МАТЕМАТИКА 2

Први писмени колоквијум, 21.4.2017

Група 6

Решења задатака

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Функција $f: R^2 \to R$ дефинисана је са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2 - x^2y^4}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Испитати диференцијабилност функције f у тачки $(0,0)$.

Решење: Према дефиницији из уџбеника[1], функција f је диференцијабилна у тачки $(0,0)$ ако је

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{1}$$

када $(x,y) \to (0,0)$. Пошто је $f(0,0) = 0$ и

$$f'_x(0,0) = \lim_{u\to 0} \frac{f(u,0) - f(0,0)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{0}{u} = 0, \quad f'_y(0,0) = \lim_{u\to 0} \frac{f(0,u) - f(0,0)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{0}{u} = 0,$$

услов (1) своди се на услов

$$f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2}), \text{ када } (x,y) \to (0,0). \tag{2}$$

Дакле, треба проверити да ли важи услов (2), односно да ли је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$, где је

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^4y^2 - x^2y^4}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Како је за $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} |g(x,y)| &\leq \frac{x^4}{x^4+y^4} \cdot \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^4}{x^4+y^4} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^4}{x^4+y^4} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| + \frac{y^4}{x^4+y^4} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |x| \\ &= \frac{x^4}{x^4+y^4} \cdot \sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \cdot |y| + \frac{y^4}{x^4+y^4} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot |x| \\ &\leq |y| + |x| \end{aligned}$$

следи да $g(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$.

Према томе, функција f је диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Друго решење. Из једнакости

$$g(x,y) = \frac{x^4y^2 - x^2y^4}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \cdot \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

и неједнакости $2x^2y^2 \leq x^4+y^4$ следи да је

$$|g(x,y)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

[1]М. Стојановић, О. Михић, **Математика 2**, ФОН, Београд, 2013

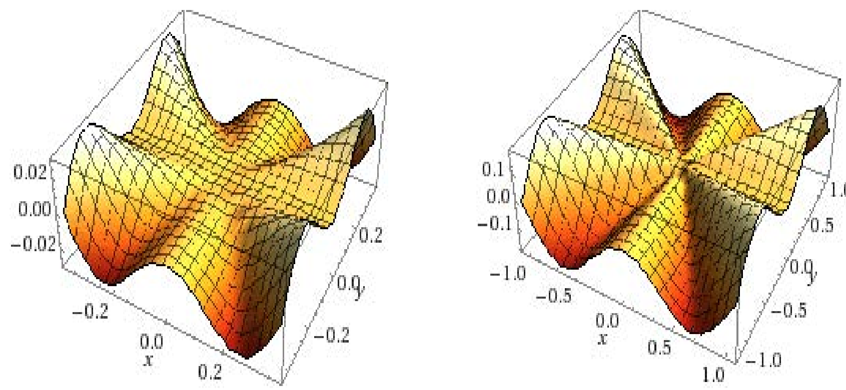
Према томе, $g(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to 0$, па је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Треће решење. Ако је $h(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$, тада је

$$|g(x,y)| \le \frac{x^4y^2}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2y^4}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{(h(x,y))^6}{(h(x,y))^5} + \frac{(h(x,y))^6}{(h(x,y))^5} = 2h(x,y).$$

Како $h(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$, то и $g(x,y) \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$, па је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

На слици 1 су дати графици функција f и g у околини тачке $(0,0)$.



Сл.1 График функције f (лево) и график функције g (десно)

2. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x,y) \mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу

$$z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0,$$

при чему је $z \neq 0$.

Решење: Задатак је исти као задатак 4.22 у збирци[2] *Решени примери са испита и колоквијума* и решење се може наћи у тој збирци, при чему треба узети у обзир и исправке[3] које се налазе на адреси `http://math.fon.rs/matematika-dva`.

Овде се даје решење са више детаља. Сетимо се, најпре, тврђења о егзистенцији имплицитно дефинисане функције две промењиве (Теорема 2.8.11 у уџбенику).

