-14$, тада је

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}, \tag{1}$$

па стационарне тачке добијамо из система $F'_x=0$, $F'_y=0$ и $F=0$. Како је $F'_x=2x-z+2$ и $F'_y=2y-z+2$, из једнакости $F'_x=0$ и $F'_y=0$ следи да је $y=x$ и $z=2x+2$. Заменом y и z у једнакости $F=0$ добијамо да је $x^2+4x-5=0$, што значи да је $x=-5$ или $x=1$. Према томе, стационарне тачке су $A(-5,-5)$ и $B(1,1)$, при чему је $f(A)=-8$ и $f(B)=4$.

Из једнакости (1) следи да је

$$z''_{x^2}=-\frac{(F''_{x^2}+F''_{xz}\cdot z'_x)F'_z-F'_x(F''_{zx}+F''_{z^2}\cdot z'_x)}{F'^2_z}. \tag{2}$$

Обзиром да је у стационарним тачкама $z'_x=F'_x=0$, из једнакости (2) видимо да у стационарним тачкама важи $z''_{x^2}=-\dfrac{F''_{x^2}}{F'_z}$. На исти начиин из једнакости (1) добијамо да у стационарним тачкама важи $z''_{y^2}=-\dfrac{F''_{y^2}}{F'_z}$ и $z''_{xy}=-\dfrac{F''_{xy}}{F'_z}$. Према томе, за функцију f имамо да је у стационарним тачкама

$$z''_{x^2}=z''_{y_2}=\frac{2}{x+y-2z}.\quad z''_{xy}=0$$

(јер је $F''_{x^2}=F''_{y^2}=2$, $F''_{xy}=0$ и $F'_z=2z-x-y$).

Специјално, у тачки A је

$$z''_{x^2}=z''_{y^2}=\frac{1}{3},\quad d^2f(A)=\frac{1}{3}(dx^2+dy^2),$$

а у тачки B је

$$z''_{x^2}=z''_{y^2}=-\frac{1}{3},\quad d^2f(B)=-\frac{1}{3}(dx^2+dy^2).$$

Према томе, функција $f:(x,y)\mapsto z$ у тачки A има локални минимум који је једнак -8, а у тачки B има локални максимум који је једнак 4. Дакле,

$$f_{\min}=f(A)=-8,\quad f_{\max}=f(B)=4.$$

3. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x,y) \mapsto (x-2)^2 + (x-y)^2 + 2$ на скупу $\mathcal{D} = \{(x,y) \,:\, x \geq 0,\ 0 \leq y \leq -x+5\}$.

Решење: Област $\mathcal{D}$ је троугао чија су темена $C(0,0)$, $E(5,0)$ и $F(0,5)$. Вредности функције f у тим тачкама су: $f(C) = 6$, $f(E) = 36$ и $f(F) = 31$. Функција f има само једну стационарну тачку $A(2,2)$ и она припада области $\mathcal{D}$. Како је $f(A) = 2$, у конкуренцији за апсолутни екстремум на $\mathcal{D}$ остају тачке A и E.

Границу области $\mathcal{D}$ чине странице CE, CF и EF троугла CEF.

На страници CE је $f(x,y) = f(x,0) = 2x^2 - 4x + 6$. Минимум ове квадратне функције се достиже за $x = 1$, па тачку $B(1,0)$ треба узети као кандидата за апсолутни екстремум функције f на области $\mathcal{D}$. Међутим, како је $f(A) < f(B) = 4 < f(E)$, тачка B ипак није тачка апсолутног екстремума функције f на $\mathcal{D}$.

На страници CF је $f(x,y) = f(0,y) = y^2 + 6$, па функција f нема локалних екстремума у унутрашњим тачкама дужи CF.

