ОЈЛЕРОВЕ СМЕНЕ У НЕОДРЕЂЕНОМ ИНТЕГРАЛУ

Решени примери и задаци за вежбу

Драган Ђорић

Интеграли типа $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$, где је R рационална функција две променљиве и где је $a \neq 0$ и $b^2 \neq 4ac$, могу на различите начине да се сведу на интеграле рационалних функција. У општем случају то је могуће урадити *Ојлеровим сменама.*

Решени примери

У наредним задацима треба израчунати дати интеграл.

Прва Ојлерова смена. Прва Ојлерова смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$$

примењује се када је $a > 0$. Из ове једнакости имамо да је

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2tx\sqrt{a} + ax^2,$$

одакле следи да је

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}.$$

Диференцирањем добијамо

$$dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\, dt.$$

Како је

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a} = t - \sqrt{a} \cdot \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

то је

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int g(t)dt,$$

где је g рационална функција аргумента t, дата са

$$g(t) = R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right) \cdot 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}.$$

Ако је G примитивна функција за функцију g, тада је

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}) + C.$$

Према томе, $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = F(x) + C$, где је

$$F(x) = G(\sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}).$$

Израчунавање интеграла овог типа може и да се сведе на случај $a = 1$ јер је

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x^2+b_1x+c_1},$$

где је $b_1 = b/a$ и $c_1 = c/a$. Тада уводимо смену

$$\sqrt{x^2+b_1x+c_1} = t - x.$$

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$.

Решење. Дати интеграл је наведеног типа, при чему је $a = 1 > 0$, што значи да може да се примени прва Ојлерова смена

$$\sqrt{x^2+c} = t - x.$$

Из ове једнакости добијамо

$$x = \frac{t^2-c}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+c}{2t^2}dt, \quad \sqrt{x^2+c} = \frac{t^2+c}{2t}.$$

Заменом ових израза у дати интеграл налазимо да је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+c}| + C.$$

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решење. Сменом

$$\sqrt{x^2+2x+2} = t - x$$

у датом интегралу I имамо да је

$$x = \frac{t^2-2}{2(1+t)}, \quad dx = \frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}\,dt, \quad 1+\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{t^2+4t+4}{2(1+t)},$$

па је

$$I = \int \frac{2(1+t)}{t^2+4t+4} \cdot \frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}\,dt = \int \frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}\,dt.$$

Како је

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)2} = \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+2)^2},$$

то је

$$I = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C.$$

Када t заменимо са $\sqrt{x^2+2x+2}+x$, добијамо да је

$$I=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.$$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Задатак је решен у [1].

Друга Ојлерова смена. Друга Ојлерова смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$$

примењује се када је $c>0$. Из ове једнакости имамо да је

$$ax^2+nx+c=x^2t^2-2xt\sqrt{c}+c,$$

одакле следи да је

$$x=\frac{2\sqrt{c}t+b}{t^2-a},\qquad dx=-2\cdot\frac{\sqrt{c}t^2+bt+a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

Како је

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}t^2+bt+a\sqrt{c}}{t^2-a},$$

то је

$$I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=\int g(t)dt,$$

где је

$$g(t)=-2\cdot R\left(\frac{2\sqrt{c}t+b}{t^2-a},\frac{\sqrt{c}t^2+bt+a\sqrt{c}}{t^2-a}\right)\cdot\frac{\sqrt{c}t^2+bt+a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}.$$

Ако је G примитивна функција за функцију g, тада је $I=G(t)+C$, где је

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}{x}.$$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Задатак је решен у [1].

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решење. У овом примеру не може директно да се користи прва, али може да се користи друга Ојлерова смена

$$\sqrt{1+x-x^2}=tx-1.$$

Из ове једнакости следи да је

$$x=\frac{1+2t}{t^2+1},\qquad dx=-2\frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}\,dt,\qquad \sqrt{1+x-x^2}=\frac{t^2+t-1}{t^2+1},$$

па је

$$I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{-2dt}{1+(t+1)^2}=-2\arctan(t+1)+C.$$

Заменом t са $(\sqrt{1+x-x^2}+1)/x$ добијамо да је

$$I=-2\arctan\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C.$$

6. $\displaystyle\int\frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

Решење. Другом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1$$

имамо да је

$$x=\frac{2t-1}{1-t^2},\quad dx=\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2},\quad \sqrt{1+x+x^2}=xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2},$$

па је

$$I=2\int\frac{t^2dt}{1-t^2}=-2\int dt+\int\frac{dt}{1-t^2}=-2t-\ln|1-t|+\ln|1+t|+C.$$

