

ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА У НЕОДРЕЂЕНОМ ИНТЕГРАЛУ

Решени примери и задаци за вежбу

Драган Ђорић

За интеграле $\int u(x)dv(x)$ и $\int v(x)du(x)$ довољно је израчунати један од њих јер је (на основу једнакости $d(uv) = u dv + v du$)

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Решени примери

Израчунати дати интеграл.

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, a > 0, |x| \leq a.$

Задатак је решен у [1].

2. $\int e^{ax} \sin bx dx, a \neq 0.$

Задатак је решен у [1].

3. $\int e^{ax} \cos bx dx, a \neq 0.$

Задатак је решен у [1].

4. $\int \frac{x}{1 - \cos x} dx.$

Задатак је решен у [2].

5. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx.$

Задатак је решен у [2].

6. $\int \frac{x \sin x}{(1 + \cos x)^2} dx.$

Задатак је решен у [2].

7. $\int \frac{x \sin x}{(2 + \cos x)^2} dx.$

Задатак је решен у [3].

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx.$

Задатак је решен у [2].

ИНТЕГРАЛИ ТИПА $\int f(x) \cdot \arctan(g(x)) dx$. За интеграле овог типа треба покушати парцијалну интеграцију са $u(x) = \arctan(g(x))$. Слично важи и у случају да је уместо \arctan нека друга инверзна тригонометријска функција.

9. $\int \frac{1}{(x+2)^3} \cdot \arctan \frac{x}{2} dx.$

Задатак је решен у [2].

10. $\int \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \arctan \frac{x}{2} dx.$

Задатак је решен у [2].

11. $\int \frac{\arctan \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} dx.$

Задатак је решен у [2].

12. $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx.$

Задатак је решен у [2].

13. $\int (1-2x) \arctan \frac{2+2x}{1-4x} dx.$

Задатак је решен у [3].

14. $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx.$

Задатак је решен у [2].

15. $\int (3x^2 + 6x + 5) \arctan x dx.$

Задатак је решен у [2].

16. $\int x^2 \arccos x dx$

Задатак је решен у [1].

17. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

Задатак је решен у [2].

18. $\int x^2 \cdot \arcsin \frac{1}{x} dx.$

Задатак је решен у [2].

19. $\int \arcsin^2 x dx.$

Задатак је решен у [1].

20. $\int \arcsin x \cdot \arccos x \, dx.$

Задатак је решен у [2].

21. $\int \ln x \cdot \arcsin x \, dx.$

Задатак је решен у [2].

ИНТЕГРАЛИ ТИПА $\int f(x) \cdot \ln(g(x)) dx$. За интеграле овог типа треба покушати парцијалну интеграцију са $u(x) = \ln(g(x))$.

22. $\int \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} \, dx.$

Задатак је решен у [2].

23. $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \, dx.$

Задатак је решен у [2].

24. $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} \, dx.$

Задатак је решен у [2].

25. $\int \frac{x \ln \sqrt{x^2+1}}{(x^2-9)^2} \, dx.$

Задатак је решен у [3].

26. $\int \frac{(2x-5) \ln x}{(x^2-5x+7)^2} \, dx.$

Задатак је решен у [3].

27. $\int \frac{(2x+3) \ln x}{(x^2+3x+4)^2} \, dx.$

Задатак је решен у [3].

28. $\int \frac{\ln(x^2+9)}{(x-1)^2} \, dx.$

Задатак је решен у [3].

29. $\int \ln(1-x+x^2-x^3) \, dx.$

Задатак је решен у [3].

30. $\int \ln \frac{x^2+1}{x-1} \, dx.$

Задатак је решен у [2].

31. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} \, dx.$

Задатак је решен у [2].

32. $\int \frac{x \ln x}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}} dx.$

Задатак је решен у [2].

33. $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx.$

Задатак је решен у [2].

34. $\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3} dx.$

Задатак је решен у [2].

35. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

Задатак је решен у [2].

36. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$

Задатак је решен у [2].

СМЕНА ПРЕ ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ. Неки интеграли се успешно решавају комбинацијом смене и парцијалне интеграције. У избору смене која претходи парцијалној интеграцији руководимо се претходним искуством са сменама.

37. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

Задатак је решен у [2].

38. $\int \arctan \sqrt{x} dx.$

Задатак је решен у [2].

39. $\int \arctan(\sqrt{x}+1) dx.$

Задатак је решен у [2].

40. $\int \sqrt{x} \ln(1+\sqrt{x}) dx.$

Задатак је решен у [2].

41. $\int \frac{\ln x}{x} \cdot \ln^2(\ln x) dx.$

Задатак је решен у [2].

42. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^{3x}} dx.$

Задатак је решен у [2].

43. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \cdot \cos \frac{3}{x} dx.$

Задатак је решен у [2].

44. $\int \frac{\sqrt{x} \arctan \sqrt{x}}{x+1} dx.$

Задатак је решен у [2].

45. $\int x \sin \sqrt{x} dx.$

Задатак је решен у [2].

46. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\ln^2 \sqrt{x} - 9} dx.$

Задатак је решен у [3].

47. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln \frac{1}{x^2} dx.$

Задатак је решен у [2].

РЕКУРЕНТНЕ ВЕЗЕ. За неке интеграле функција које зависе од параметра $n \in \mathbb{N}$ могу да се добију рекурентне формуле. За добијање рекурентних веза углавном се користи парцијална интеграција.

48. Израчунати $\int x^n e^x dx$ за $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Задатак је решен у [1].

49. Израчунати $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Задатак је решен у [1].

50. Ако је $I_n = \int \cos^n x dx$, доказати да важи

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Задатак је решен у [1].