На страници EF је

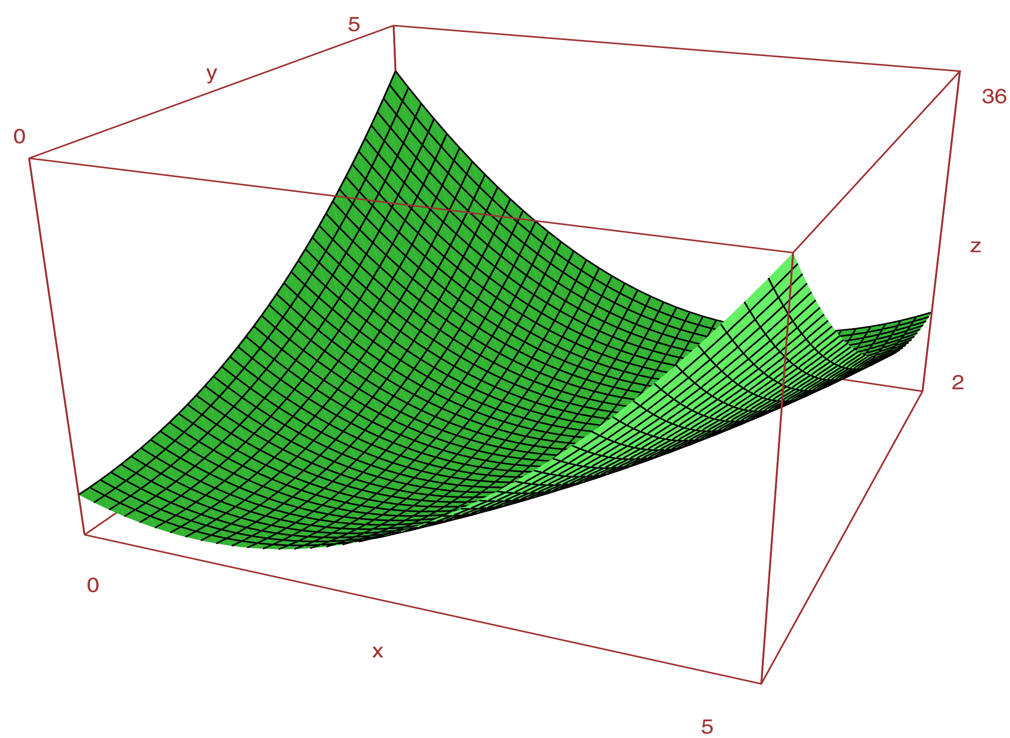
$$f(x,y) = f(x,-x+5) = (x-2)^2 + (2x-5)^2 + 2 = g(x).$$

Како је $g'(x) = 10x - 24$, функција f на дужи EF (квадратна функција) има минимум за $x = 12/5$. Да ли је $D\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$ тачка апсолутног екстремума функције f на $\mathcal{D}$? Из $f(A) < f(D) = \dfrac{11}{5} < f(E)$ видимо да није.

Према томе,

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(A) = 2 \qquad \max_{\mathcal{D}} f = f(E) = 36.$$

На слици је дат график функције f на квадрату $[0,5] \times [0,5]$.



МАТЕМАТИКА 2

Први писмени колоквијум, 20.4.2013

Група 8

Решења задатака и резултати

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Доказати да је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

непрекидна у тачки $(0,0)$, а затим доказати да не постоје парцијални изводи те функције у тачки $(0,0)$.

Решење: За $(x,y) \neq (0,0)$ је

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0, \quad (x,y) \to (0,0).$$

Према томе, $f(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$. Како је $f(0,0) = 0$, функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$.

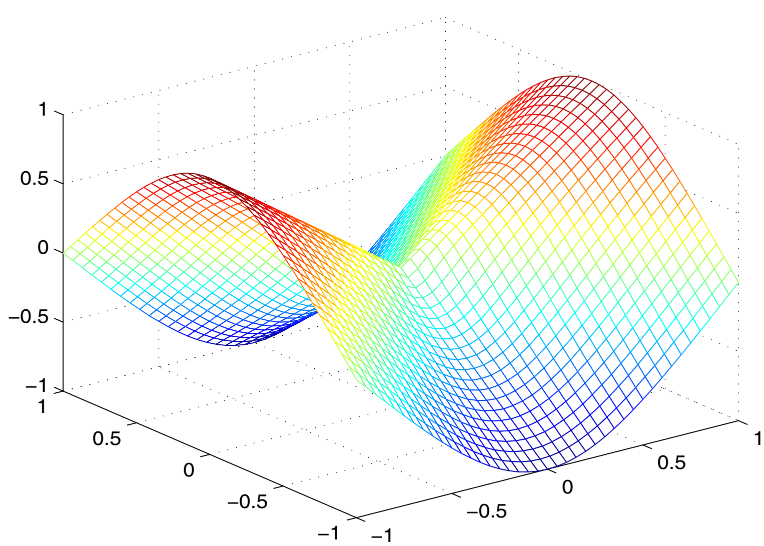
Пошто је

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x\sqrt{(\Delta x)^2}} = \frac{\Delta x}{|\Delta x|} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0, \end{cases}$$

не постоји гранична вредност количника $\dfrac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x}$ када $\Delta x \to 0$.