Заменом t са $\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ добијамо да је

$$I=-\frac{2}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1)+\ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right|+C.$$

7. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx.$

Решење. Другом Ојлеровом сменоом

$$\sqrt{1-x^2}=xt-1$$

имамо да је

$$x=\frac{2t}{t^2+1},\quad dx=\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt,\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

па је

$$I=-\int\frac{(1-t^2)^2}{t(1+t^2)^2}\,dt=\int\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}-\int\frac{dt}{t}=-\frac{2}{1+t^2}-\ln|t|+C.$$

Заменом t са $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ добијамо да је

$$I=-\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

Напомене. Прва Ојлерова смена може да буде и

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a},$$

а друга Ојлерова смена може да буде и

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}.$$

Уместо прве и друге Ојлерове смене може да се користи само једна од њих. Наиме, у случају $c>0$ сменом $x=1/t$ добија се интеграл за који може да користи прва Ојлерова смена, а у случају $a>0$ истом сменом добија се интеграл за који може да се користи друга Ојлерова смена. У том смислу, за оба случаја довољна је само једна од ове две Ојлерове смене.

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$.

Решење. Првом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2-4x+8}=t+x$$

имамо да је

$$x=\frac{8-t^2}{2(2+t)},\qquad dx=-\frac{8+4t+t^2}{2(t+2)^2}\,dt,\qquad \sqrt{x^2-4x+8}=t+x=\frac{t^2+4t+8}{2(2+t)},$$

па је

$$I=-\int\frac{dt}{t+2}=-\ln|t+2|+C=-\ln\left|2-x+\sqrt{x^2-4x+8}\right|+C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Решење. Првом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2+2x+3}=x+t$$

добијамо да је

$$x=\frac{t^2-3}{2-2t},\qquad dx=2\cdot\frac{2t-t^2-3}{(2-2t)^2}\,dt,\qquad \sqrt{x^2+2x+3}=\frac{2t-t^2-3}{2-2t},$$

па је

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}=2\int\frac{dt}{t^2-3}=\frac{1}{\sqrt3}\ln\frac{t-\sqrt3}{t+\sqrt3}+C.$$

Пошто је $t=\sqrt{x^2+2x+3}-x$, имамо да је

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{1}{\sqrt3}\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x-\sqrt3}{\sqrt{x^2+2x+3}-x+\sqrt3}+C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ (други пут).

Решење. Ово је исти интеграл као у задатку 4. У [1] интеграл је решен другом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1.$$

Ако уведемо другу Ојлерову смену са $xt+c$ уместо $xt-c$,

$$\sqrt{1-2x-x^2}=xt+1,$$

добијамо да је

$$x=-\frac{2+2t}{1+t^2},\quad dx=\frac{2t^2+4t-2}{(1+t^2)^2},\quad \sqrt{1-2x-x^2}=xt+1=\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}.$$

Заменом ових израза у дати интеграл I налазимо да је

$$I=\int\frac{t^2+2t-1}{(1+t^2)(1-t)}\,dt=\int\frac{dt}{1-t}-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-\ln|1-t|-2\arctan t+C,$$

где је

$$t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}.$$

Прва или друга Ојлерова смена? У случају да је $a>0$ и $c>0$ могу да се користе и прва и друга Ојлерова смена. Применом ових смена добијамо четири раличите примитивне функције за интегранд датог интеграла.

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$

Решење. Овде је $a=c=1$ у триному x^2-x+1, па могу да се користе и прва и друга Ојлерова смена.

Првом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-x$$

у датом интегралу I имамо да је

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},\quad dx=2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,$$

па је

$$I=2\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\,dt=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|t-1/2|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}+C.$$

Заменом t са $x+\sqrt{x^2-x+1}$ добијамо дати интеграл.

Другом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2-x+1}=xt-1$$

имамо да је

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1},\quad dx=-2\cdot\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\,dt,\quad x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1},$$

па је

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = -2\int \frac{t^2-t+1}{t(t-1)(t+1)^2}\, dt = 2\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+1} - 3\int \frac{dt}{(t+1)^2}.$$

Према томе,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + \frac{3}{t+1} + C,$$

где је

$$t = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}.$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решење. И овде постоје услови и за прву и за другу Ојлерову смену.

