МАТЕМАТИКА 2

Други писмени колоквијум, 5.6.2017

Група 3

Решења задатака

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\ln(3+5\sin x)}{\cos^2 x}\,dx.$

Решење: Парцијалном интеграцијом са $u=\ln(3+5\sin x)$ и $dv = dx/\cos^2 x$ имамо да је

$$du = \frac{5\cos x}{3+5\sin x}\,dx, \quad v=\tan x,$$

па је

$$I = \int \frac{\ln(3+5\sin x)}{\cos^2 x}\,dx = uv - \int v du = uv - \int \frac{5\sin x}{3+5\sin x}\,dx = uv - x + 3\int \frac{dx}{3+5\sin x} = g(x)+3J,$$

где је $g(x)=\tan x\ln(3+5\sin x)-x$.

Сменом $\tan\dfrac{x}{2}=t$ налазимо да је[1]

$$J = 2\int \frac{dt}{3t^2+10t+3} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+5/3)^2-(4/3)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3t+1}{t+3}\right| + C.$$

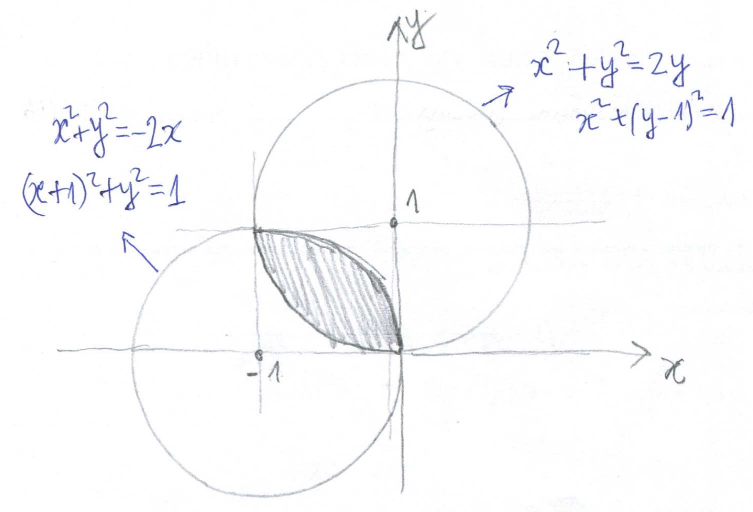
Према томе,

$$I = g(x) + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{3\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}}\right| + C.$$

---

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око Oy осе конвексне фигуре ограничене линијама $x^2+y^2=-2x$ и $x^2+y^2=2y$.

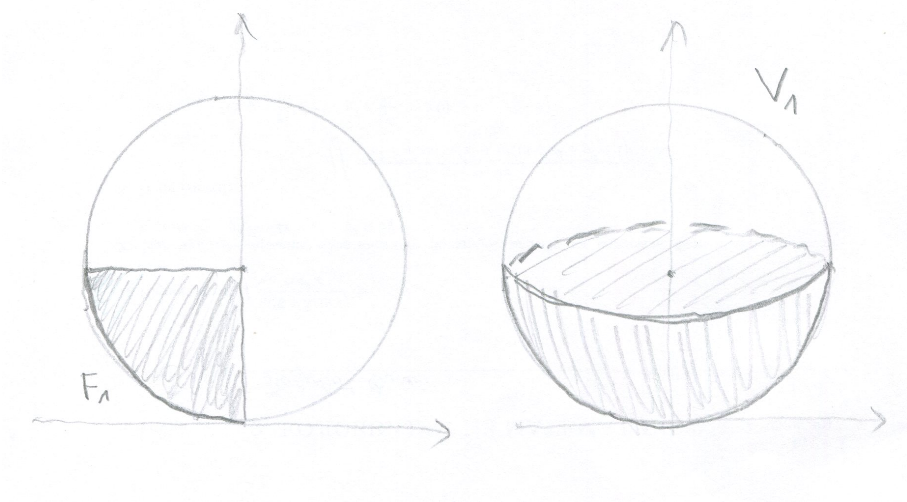
Решење: Дато тело настаје ротацијом око y осе фигуре на слици 1.