Према томе, не постоји парцијални извод по x функције f у тачки $(0,0)$, а самим тим не постоје ни парцијални изводи функције f у тој тачки.

На слици је дат график функције f у околини тачке $(0,0)$.



2. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу

$$x^2+y^2+z^2-3xz-xy-4x+2y+4z+4=0.$$

Решење: Ако је $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xz-xy-4x+2y+4z+4$, тада је

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z},\tag{1}$$

па стационарне тачке добијамо из система $F'_x=0$, $F'_y=0$ и $F=0$. Како је $F'_x=2x-3z-y-4$ и $F'_y=2y-x+2$, из једнакости $F'_x=0$ и $F'_y=0$ следи да је $z=y$ и $x=2y+2$. Заменом x и z у једнакости $F=0$ добијамо да је $y(y+1)=0$, што значи да је $y=0$ или $y=1$. Према томе, стационарне тачке су $A(2,0)$ и $B(0,-1)$, при чему је $f(A)=0$ и $f(B)=-1$.

Из једнакости (1) следи да је

$$z''_{x^2}=-\frac{(F''_{x^2}+F''_{xz}\cdot z'_x)F'_z-F'_x(F''_{zx}+F''_{z^2}\cdot z'_x)}{F'^2_z}.\tag{2}$$

Обзиром да је у стационарним тачкама $z'_x=F'_x=0$, из једнакости (2) видимо да у стационарним тачкама важи $z''_{x^2}=-\dfrac{F''_{x^2}}{F'_z}$. На исти начиин из једнакости (1) добијамо да у стационарним тачкама важи $z''_{y^2}=-\dfrac{F''_{y^2}}{F'_z}$ и $z''_{xy}=-\dfrac{F''_{xy}}{F'_z}$.

Како је $F''_{x^2}=F''_{y^2}=2$, $F''_{xy}=-1$ и $F'_z=2z-3x+4$, за функцију f у стационарним тачкама важи

$$z''_{x^2}=z''_{y_2}=\frac{-2}{2z-3x+4},\quad z''_{xy}=\frac{1}{2z-3x+4}.$$

Специјално, у тачки A је

$$z''_{x^2}=z''_{y^2}=1,\quad z''_{xy}=-\frac{1}{2},\quad d^2f(A)=dx^2-dxdy+dy^2=\frac{1}{2}\left(dx^2+dy^2+(dx-dy)^2\right),$$

а у тачки B је

$$z''_{x^2}=z''_{y^2}=-1,\quad z''_{xy}=\frac{1}{2},\quad d^2f(B)=-dx^2+dxdy-dy^2=-d^2f(A).$$

Према томе, функција $f:(x,y)\mapsto z$ у тачки A има локални минимум који је једнак 0, а у тачки B има локални максимум који је једнак -1. Дакле,

$$f_{\min}=f(A)=0,\quad f_{\max}=f(B)=-1.$$

3. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x, y) \mapsto 2x^2 - xy + 2y^2 + 5x - 5y$ на скупу $\mathcal{D} = \{(x, y) \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Решење: Област $\mathcal{D}$ је део круга с центром у $(0, 0)$ и полупречником дужине 3. Функција f има само једну стационарну тачку $A(-1, 1)$ и она припада области $\mathcal{D}$.

Границу области $\mathcal{D}$ чине полупречници GE и GF и део EF (мањи) кружнице $x^2+y^2 = 9$, где су G (центар кружнице), $E(-3, 0)$ и $F(0, 3)$ граничне тачке области $\mathcal{D}$.