Првом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+t$$

имамо да је

$$x = \frac{1-t^2}{2t-1}, \quad dx = -\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}\, dt, \quad x+t = \frac{t^2-t+1}{2t-1},$$

па је

$$I = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right| + C.$$

Другом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt+1$$

добијамо да је

$$x = \frac{1-2t}{t^2-1}, \quad dx = \frac{2t^2-2t+2}{(t^2-1)^2}\, dt, \quad xt+1 = -\frac{t^2-t+1}{t^2-1}.$$

Заменом ових вредности у дати интеграл налазимо да је

$$I = \int \frac{2dt}{2t-1} = \ln|2t-1| + C = \ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

13. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}\, dx$.

Решење. Пошто је $a=1$ и $c=5$, могу да се примене и прва и друга Ојлерова смена. На пример, помоћу прве Ојлерове смене

$$\sqrt{x^2+4x+5} = x+t$$

имамо да је $x = \dfrac{t^2-5}{2(2-t)}$, па је

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}\, dx = \int \frac{t^2-5}{2(2-t)^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{4}{t-2} - \frac{1}{(t-2)^2}\right)\, dt.$$

Према томе,
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx = \frac{t}{2} + 2\ln|t-2| + \frac{1}{2(t-2)} + C,$$
где је $t = \sqrt{x^2+4x+5} - x$.

Трећа Ојлерова смена. Трећу Ојлерову смену користимо када трином ax^2+bx+c има реалне и различите нуле α и β, односно када је
$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\beta. \tag{1}$$
Ако је $a<0$, корен тринома је дефинисан за $x\in[\alpha,\beta]$ за $\alpha<\beta$. У том случају смена је
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha) \tag{2}$$
или
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(\beta-x). \tag{3}$$
У првом случају из једнакости (1) и (2) следи да је
$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a}, \quad dx = \frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}\,dt, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}.$$
Заменом ових израза у дати интеграл I добијамо да је $I = \displaystyle\int g(t)dt$, где је
$$g(t) = 2R\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}, \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}\right)\cdot\frac{a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}.$$
Ако је G примитивна функција за функцију g, тада је $I = G(t)+C$, где је
$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\alpha}.$$
Смена (2) може да се напише и у облику
$$\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}} = t.$$
Како за $x\neq\alpha$ важи
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{a(x-\alpha)\frac{x-\beta}{x-\alpha}} = (x-\alpha)\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}},$$
очигледно је да је трећа Ојлерова смена уведена тако да рационализује интегранд.

Слично важи и у случају смене (3)

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}},\ c>0.$

Решење. Нуле тринома $-x^2+c^2$ су $-c$ и c. Трећом Ојлеровом сменом
$$\sqrt{c^2-x^2} = (c-x)t$$

за $x \in (-c, c)$ имамо да је

$$x = c \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4ct}{(t^2+1)^2}\, dt, \quad \sqrt{c^2 - x^2} = \frac{2ct}{t^2+1}.$$

Заменом ових израза у дати интеграл добијамо да је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \arctan t + C.$$

Како је $(c + x) = t^2(c - x)$, то је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = 2 \arctan \sqrt{\frac{c+x}{c-x}} + C.$$

Ако уведемо трећу Ојлерову смену са другом нулом, $\sqrt{c^2 - x^2} = (x + c)t$, добијамо да је

$$x = c \cdot \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{-4ct}{(t^2+1)^2}\, dt, \quad \sqrt{c^2 - x^2} = \frac{2ct}{t^2+1}.$$

Сада је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = -2 \int \frac{dt}{t^2+1} = -2 \arctan t + C.$$

Како је $(c - x) = t^2(c + x)$, то је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = -2 \arctan \sqrt{\frac{c-x}{c+x}} + C.$$

Дакле, за функцију $f : x \mapsto 1/\sqrt{c^2 - x^2}$ добили смо две примитивне функције F_1 и F_2, где је

$$F_1(x) = 2 \arctan \sqrt{\frac{c+x}{c-x}}, \quad F_1(x) = -2 \arctan \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}.$$

Наравно, ове две примитивне функције се разликују за константу. Осим тога, знамо једноставнију примитивну функцију (из таблице интеграла) $F : x \mapsto \arcsin(x/c)$. Функције F_1 и F се такође разликују за константу[1].