Теорема. *Нека је $X \subset \mathbb{R}^3$ отворен скуп и нека функција $F : X \to \mathbb{R}$ има следећа својства:*

1. *F је непрекидна функција на X,*
2. *постоји $(x_0,y_0,z_0) \in X$ за коју је $F(x_0,y_0,z_0) = 0$,*
3. *F'_z је непрекидна функција на X,*
4. *у тачки (x_0,y_0,z_0) важи $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.*

Тада постоји околина $U \times V$ тачке (x_0,y_0,z_0) и једнозначно одређена непрекидна функција $f : U \to V$ таква да је $f(x_0,y_0) = z_0$ и $F(x,y,f(x,y)) = 0$ за $(x,y) \in U$. Уз додатни услов, $F \in C^{(1)}(X)$, за функцију f важи и $f \in C^{(1)}(U)$, при чему је $f'_x = -F'_x/F'_z$ и $f'_y = -F'_y/F'_z$.

[2] Д. Ђорић, **МАТЕМАТИКА 2 - решени примери са испита и колоквијума**, ФОН, 2014.

[3] Једна се односи на текст задатка (уместо x^2 треба z^2), а друга се односи на решење (у изразима за z'_x и z'_y уместо xy треба $xy + 2z$).

За дату функцију f из задатка имамо да је

$$F(x,y,z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3.$$

Услови 1. и 3. из претходне теореме су испуњени на $\mathbb{R}^2$, а услове 2. и 4. ћемо проверити у стационарним тачкама. Како је

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{y^2+3x^2-yz}{2z+xy}, \quad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2xy-xz}{2z+xy},$$

стационарне тачке добијамо из једнакости $F=0$, $F'_x=0$ и $F'_y=0$. Из $F'_y=0$ следи да је $x=0$ или $z=2y$. За $x=0$ је $z=0$, па нас тај случај не интересује јер је у услову задатка $z\neq 0$. Иначе, тада је и $y=0$, па у том случају услов 4. не би био испуњен.

Дакле, остаје $z=2y$. Заменом z са $2y$ у једнакости $F'_x=0$ налазимо да је $y^2=3x^2$. Сада из једнакости $F=0$, узимајући у обзир да је $z=2y$ и $y^2=3x^2$, добијамо да је $x=-6$. То значи да имамо две стационарне тачке, $A(-6,6\sqrt{3})$ и $B(-6,-6\sqrt{3})$, при чему је $f(A)=12\sqrt{3}$ и $f(B)=-12\sqrt{3}$. Да ли је функција f дефинисана у некој околини тачке A и у некој околини тачке B? Одговор ћемо добити ако проверимо да ли у тачкама $(-6,6\sqrt{3},12\sqrt{3})$ и $(-6,-6\sqrt{3},-12\sqrt{3})$ важе услови 2. и 4. из наведене теореме. Услов 2. је свакако испуњен јер смо га користили за добијање тачака A и B, а испуњен је и услов 4. јер је

$$F'_z(-6,6\sqrt{3},12\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}\neq 0, \quad F'_z(-6,-6\sqrt{3},-12\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}\neq 0.$$

То значи да је, према тврђењу Теореме, функција f дефинисана у некој околини тачке A и у некој околини тачке B, па има смисла проверити да ли је у тим тачкама локални екстремум функције f.

У стационарним тачкама важи[4]

$$f''_{x_2} = -\frac{F''_{x^2}}{F'_z} = \frac{6x}{2z+xy}, \quad f''_{y_2} = -\frac{F''_{y^2}}{F'_z} = \frac{2x}{2z+xy}, \quad f''_{xy} = -\frac{F''_{xy}}{F'_z} = \frac{z-2y}{2z+xy} = 0.$$

За $|dx|+|dy|\neq 0$ добијамо да у тачкама A и B важи

$$d^2f(A) = \sqrt{3}dx^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}dy^2 > 0, \quad d^2f(B) = -\sqrt{3}dx^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}dy^2 < 0.$$

Према томе, имплицитно дефинисана функција f има у тачки A локални минимум, а у тачки B има локални максимум,

$$f_{\min} = f(A) = 12\sqrt{3}, \quad f_{\max} = f(B) = -12\sqrt{3}.$$

3. Одредити највећу и најмању вредност функције $(x,y)\mapsto x^2+y^2-2x$ на области