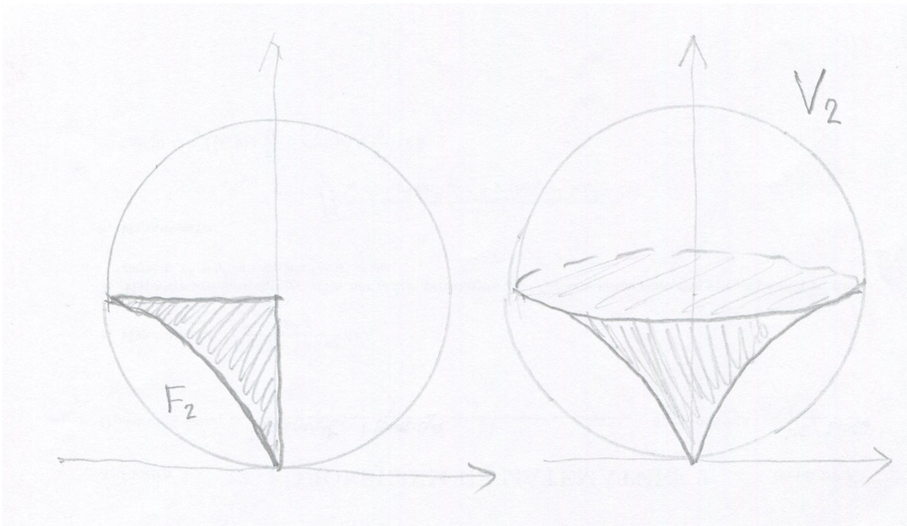
Сл.1 Конвексна фигура ограничена датим линијама

[1] Користи се таблични интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Запремина V овог тела једнака је разлици запремине V_1 тела насталог ротацијом око y осе фигуре F_1 на слици 2 и запремине V_2 тела насталог ротацијом око y осе фигуре F_2 на слици 3.



Сл.2 Фигура F_1 и тело добијено ротацијом те фигуре



Сл.3 Фигура F_2 и тело добијено ротацијом те фигуре

Како је V_1 запремина пола лопте полупречника 1, то је $V_1 = \frac{2}{3}\pi$.

Фигура F_2 је криволинијски трапез одређен функцијом $x : y \mapsto -1 + \sqrt{1-y^2}$ која је дефинисана кружницом $x^2 + y^2 = -2x$, односно $(x+1)^2 + y^2 = 1$. То значи да је[2]

$$V_2 = \pi \int_0^1 x^2(y)dy = \pi \int_0^1 (-1 + \sqrt{1-y^2})^2 dy = \pi \int_0^1 (2 - y^2 - 2\sqrt{1-y^2})dy = \frac{5}{3}\pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

Према томе, $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^2}{2} - \pi.$

[2]Са предавања и вежби је познато да парцијалном интеграцијом или сменом $y = \sin t$ добијамо да је $\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy = \frac{\pi}{4}$.

3. Израчунати
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}(\tan\sqrt{x^2+y^2}+1)},$$
где је $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \frac{\pi^2}{16} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{9}, \ x \ge 0\right\}.$

Решење: Област D је део кружног прстена који је у поларним координатама одређен са $\rho \in [\pi/4, \pi/3]$ и $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Како за интегранд f важи
$$f(x,y) = \frac{1}{\rho\sin^2\rho(\tan\rho+1)},$$
то за дати интеграл I добијамо
$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\rho}{\sin^2\rho(\tan\rho+1)} = \pi J.$$
Сменом $\cot\rho = t$ у интегралу J налазимо да је
$$J = -\int_1^{1/\sqrt{3}} \frac{tdt}{t+1} = -t + \ln|t+1|\Big|_1^{1/\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \ln 2.$$
Према томе, $I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \ln(3-\sqrt{3})\right)\pi.$