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \sqrt{-x^2 + 4x - 3}}.$

Решење. Овде је $a = -1$ и $c = -3$, па није могуће користити прве две Ојлерове смене. Како су нуле тринома $-x^2 + 4x - 3$ бројеви 1 и 3, интегранд је дефинисан за $x \in [1, 3]$ и трећом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = (x - 1)t$$

добија се

$$x = \frac{t^2 + 3}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}, \quad 2 + \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2 \cdot \frac{t^2 + t + 1}{t^2 + 1}.$$

Заменом ових израза у дати интеграл I налазимо да је

$$I = -2 \int \frac{tdt}{(t^2+1)(t^2+t+1)} = -2 \arctan t + \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

[1]Из једнакости $F_1(x) = F(x) + C$ за $x = 0$ добијамо да је $2 \arctan \sqrt{\frac{c+x}{c-x}} = \arcsin \frac{x}{c} + \frac{\pi}{2}$.

где је

$$t = \frac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{x-1}.$$

16. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(7x-10-x^2)\sqrt{7x-10-x^2}}.$

Решење. У триному $7x-10-x^2$ је $a=-1$ и $c=-10$, па не могу да се користе ни прва, ни друга Ојлерова смена. Како су нуле овог тринома бројеви 2 и 5, може да се примени трећа Ојлерова смена.

Интегранд је дефинисан за $x \in (2,5)$, па сменом

$$\sqrt{7x-10-x^2} = (x-2)t$$

добијамо да је

$$x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}, \quad dx = -\frac{6tdt}{(1+t^2)^2}, \quad (x-2)t = \frac{3t}{1+t^2}.$$

Заменом ових вредности у дати интеграл I имамо да је

$$I = -\frac{6}{27}\int \frac{5+2t^2}{t^2}\,dt = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{t} - \frac{4}{9}t + C,$$

где је

$$t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}.$$

Прва или трећа Ојлерова смена? Ако трином ax^2+bx+c има реалне и различите нуле и ако је $a>0$, тада могу да се примене и прва и трећа Ојлерова смена. Корен из овог тринома је дефинисан за $x \le \alpha$ и за $x \ge \beta$. За $x \le \alpha$ трећа Ојлерова смена је

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (\alpha - x)t \quad \text{или} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = (\beta - x)t,$$

а за $x \ge \beta$ трећа Ојлерова смена је

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)t \quad \text{или} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t.$$

17. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}\,dx.$

Решење. Пошто је $x^2+2x = x(x+2)$, то је $\alpha = 0$ и $\beta = -2$.

За $x < -2$ је

$$\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{x(x+2)} = \sqrt{(x+2)^2\cdot\frac{x}{x+2}} = |x+2|\sqrt{\frac{x}{x+2}} = (-2-x)\sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$

Сменом

$$\sqrt{x^2+2x} = (-x-2)t,$$

односно $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}} = t$, имамо да је

$$x = -\frac{2t^2}{t^2-1}, \quad dx = \frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+2x} = \frac{2t}{t^2-1}, \quad x-1 = \frac{-3t^2+1}{t^2-1}.$$

Заменом ових израза у дати интеграл добијамо да је

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{-3t^2+1}{t^2}\,dt = -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + C.$$

Како је

$$t = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x-2} = \sqrt{\frac{x}{x+2}},$$

то је

$$I = -\frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}} + C.$$

За $x < -2$ важи и

$$\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{x^2\cdot\frac{x+2}{x}} = |x|\sqrt{\frac{x+2}{x}} = -x\sqrt{\frac{x+2}{x}},$$

па можемо да уведемо смену и са другом нулом тринома. Ако је

$$\sqrt{x^2+2x} = -xt,$$

односно $\sqrt{\frac{x+2}{x}} = t$, онда је

$$x = \frac{2}{t^2-1},\quad dx = -\frac{4t}{(t^2-1)}\,dt,\quad \sqrt{x^2+2x} = -\frac{2t}{t^2-1},\quad x-1 = \frac{3-t^2}{t^2-1},$$

па је

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}\,dt = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t + C.$$

Како је $t = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$, добија се исти резултат за интеграл као при првој смени.

За $x > 0$ је

$$\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{x(x+2)} = \sqrt{x^2\cdot\frac{x+2}{x}} = x\sqrt{\frac{x+2}{x}}.$$

Сменом

$$\sqrt{x^2+2x} = xt,$$

односно $\sqrt{\frac{x+2}{x}} = t$, имамо да је

$$x = \frac{2}{t^2-1},\quad dx = -\frac{4tdt}{(t^2-1)^2},\quad x-1 = \frac{3-t^2}{t^2-1}.$$

Заменом ових израза у дати интеграл добијамо да је

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t} + C.$$

Како је

$$t = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x},$$

то је $I = F_1(x) + C$, где је

$$F_1(x) = \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}}.$$

За $x > 0$ исто се добија и у случају смене

$$\sqrt{x^2+2x} = (x+2)t.$$

Дакле, није било проблема приликом коришћења било које верзије треће Ојлерове смене. Остаје сада да видимо како изгледа примена прве Ојлерове смене у овом истом интегралу.