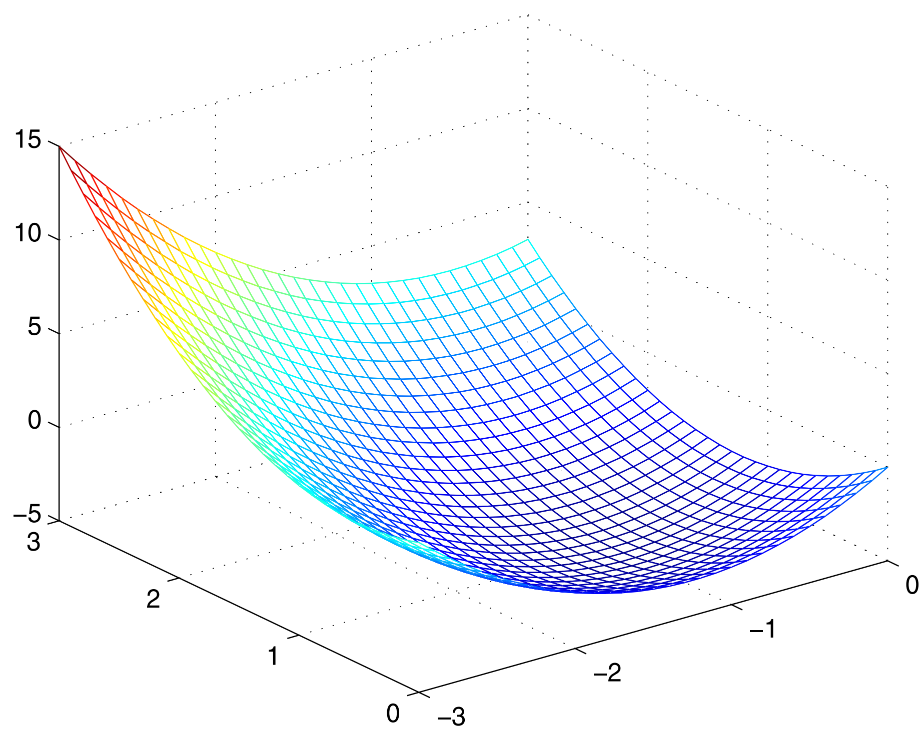
Вредности функције f у поменутим тачкама су: $f(A) = -5$, $f(E) = f(F) = 3$ и $f(G) = 0$. На полупречнику GE је $f(x, y) = f(x, 0) = 2x^2+5x$, а на полупречнику GF је $f(0, y) = 2y^2-5y$. Минимуми ових квадратних функција се достижу за $x = -5/4$ и за $y = 5/4$, па тачке $B(-5/4, 0)$ и $C(0, 5/4)$ треба узети као кандидате за апсолутни екстремум функције f на области $\mathcal{D}$. Међутим, како је $f(A) < f(B) = f(C) = -25/8 < f(E)$, тачке B и C ипак нису тачке апсолутног екстремума функције f на $\mathcal{D}$.

На луку EF имамо проблем условног екстремума функције f при услову $\varphi(z, y) = 0$, где је $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 9$. Лагранжова функција $L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ има две стационарне тачке од којих само тачка $D(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ припада области $\mathcal{D}$. Како је $0 < f(D) = \dfrac{15}{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) < 3 = f(E)$, тачка D није тачка апсолутног екстремума функције f на $\mathcal{D}$.

Према томе,

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(A) = -5 \qquad \max_{\mathcal{D}} f = f(E) = f(F) = 3.$$

На слици је дат график функције f на квадрату $[-3, 0] \times [0, 3]$.



МАТЕМАТИКА 2

Први писмени колоквијум, 22.4.2014

Група 2

Решења задатака

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Доказати да је функција $f : R^2 \to R$ дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3\cos x + x^3\cos y}{\sqrt{x^4+y^4}} - 3, & (x,y) \neq (0,0) \\ -3, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

непрекидна у тачки $(0,0)$ и израчунати њене парцијалне изводе првог реда у тачки $(0,0)$.

Решење: Како је $f(x,y) = g(x,y) - 3$, где је

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3\cos x + x^3\cos y}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$ ако је функција g непрекидна у тој тачки.