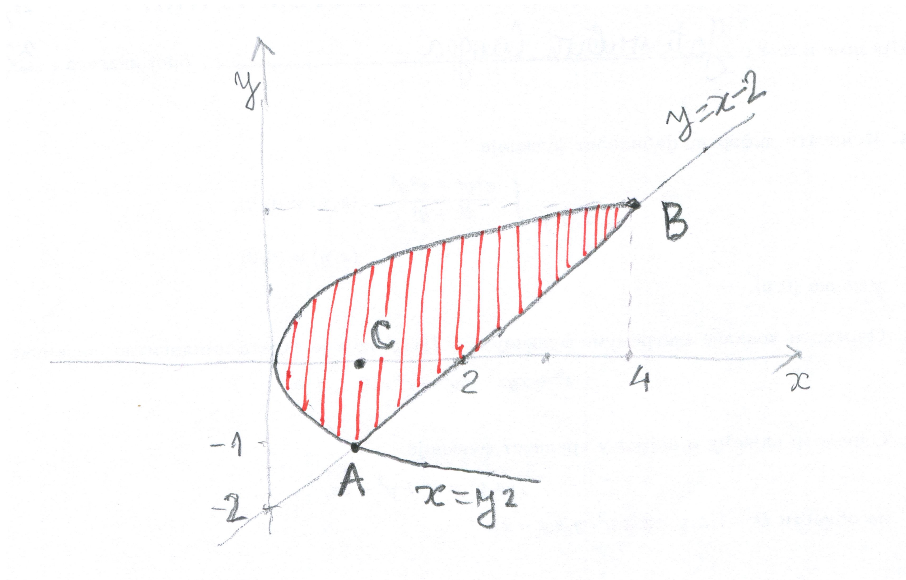
$$\mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ x\geq y,\ y\geq x-2\}.$$

Решење: Област $\mathcal{D}$ је ограничена параболом $x=y^2$ и правом $y=x-2$ (сл. 2), при чему су њихове пресечне тачке $A(1,-1)$ и $B(4,2)$. Како је

$$f(x,y) = (x-1)^2+y^2-1\geq -1,$$

најмања вредност функције f на $\mathbb{R}^2$ је -1 и постиже се у тачки $C(1,0)$. Тачка C припада области $\mathcal{D}$, што значи да је у њој и најмања вредност функције f на области $\mathcal{D}$.

[4]Видети уџбеник, стр.100

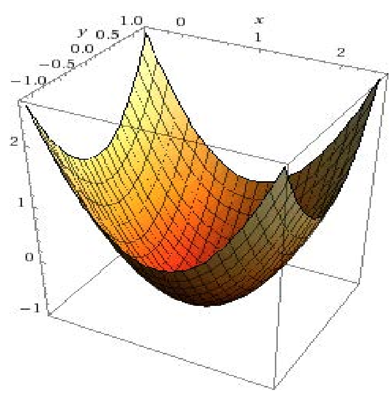


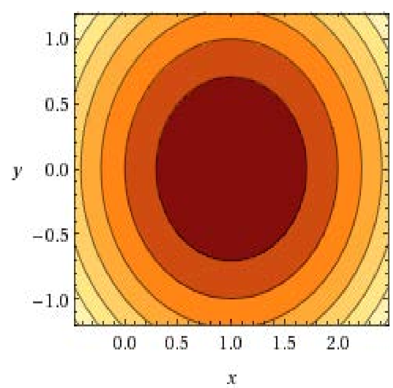
Сл.2 Област $\mathcal{D}$

График функције f је параболоид (сл.3) чије је теме у тачки $(1, 0, -1)$, што значи да се највећа вредност функције f на области $\mathcal{D}$ достиже у тачки области $\mathcal{D}$ која је најудаљенија од тачке C (пројекције темена параболоида на раван xOy). Са слике 2 је очигледно да је то тачка B.

Према томе,

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(C) = -1, \quad \max_{\mathcal{D}} f = f(B) = 12.$$





Сл.3 График функције f (лево) и ниво линије функције f (десно)

Друго решење. У тачки C је најмања вредност функције f на $\mathcal{D}$ јер та тачка припада $\mathcal{D}$ и у њој је најмања вредност функције f на $\mathbb{R}^2$.

Како за $(x, y) \in \mathcal{D}$ важи

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \le x^2 + x - 2x = x^2 - x = x(x-1) \le 12$$

и како је $f(B) = 12$, највећа вредност функције f на области $\mathcal{D}$ је у тачки B.