Ако је

$$\sqrt{x^2+2x} = t - x,$$

тада је

$$x = \frac{t^2}{2+2t}, \quad dx = \frac{2t^2+4t}{(2+2t)^2}, \quad \sqrt{x^2+2x} = \frac{t^2+2t}{2+2t}, \quad x-1 = \frac{t^2-2t-2}{2+2t}.$$

Заменом ових вредности у дати интеграл добијамо да је

$$I = 2\int \frac{(t^2-2t-2)}{(t^2+2t)^2}\,dt = 2\cdot\frac{1-t}{t^2+2t} + C.$$

Заменом t са $\sqrt{x^2+2x}+x$ имамо да је $I = F_2(x)+C$, где је

$$F_2(x) = 2\cdot\frac{1-x-\sqrt{x^2+2x}}{2x^2+4x+2\sqrt{x^2+2x}+2x\sqrt{x^2+2x}}.$$

Примитивне функције F_1 и F_2 се разликују за константу[2]. Ако за прву Ојлерову смену узмемо

$$\sqrt{x^2+2x} = t + x,$$

добијамо да је

$$I = 2\cdot\frac{t+1}{2t-t^2} + C, \quad t = \sqrt{x^2+2x} - x.$$

Друга или трећа Ојлерова смена? Ако у триному ax^2+bx+c важи $a<0$ и $c>0$, тада не може да се примени прва, а може да се користи друга Ојлерова смена. Међутим, тада важи и $b^2>4ac$, па може да се користи и трећа Ојлерова смена.

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}}$, $c>0$ (други пут).

Решење. Овај интеграл је у задатку 14 решен применом треће Ојлерове смене. Сада ћемо исти овај интеграл решити помоћу друге Ојлерове смене.

Ако је $\sqrt{c^2-x^2} = xt - c$, тада је

$$x = \frac{2ct}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2c-2ct^2}{(1+t^2)^2}, \quad \sqrt{c^2-x^2} = xt - c = \frac{ct^2-c}{1+t^2},$$

па је

$$I = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\arctan t + C = -2\arctan\frac{\sqrt{c^2-x^2}+c}{x} + C = F_3(x) + C$$

[2] За $x>0$ важи $F_1(x)-F_2(x)=2$.

за $x \in (-c, 0)$ и за $(0, c)$.

Између примитивне фунције F_3 и F (видети задатак 14) за $x \in (-c, 0)$ важи веза $F_3(x) = F(x) + \pi$, а за $x \in (0, c)$ важи веза $F_3(x) = F(x) - \pi$.

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$.

Решење. Овде је $a = -1$, $c = 5$ и $b^2 - 4ac = 36$, што значи да не може да се користи прва, али могу да се користе друга и трећа Ојлерова смена.

Итегранд је дефинисан за $x \in (-1, 5)$, па трећом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{-x^2+4x+5} = (x+1)t$$

имамо да је $x = \dfrac{5-t^2}{1+t^2}$, па је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\arctan t + C,$$

где је $t = \sqrt{\dfrac{5-x}{x+1}}$.

Како је

$$\sqrt{-x^2+4x+5} = \sqrt{-(x+2)(x-5)} = \sqrt{-(x+1)^2\frac{x-5}{x+1}} = (x+1)\sqrt{\frac{5-x}{x+1}},$$

трећа Ојлерова смена може да буде и

$$\sqrt{-x^2+4x+5} = (x+1)t.$$

Тада је

$$x = \frac{5t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{12t}{(t^2+1)^2}\,dt, \quad \sqrt{-x^2+4x+5} = \frac{6t}{t^2+1},$$

па је

$$I = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan t + C,$$

где је $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{5-x}}$.

Дакле, $I = F_1(x) + C_1 = F_2(x) + C_2$, где је

$$F_1(x) = 2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{5-x}}, \quad F_2(x) = -2\arctan\frac{5-x}{x+1}.$$

Наравно, примитивне функције F_1 и F_2 се разликују за константу[3].