51. Одредити везу између I_n и I_{n-2} , ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) ако је

$$I_n = \int \arcsin^n x dx.$$

Задатак је решен у [2].

52. Одредити везу између I_n и I_{n-2} , ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) ако је

$$I_n = \int \tan^n x dx.$$

Задатак је решен у [2].

Задаци за самосталан рад

Израчунати дари интеграл.

53. $\int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} \, dx.$

54. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2}.$

55. $\int \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^2}.$

56. $\int \frac{x e^x}{(x + 1)^2} \, dx.$

57. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^4} e^{-x} \, dx.$

58. $\int \sin x \cosh x \, dx.$

59. $\int \frac{\cos^2 x}{e^{2x}} \, dx.$

60. $\int e^{ax} \sin^2 x \, dx.$

61. $\int x^2 e^x \cos x \, dx.$

62. $\int x e^x \sin^2 x \, dx.$

63. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx.$

64. $\int \frac{x dx}{(2 \cos x + \sin x)^2}.$

65. $\int x \arctan^2 x \, dx.$

66. $\int (x^2 + x) \arctan x \, dx.$

67. $\int x^3 \arctan x \, dx.$

68. $\int x^5 \arctan x \, dx.$

69. $\int \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} \arctan x \, dx.$

70. $\int \frac{x^4 \arctan x}{x^2 + 1} \, dx.$

$$71. \int \frac{3x^2 - 1}{x\sqrt{x}} \arctan x \, dx.$$

$$72. \int \frac{x^2 \arctan x}{(1+x^3)^2} \, dx.$$

$$73. \int \frac{x \arctan x}{(x^2 + 1)^2} \, dx.$$

$$74. \int \frac{\arctan \sqrt{e^x}}{(1 + e^x)\sqrt{e^x}} \, dx.$$

$$75. \int \frac{\arctan x \, dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

$$76. \int \frac{\arctan x \, dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$77. \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx.$$

$$78. \int \frac{e^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}} \, dx.$$

$$79. \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}} \, dx.$$

$$80. \int \arccos(5x - 2) \, dx.$$

$$81. \int x^2 \arcsin 2x \, dx.$$

$$82. \int \arcsin^3 \frac{x}{3} \, dx.$$

$$83. \int \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}} \, dx.$$

$$84. \int \arccos^2 x \, dx.$$

$$85. \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x \, dx.$$

$$86. \int \frac{\arcsin x \, dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$87. \int \frac{(1+x^2) \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

$$88. \int \sqrt{x} \arcsin \sqrt{1-x} \, dx.$$

$$89. \int x \sqrt{1-x^2} \arccos x \, dx.$$

$$90. \int \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2} \, dx.$$

91. $\int \frac{x \arcsin x}{(1+x^2)^2} dx.$
92. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
93. $\int \ln(x+4+x^2) dx.$
94. $\int \ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) dx.$
95. $\int x^{3/2} \ln^2 x dx.$
96. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln(x+1) dx.$
97. $\int x^3 \ln^3 x dx.$
98. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2 \sqrt{x}} dx.$
99. $\int \frac{\ln^3 x}{x^3} dx.$
100. $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx.$
101. $\int \frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2} dx.$
102. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$
103. $\int \frac{\ln x dx}{(\ln x + 1)^2}.$
104. $\int \frac{x \ln(1-x+x^2)}{(1+x^2)^2} dx.$
105. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x-1}}.$
106. $\int \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x}} dx.$
107. $\int \frac{\ln(1+x^2)}{(1-2x)^3} dx.$
108. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx.$
109. $\int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx.$

$$110. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$111. \int x \arctan x \ln(1+x^2) dx.$$

$$112. \int x \sqrt{x^2+1} \ln(x^2-1) dx.$$

За дати интеграл I_n одредити неку рекурентну везу.

$$113. I_n = \int x \cdot \sin^n x dx.$$

$$114. I_n = \int x \cdot \cos^n x dx.$$

$$115. I_n = \int e^x \cdot \sin^n x dx.$$

$$116. I_n = \int e^x \cdot \cos^n x dx.$$

$$117. I_n = \int \ln^n x dx.$$

$$118. I_n = \int x^n \sin x dx.$$

$$119. I_n = \int x^n \cos x dx.$$

$$120. I_n = \int x^n \sinh x dx.$$

$$121. I_n = \int x^n \cosh x dx.$$

$$122. I_n = \int x^n \sqrt{x^2+a^2} dx.$$

$$123. I_n = \int x^n \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

$$124. I_n = \int x^n \sqrt{x^2-a^2} dx.$$

$$125. I_n = \int x^n \sqrt{ax+b} dx.$$

$$126. I_n = \int \frac{x^n dx}{x^2+a^2}.$$

$$127. I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx}}.$$

$$128. I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$$129. I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$130. I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$131. I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

$$132. I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

$$133. I_n = \int \frac{x^n \arctan x}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

$$134. I_n = \int \frac{x^n \arctan x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx.$$

$$135. I_n = \int \cos^n x dx.$$

$$136. I_n = \int \sinh^n x dx.$$

$$137. I_n = \int \cosh^n x dx.$$

$$138. I_n = \int \cot^n x dx.$$

$$139. I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}.$$

$$140. I_n = \int \frac{dx}{\cosh^n x}.$$

$$141. I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Литература

- [1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.
- [2] Ђорић, Д., *Математика 2 - решени примери са испита и колоквијума*, ФОН, Београд, 2014.
- [3] Тодорчевић, В., Џамић, Д., Младеновић, Н., Николић, Н., *Математика 2 - збирка задатака*, ФОН, Београд, 2016.
- [4] Ђорић, Д., Лазовић, Р., Јованов., Ђ., *Математика 2 - збирка задатака и примери колоквијума*, ФОН, Београд, 2009.