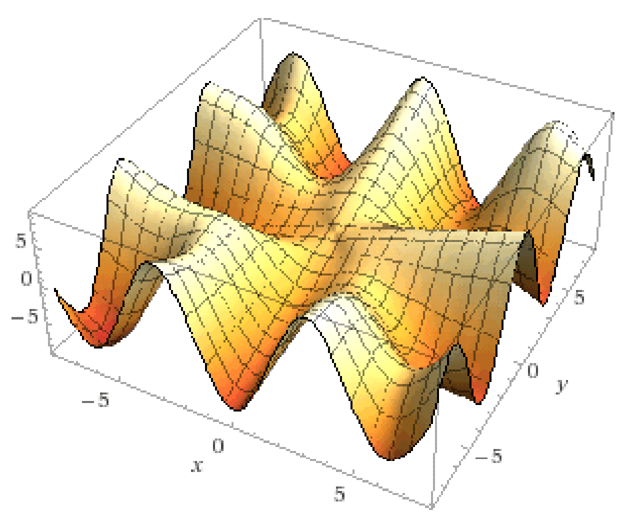
За $(x,y) \neq (0,0)$ је

$$\begin{aligned} |g(x,y)| &\leq \frac{|y^3|}{\sqrt{x^4+y^4}} + \frac{|x^3|}{\sqrt{x^4+y^4}} = \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \cdot |y| + \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \cdot |x| \\ &= \sqrt{\frac{y^4}{x^4+y^4}} \cdot |y| + \sqrt{\frac{x^4}{x^4+y^4}} \cdot |x| \leq |y| + |x|, \end{aligned}$$

што значи да $|g(x,y)| \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$.

Према томе, $g(x,y) \to g(0,0)$ када $(x,y) \to (0,0)$, па је функција g непрекидна у тачки $(0,0)$. Из непрекидности функције g следи и непрекидност функције f.

На слици је дат график функције g у околини тачке $(0,0)$.



Сл.1 График функције g

Парцијални изводи фунције f исти су као одговарајући парцијални изводи функције g.

$$f'_x(0,0) = g'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\sqrt{x^4}} = 1,$$

$$f'_y(0,0) = g'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y\sqrt{y^4}} = 1.$$

2. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу

$$z^2 - xyz + xy^2 + x^3 = 0$$

уз услов $x > 0$.

Решење: Ако је $F(x, y, z) = z^2 - xyz + xy^2 + x^3$, тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \tag{1}$$

па стационарне тачке добијамо из система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ и $F = 0$. Како је $F'_x = -yz+y^2+3x^2$ и $F'_y = -xz + 2xy$, из једнакости $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$ следи да је $z = 2y$ и $y^2 = 3x^2$. Заменом y и z у једнакости $F = 0$ добијамо да је $x^2(6 - x) = 0$, што значи да је $x = 6$ (јер имамо услов $x > 0$).

Према томе, стационарне тачке су $A(6, 6\sqrt{3})$ и $B(6, -6\sqrt{3})$, при чему је $f(A) = 12\sqrt{3}$ и $f(B) = -12\sqrt{3}$.

Из једнакости (1) следи да је у стационарним тачкама

$$z''_{x^2} = -\frac{F''_{x^2}}{F'_z} = \frac{6x}{xy - 2z}, \quad z''_{y^2} = -\frac{F''_{y^2}}{F'_z} = \frac{2x}{xy - 2z}, \quad z''_{xy} = -\frac{F''_{xy}}{F'_z} = \frac{z - 2y}{2z - xy} = 0.$$

Специјално, у тачки A је

$$z''_{x^2} = \sqrt{3},\ z''_{y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d^2 f(A) = \sqrt{3}dx^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}dy^2,$$

а у тачки B је

$$z''_{x^2} = -\sqrt{3},\ z''_{y^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d^2 f(A) = -\sqrt{3}dx^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}dy^2.$$

Према томе, функција $f : (x, y) \mapsto z$ у тачки A има локални минимум који је једнак $12\sqrt{3}$, а у тачки B има локални максимум који је једнак $-12\sqrt{3}$. Дакле,

$$f_{\min} = f(A) = 12\sqrt{3}, \quad f_{\max} = f(B) = -12\sqrt{3}.$$

3. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x, y) \mapsto (x-2y)^2+(x-2)^2+(y+2)^2-3$ на скупу $\mathcal{D}$, где је $\mathcal{D}$ троугао чија су темена тачке $A(0, 0)$, $B(2, -2)$ и $C(2, 2)$.