Да видимо сада да ли је повољна друга Ојлерова смена. Ако је

$$\sqrt{-x^2+4x+5} = xt - \sqrt{5},$$

тада је

$$x = \frac{4+2t\sqrt{5}}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-2\sqrt{5}t^2 - 8t + 2\sqrt{5}}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{-x^2+4x+5} = \frac{4t+\sqrt{5}t^2-\sqrt{5}}{t^2+1},$$

[3] За $x \neq 0$ важи једнакост $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

па је

$$I = -\int \frac{2\sqrt{5}t^2 + 8t - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}t^2 + 4t - \sqrt{5}} \cdot \frac{dt}{t^2+1} = -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\arctan t + C.$$

Према томе, за $x \in (-1, 0)$ и за $x \in (0, 5)$ је $I = F_3(x) + C$, где је

$$F_3(x) = -2\arctan \frac{\sqrt{-x^2+4x+5} + \sqrt{5}}{x}.$$

Како је $\lim\limits_{x\to 0_-} F_3(x) = \pi$ и $\lim\limits_{x\to 0_+} F_3(x) = -\pi$, можемо дефинисати нову функцију

$$F_4(x) = \begin{cases} F_3(x) - \pi, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ F_3(x) + \pi, & x \in (0, 5) \end{cases}$$

која је примитивна функција за дати интегранд на целом интервалу $(-1, 5)$.

Дати интеграл се лако своди и на таблични интеграл, при чему се добија да је $I = F_5(x) + C$, где је

$$F_5(x) = -\arcsin \frac{2-x}{3} + C.$$

Наравно, функције F_4 и F_5 се, исто као и функција F_2, разликују за константе од функције F_1.

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ (трећи пут).

Решење. Овде такође не може да се употреби прва, а могу да се употребе друга и трећа Ојлерова смена. Интеграл је већ решен употребом две верзије друге Ојлерове смене (видети задатак 4 и задатак 10), а сада ћемо да га решимо помоћу треће Ојлерове смене.

Нуле тринома $1-2x-x^2$ су $\alpha = -1-\sqrt{2}$ и $\beta = -1+\sqrt{2}$. За $x \in (\alpha, \beta)$ сменом

$$\sqrt{1-2x-x^2} = (x-\alpha)t = (x+1+\sqrt{2})t$$

имамо да је

$$x = \frac{\beta + \alpha t^2}{1+t^2} = \frac{-(1+\sqrt{2})t^2 + \sqrt{2} - 1}{t^2+1}, \qquad dx = \frac{2\alpha t - 2\beta t}{(1+t^2)^2}\,dt = -\frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{\beta-\alpha}{1+t^2}t, \qquad 1 + \sqrt{1-2x-x^2} = \frac{t^2 + 2\sqrt{2}t + 1}{t^2+1}.$$

Заменом ових израза у дати интеграл I добијамо да је

$$I = 2\int \frac{(\beta-\alpha)t}{(1+t^2)(1+t^2+(\beta-\alpha)t)}\,dt = -4\sqrt{2}\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}t+1)} = -4\sqrt{2}\int g(t)dt.$$

Како је

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{t^2+2\sqrt{2}t+1}$$

и како је

$$\int \frac{dt}{t^2+2\sqrt{2}t+1} = -\operatorname{arctanh}(t+\sqrt{2}) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}-1}{t+\sqrt{2}+1}\right| + C,$$

то је

$$I = -2\arctan t - 2\operatorname{arctanh}(t+\sqrt{2}),$$

где је

$$t = \sqrt{\frac{-x-1+\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}}.$$

У три различита решења дибили смо три примитивне функције.

Из задатка 4 имамо примитивну функцију F_1 дату са

$$F_1(x) = -2\arctan t + \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|, \quad t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x},$$

која важи за $x \in (\alpha, 0)$ и за $(0, \beta)$.

Из задатка 10 имамо примитивну функцију F_2 дату са

$$F_2(x) = -2\arctan t - \ln|t-1|, \quad t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x},$$

која такође важи за $x \in (\alpha, 0)$ и за $(0, \beta)$.

Из овог решења имамо примитивну функцију F_3 дату са

$$F_3(x) = -2\arctan t - 2\operatorname{arctanh}(t+\sqrt{2}), \quad t = \sqrt{\frac{-x-1+\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}}$$

која важи за свако $x \in (\alpha, \beta)$.

Још једну примитивну функцију F_4 даје Wolfram

$$F_4(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-x+1}{\sqrt{1-2x-x^2}+x+3} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

која такође важи за свако $x \in (\alpha, \beta)$.

Прва, друга или трећа Ојлерова смена? Ако у триному ax^2+bx+c важи $a>0$, $c>0$ и $b^2>4ac$, тада се могу користити све три Ојлерове смене. Тешко је рећи која је од њих генерално најпогоднија. То углавном зависи од примера до примера.

