ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

Потребни услови за локални екстремум

Драган Ђорић

У уџбенику [1] дата је теорема о потребним условима за локални екстремум функције $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$ у тачки $a \in int(D)$ (Теорема 4.2.5). Према тој теореми, у тачки локалног екстремума сви парцијални изводи који постоје у тој тачки морају бити једнаки нули. Уколико је функција диференцијабилна у тачки локалног екстремума, онда је њен диференцијал првог реда у тој тачки једнак нули.

Наведени неопходан или потребан услов за локални екстремум је *услов првог реда*. Овде се даје још једно тврђење које представља *неопходан услов другог реда* за локални екстремум функције више променљивих.

1 Помоћно тврђење

Пре најављеног тврђења даје се, као помоћно тврђење, одговарајући неопходан услов другог реда за локални екстремум функције једне променљиве.

Теорема 1. *Нека функција φ једне променљиве има у тачки $x = 0$ изводе првог и другог реда. Ако је у тачки $x = 0$ локални минимум функције φ, тада је $\varphi''(0) \geq 0$, а ако је у тој тачки локални максимум, тада је $\varphi''(0) \leq 0$.*

Доказ. Нека функција ϕ у тачки $x = 0$ има локални минимум. То значи да постоји $\varepsilon > 0$ тако да за свако $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ важи $\varphi(x) \geq \varphi(0)$. На основу неопходног услова првог реда за локални екстремум функције једне променљиве (Фермаова теорема [2]) следи да је $\varphi'(0) = 0$.

Применом Тејлорове формуле са остатком у Пеановом облику имамо да за $x \to 0$ важи

$$0 \leq \varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + o(x^2) = \frac{x^2}{2}\left(\varphi''(0) + o(1)\right).$$

Према томе, за $x \to 0$ је $\varphi''(0) + o(1) \geq 0$, одакле следи да је $\varphi''(0) \geq 0$.

На исти начин се тврђење доказује и у случају да је у тачки $x = 0$ локални максимум функције φ. ■

Потребан услов другог реда за функције једне променљиве није и довољан услов за локални екстремум. На пример, функција $f : x \mapsto x^3$ у тачки $x = 0$ нема локални екстремум иако је $\varphi''(0) = 0$.

2 Неопходан услов другог реда за локални екстремум

Аналогно тврђење важи и за функције више променљивих.

Нека функција $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ има у тачки $a \in int(D)$ локални екстремум и нека има непрекидне парцијалне изводе првог и другог реда у околини тачке a.

Теорема 2. *Ако је у тачки a локални минимум функције f, тада је $d^2 f(a) \geq 0$, а ако је у тој тачки локални максимум, тада је $d^2 f(a) \leq 0$.*

Доказ. Претпоставимо да функција f у тачки a има локални минимум. Тада постоји ε околина U тачке a за коју важи $f(x) \geq f(a)$ за свако $x \in U$. За дато Δx и свако $t \in (-\varepsilon/|\Delta x|, \varepsilon/|\Delta x|)$ имамо да тачка $a + t\Delta x$ припада околини U.

Дефинишимо сада помоћну функцију $\varphi : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to \mathbb{R}$ са

$$\varphi(t) = f(a + t\Delta x) - f(a),$$

где је $\varepsilon_1 = \varepsilon/|\Delta x|$. Функција φ је, дакле, дефинисана у околини тачке $t = 0$ и у тој тачки има локални минимум јер је $f(a + t\Delta x) \geq f(a)$. Према Теореми 1, то значи да је $\varphi''(0) \geq 0$.

Како је[1]

$$\varphi''(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a) dx_i dx_j = d^2 f(a),$$

следи да је $d^2 f(a) \geq 0$.

На исти начин се тврђење доказује и у случају да је у тачки a локални максимум функције φ. ■

Као и у случају функције једне променљиве, наведени потребни услови нису и довољни за локални екстремум функције више променљивих. На пример, за функцију $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$ важи $df(0,0) = d^2 f(0,0) = 0$, а у тачки $(0,0)$ функција f нема локални екстремум.

Према томе, за два пута непрекидно диференцијабилну функцију f у околини тачке a важи:

1. $df(a) = 0$ и $d^2 f(a) \geq 0$ уколико функција f има локални минимум у тачки a,
2. $df(a) = 0$ и $d^2 f(a) \leq 0$ уколико функција f има локални максимум у тачки a.

Ако су у овим неједнакостима за $d^2 f(a)$ строге неједнакости, онда су то и довољни услови локалног екстремума у стационарној тачки a.

Из Теореме 2 лако се добија одговор и у случају када $d^2 f(a)$ мења знак.

Теорема 3. *Ако $d^2 f(a)$ мења знак у стационарној тачки a, тада функција f у тој тачки нема локални екстремум.*

Доказ. Како у тачки a нису испуњени потребни услови (ни 1., ни 2.), функција f у тачки a нема локални екстремум.

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., Лазовић, Р., *Математика 1*, ФОН, Београд, 2014

[1] Ова једнакост се доказује у теореми о Тејлоровој формули за функције више променљивих