Решење: Функција f има само једну стационарну тачку $D(1, 0)$ и она припада области $\mathcal{D}$. Како је $f(A) = 5$, $f(B) = 33$, $f(C) = 17$ и $f(D) = 3$, у конкуренцији за апсолутни екстремум на $\mathcal{D}$ остају тачке D и B.

Границу области $\mathcal{D}$ чине странице AB, AC и BC троугла ABC.

На страници AB је $f(x, y) = f(x, -x) = 11x^2 - 8x + 5$. Минимум ове квадратне функције се достиже за $x = 4/11$, па тачку $E(4/11, -4/11)$ треба узети као кандидата за апсолутни екстремум функције f на области $\mathcal{D}$. Међутим, како је $f(D) < f(E) = 39/11 < f(B)$, тачка E ипак није тачка апсолутног екстремума функције f на $\mathcal{D}$.

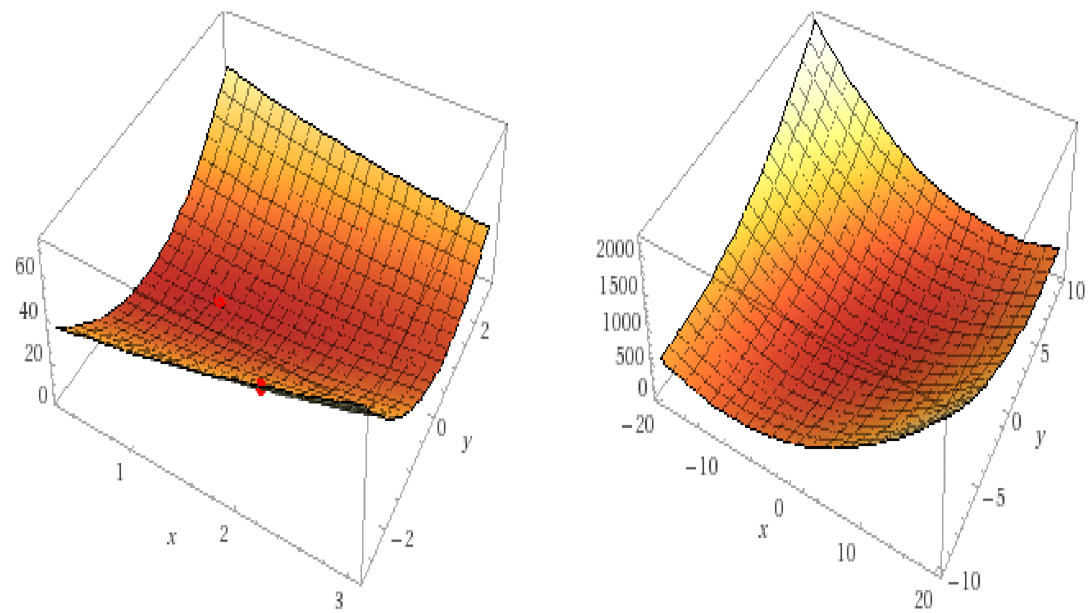
На страници AC је $f(x,y) = f(x,x) = 3x^2 + 5$, па функција f на странаици AC строго расте.

На страници BC је $f(x,y) = f(2,y) = 5y^2 - 4y + 5$. Минимум ове квадратне функције се достиже за $y = 2/5$. Да ли је $F\,(2, 2/5)$ тачка апсолутног екстремума функције f на $\mathcal{D}$? Из $f(D) < f(F) = 21/5 < f(B)$ видимо да није.

Према томе,

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(D) = 3 \qquad \max_{\mathcal{D}} f = f(B) = 33.$$

На слици (лево) је дат график функције f на скупу $[0,3] \times [-3,3]$ са означеним тачкама најмање и највеће вредности функције на области $\mathcal{D}$. Приметимо, да је D истовремено и тачка апсолутног минимума функције f, док B није ни тачка локалног екстремума функције f (слика десно).