21. $\int \sqrt{x^2-5x+4}\,dx.$

У овом примеру интегранд је дефинисан за $x \le 1$ и за $x \ge 4$ и могу да се примене све три Ојлерове смене.

У случају прве Ојлерове смене

$$\sqrt{x^2-5x+4} = t - x$$

имамо да је

$$x = \frac{t^2-4}{2t-5}, \quad dx = \frac{2t^2-10t+8}{(2t-5)^2}, \quad \sqrt{x^2-5x+4} = \frac{t^2-5t+4}{2t-5},$$

па је

$$I = 2\int \frac{(t^2-5t+4)^2}{(2t-5)^3}\,dt = \frac{1}{32}(2t-5)^2 - \frac{81}{32}\cdot\frac{1}{(2t-5)^2} - \frac{9}{8}\ln|2t-5| + C.$$

Заменом t са $\sqrt{x^2-5x+4}+x$ и сређивањем 'дугачког' израза добија се да је

$$I=\frac{2x-5}{4}\sqrt{x^2-5x+4}-\frac{9}{8}\ln\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|+C=F(x)+C.$$

У случају друге Ојлерове смене

$$\sqrt{x^2-5x+4}=xt-2$$

имамо да је

$$x=\frac{4t-5}{t^2-1},\quad dx=\frac{10t-4t^2-4}{(t^2-1)^2}\,dt,\quad \sqrt{x^2-5x+4}=\frac{2t^2-5t+2}{t^2-1},$$

па је

$$I=-2\int\frac{(2t^2-5t+2)^2}{(t^2-1)^3}\,dt.$$

Како је

$$\frac{(2t^2-5t+2)^2}{(t^2-1)^3}=\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{(x+1)}+\frac{81}{16}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{81}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^3},$$

то је

$$I=\frac{1}{4}\cdot\frac{41t^3-80t^2+41t}{(t^2-1)^2}-\frac{9}{8}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C.$$

Заменом t са $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}+2}{x}$ налазимо да је

$$I=\frac{2x-5}{4}\sqrt{x^2-5x+4}-\frac{9}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-5x+4}+2+x}{\sqrt{x^2-5x+4}+2-x}\right|+C.$$

Лако се види[4] да је и у овом случају $I=F(x)+C$, где је F иста примитивна функција као и у случају прве Ојлерове смене.

За $x>4$ трећа Ојлерова смена је, на пример,

$$\sqrt{x^2-5x+4}=(x-1)t,$$

односно $x-4=(x-1)t^2$. Из ове једнакости следи да је

$$x=1-\frac{3}{t^2-1},\quad dx=\frac{6tdt}{(t^2-1)^2},\quad \sqrt{(x-1)(x-4)}=(x-1)t=-\frac{3t}{t^2-1},$$

па је

$$I=\int\sqrt{x^2-5x+4}\,dx=-18\int\frac{t^2dt}{(t^2-1)^3}.$$

Како је

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^3}=-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{(t-1)^3}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{(t+1)^3}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{t+1},$$

[4] Важи једнакост

$$\frac{\sqrt{x^2-5x+4}+2+x}{\sqrt{x^2-5x+4}+2-x}=\frac{(\sqrt{x^2-5x+4}+2+x)(\sqrt{x^2-5x+4}+x-2)}{\sqrt{x^2-6x+4}^2-(x-2)^2}=-2x+5-2\sqrt{x^2-5x+4}.$$

то је

$$\begin{aligned}I =&\frac{9}{8(t-1)^2}+\frac{9}{8(t-1)}+\frac{9}{8}\ln|t-1|-\frac{9}{8(t+1)^2}+\frac{9}{8(t+1)}-\frac{9}{8}\ln|t+1|\\ =&\frac{9}{4}\cdot\frac{t^3+t}{(t^2-1)^2}-\frac{9}{8}\cdot\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C.\end{aligned}$$

Заменом t са $\sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}}$ добијамо да је $I=F(x)+C$, где је F поново иста примитивна функција као у случају прве Ојлерове смене.

Слично се добија и за $x<1$.

22. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Решење. И у овом примеру могу да се примене све три Ојлерове смене.