Сл.2 График функције f на скупу $[0,3] \times [-3,3]$ (лево) и на ширем скупу (десно)

МАТЕМАТИКА 2

Први писмени колоквијум, 18.4.2015

Група 3

Решења задатака и резултати

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Функција $f : R^2 \to R$ дефинисана је са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(3x^3+y^2)xy}{sin(xy)\sqrt{x^2+y^2}}, & xy \notin K \\ 0, & xy \in K \end{cases}$$

где је $K = \{k\pi \,:\, k \in Z\}$. Испитати непрекидност функције f у тачки $(0,0)$.

Решење: Ако је $g(x,y) = \dfrac{3x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $h(x,y) = \dfrac{xy}{\sin(xy)}$, тада је $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$ за $xy \notin K$. Како је $f(0,0) = 0$ и $\lim\limits_{xy\to 0} h(x,y) = 1$, непрекидност функције f у тачки $(0,0)$ зависи од функције g.

За $(x,y) \neq (0,0)$ је

$$|g(x,y)| \leq \frac{3|x^3|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3x^2\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} + |y|\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \leq 3x^2 + |y|,$$

што значи да $|g(x,y)| \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$.

Према томе, $f(x,y) \to f(0,0)$ када $(x,y) \to (0,0)$, па је дата функција f непрекидна у тачки $(0,0)$.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x,y) \mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу

$$3x^2 + y^2 + 2z^2 + 3xy + yz = 4.$$

Решење: Ако је $F(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 + 3xy + yz - 4$, тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \tag{1}$$

па стационарне тачке добијамо из система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ и $F = 0$. Како је $F'_x = 6x + 3y$ и $F'_y = 2y + 3x + z$, из једнакости $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$ следи да је $y = -2x$ и $z = x$. Заменом y и z у једнакости $F = 0$ добијамо да је $x^2 = 4$, што значи да је $x = \pm 2$.

Према томе, стационарне тачке су $A(2,-4)$ и $B(-2,4)$, при чему је $f(A) = 2$ и $f(B) = -2$. Из једнакости (1) следи да је у стационарним тачкама

$$a = z''_{x^2} = -\frac{F''_{x^2}}{F'_z} = -\frac{6}{4z+y}, \quad c = z''_{y^2} = -\frac{F''_{y^2}}{F'_z} = -\frac{3}{4z+y}, \quad b = z''_{xy} = -\frac{F''_{xy}}{F'_z} = -\frac{2}{4z+y}.$$

Специјално, у тачки A је $a = -\dfrac{3}{2}$ и $ac - b^2 = \dfrac{3}{16}$, а у тачки B је $a = \dfrac{3}{2}$ и $ac - b^2 = \dfrac{3}{16}$.

Према томе, функција $f : (x,y) \mapsto z$ у тачки A има локални максимум који је једнак 2, а у тачки B има локални минимум који је једнак -2. Дакле,

$$f_{\max} = f(A) = 2, \quad f_{\min} = f(B) = -2.$$

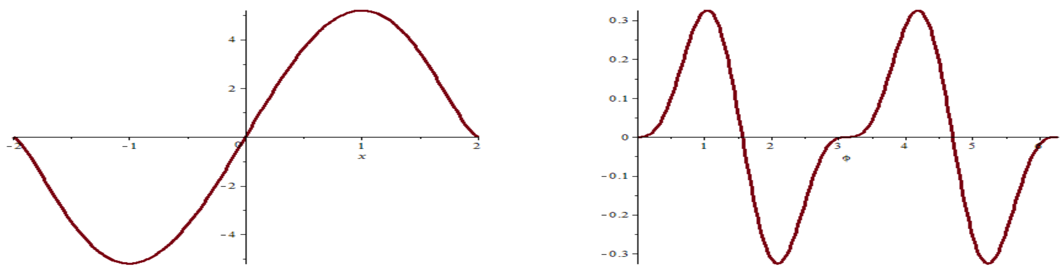
3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto xy^3$ при услову $x^2 + y^2 = 4$ и $y \neq 0$.

Решење: Дати услов представља кружницу без тачака $(-2, 0)$ и $(2, 0)$ и може да се замени условом $y = \sqrt{4 - x^2}$ или $y = -\sqrt{4 - x^2}$ за $x \in (-2, 2)$.

У првом случају је

$$f(x, y) = x(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} = g(x).$$

Како је $g'(x) = -4\sqrt{4 - x^2}(x^2 - 1)$, функција g опада за $x \in (-2, -1)$ и за $x \in (1, 2)$, а расте за $x \in (-1, 1)$. То значи да је (сл.1) $g_{\min} = g(-1)$ и $g_{\max} = g(1)$. У оба случаја је $y = \sqrt{3}$ и $f = -3\sqrt{3}$.



Сл.1 График функције g (лево) и график функције h (десно)

У другом случају је $f(x, y) = -g(x)$, па је у тачки $x = -1$ локални максимум, а у тачки $x = 1$ локални минимум, при чему је $y = -\sqrt{3}$ и $f = 3\sqrt{3}$.

Према томе,

$$f_{\min} = f(-1, \sqrt{3}) = f(1, -\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}, \quad f_{\max} = f(1, \sqrt{3}) = f(-1, -\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

Друго решење. У поларним координатама дати услов је $x = 2\cos\varphi$ и $y = 2\sin\varphi$ за $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, а функција f при том услову је дата са

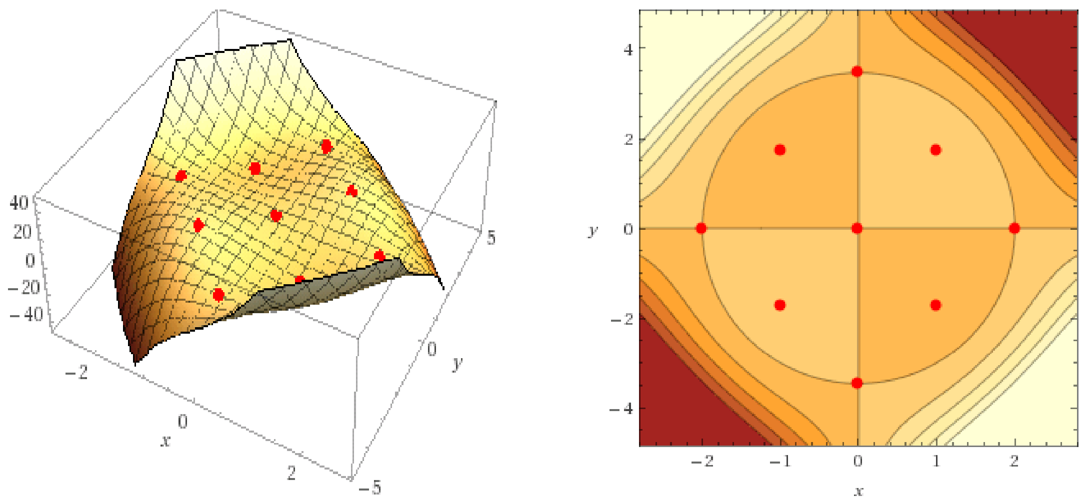
$$f(x, y) = 2\cos\varphi \cdot 2^3 \sin^3\varphi = 16\cos\varphi \sin^3\varphi = 16h(\varphi).$$

Како је $h'(\varphi) = \sin^2\varphi(3 - 4\sin^2\varphi)$, функција h има четири стационарне тачке које добијамо из услова $\sin\varphi = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (сл.2). То су $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$ и $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$, при чему су две од њих тачке локалног максимума, а друге две тачке локалног минимума. Одговарајуће тачке локалних екстремума функције f су $A(1, \sqrt{3})$, $B(-1, \sqrt{3})$, $C(-1, -\sqrt{3})$ и $D(1, -\sqrt{3})$.

Према томе, функција f има локалне максимуме у тачкама A и C и локалне минимуме у тачкама B и D.

Треће решење. [Методом Лагранжовог мултипликатора]

Занимљиво да за једно λ, на пример $\lambda = 3\sqrt{3}/2$ добијамо све стационарне тачке (види слику)



Сл.3 График функције $F = f + \lambda\varphi$ ново линије функције F

Исто добијамо и за $\lambda = -3\sqrt{3}/2$.