Првом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2-3x+2}=t-x$$

имамо да је

$$x=\frac{t^2-2}{2t-3},\qquad dx=\frac{2t^2-6t+4}{(2t-3)^2},\qquad \sqrt{x^2-3x+2}=t-x=\frac{t^2-3t+2}{2t-3},$$

па је

$$I=\int\frac{2dt}{2t-3}=\ln|2t-3|+C=\ln\left|2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C=F_1(x)+C.$$

Другом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2-3x+2}=xt+\sqrt{2}$$

имамо да је

$$x=-\frac{3+2\sqrt{2}t}{t^2-1},\qquad dx=\frac{2\sqrt{2}t^2+6t+2\sqrt{2}}{(t^2-1)^2},\qquad \sqrt{x^2-3x+2}=xt+\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}t^2+3t+\sqrt{2}}{t^2-1},$$

па је

$$I=-2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{x-\sqrt{2}+\sqrt{x^2-3x+2}}{x+\sqrt{2}-\sqrt{x^2-3x+2}}+C=F_2(x)+C.$$

За $x>2$ трећом Ојлеровом сменом

$$\sqrt{x^2-3x+2}=(x-1)t$$

имамо да је

$$x=\frac{t^2-2}{t^2-1},\qquad dx=\frac{2tdt}{(t-1)^2(t+1)^2},\qquad \sqrt{x^2-3x+2}=-\frac{t}{t^2-1},$$

па је

$$I=-2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{x-1+\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1-\sqrt{x^2-3x+2}}\right|+C=F_3(x)+C.$$

Слично се добија и за $x < 1$.

Добијене примитивне функције F_1, F_2 и F_3 су или исте или се разликују за константу. Трансформацијом израза за F_2 лако се добија да је $F_2(x) = F_1(x)$, а трансформацијом израза за F_3 добија се да је[5] $F_3(x) = F_1(x) + \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

Напомене. Наведене Ојлерове смене могу да се користе за сваки интегранд облика $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ јер оне обухватају све случајеве интегранда који је ирационална функција овог облика. Заиста, у случају $b^2 > 4ac$ може трећа Ојлерова смена, а у случају $b^2 < 4ac$ могу прва и друга Ојлерова смена јер је $a > 0$ и $c > 0$ (за $a < 0$ и $c < 0$ интегранд није дефинисан). Случај $b^2 = 4ac$ није актуелан јер је тада интегранд рационална функција. Штавише, прва и трећа смена такође обухватају све случајеве јер за $a > 0$ имамо прву Ојлерову смену, а за $a < 0$ интегранд је дефинисан једино за $b^2 - 4ac \geq 0$. Ако се искључи двоструки корен ($b^2 = 4ac$), остаје само $b^2 > 4ac$, што значи да може да се примени трећа Ојлерова смена. Међутим, то не значи да је друга Ојлерова смена потпуно непотребна. Када је $a < 0$ и $c > 0$, може да се деси да је повољније користити другу него трећу Ојлерову смену.

У неким случајевима применом Ојлерових смена добијају се компликоване рационалне функције. Због тога интеграле овог типа треба решавати и другим сменама или другим начинима. У тачкама 6), 7), 8) и 9) поглавља 5.9 из уџбеника [1] дати су други начини решавања интеграла овог типа у неким специјалним случајевима.

На интеграле који могу да се реше Ојлеровим сменама своде се и интеграли чији интегранди су рационалне функције три аргумента: x, $\sqrt{ax+b}$ и $\sqrt{cx+d}$. У том случају сменом $ax + b = t^2$ имамо да је

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx = \int R\left(\frac{t^2 - b}{a}, t, \sqrt{pt^2 + q}\right) \frac{2t}{a}\, dt,$$

где је $p = c/a$ и $q = (ad - bc)/a$. Према томе,

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx = \int R_1(t, \sqrt{pt^2 + q})\, dt,$$

где је R_1 рационална функција два аргумента.

Задаци за самосталан рад

Израчунати дати интеграл.

23. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1 + x^2}\, dx.$

24. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2}\, dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + 2x}\, dx.$

[5] Није тешко проверити да је

$$\frac{x - \sqrt{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x + \sqrt{2} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}} = (3 + 2\sqrt{2})(2x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}).$$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x-1}\,dx.$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x+2}\,dx.$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{x^2+4x}\,dx.$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}.$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}.$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+5}}.$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}.$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}.$

36. $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x+x^2\sqrt{x^2+2x}}\,dx.$

37. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x+x^2})^2}.$

40. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}.$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

48. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{(c^2+x^2)\sqrt{c^2-x^2}}$.

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a)\sqrt{x^2+b}}$.

51. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

52. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

53. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

54. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}$.

55. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$.

56. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+4x+3}}{x+\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$.

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., Лазовић, Р., Јованов., Ђ., *Математика 2 - збирка задатака и примери колоквијума*, ФОН, Београд, 2009.