

УСЛОВНИ ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦИЈЕ ТРИ ПРОМЕНЉИВЕ

Решени примери и задаци за вежбу

Драган Ђорић

ФУНКЦИЈЕ ТРИ ПРОМЕНЉИВЕ - ЈЕДАН УСЛОВ

За функцију $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, где је $D \subset \mathbb{R}^3$ отворен скуп, и за дати услов $\varphi(x, y, z) = 0$ Лагранжова функција је

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z).$$

Стационарне тачке функције f при услову $\varphi(x, y, z) = 0$ и параметар λ добијају се решавањем система

$$F'_x(x, y, z) = 0, \quad F'_y(x, y, z) = 0, \quad F'_z(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

За испитивање да ли је у стационарној тачки локални условни екстремум испитује се знак диференцијала

$$d^2F(x, y, z) = F''_{x^2}dx^2 + F''_{y^2}dy^2 + F''_{z^2}dz^2 + 2F''_{xy}dxdy + 2F''_{xz}dxdz + 2F''_{yz}dydz$$

при датом услову $\varphi(x, y, z) = 0$. На пример, ако у стационарној тачки $A(x_0, y_0, z_0)$ важи $\varphi'_x(A) \neq 0$, тада из једнакости

$$\varphi'_x(A)dx + \varphi'_y(A)dy + \varphi'_z(A)dz = 0$$

имамо да је $dx = \alpha dy + \beta dz$, па заменом у d^2F добијамо квадратну форму Φ променљивих dy и dz

$$d^2F(A)|_{\varphi=0} = \Phi(dy, dz) = \alpha dy^2 + 2\beta dydz + \gamma dz^2.$$

Ако је квадратна форма Φ позитивно (негативно) дефинитна, у тачки A је условни локални минимум (максимум), а ако Φ мења знак, у тачки A није условни локални екстремум.

Решени примери

Одредити локалне екстремуме функције f при датом услову (ако постоје).

1. $f(x, y, z) = x + 2y - z$, при услову $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Задатак је решен у [2].

2. $f(x, y, z) = x - 3y + 5z$ при услову $x^2 + 9y^2 + 25z^2 = 12$.

Задатак је решен у [3].

3. $f(x, y, z) = 2x + 2y + 3z$, при условии $xy + yz + zx = \frac{15}{4}$
Задатак је решен у [2].
4. $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$, при условии $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 3$.
Задатак је решен у [2].
5. $f(x, y, z) = x + y + z$, при условии $x^2 + yz = 5$.
Задатак је решен у [2].
6. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, при условии $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$.
Задатак је решен у [2].
7. $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$, при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
Задатак је решен у [2].
8. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, при условии $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.
Задатак је решен у [2].
9. $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$, при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Задатак је решен у [2].
10. $f(x, y, z) = x + 2y - 2z$, при условии $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{4}$.
Задатак је решен у [2].
11. $f(x, y, z) = x - y + 2z$ при условии $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.
Задатак је решен у [6].
12. $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.
Задатак је решен у [6].
13. $f(x, y, z) = x + y + z$ при условии $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.
Задатак је решен у [1].
14. $f(x, y, z) = x + y - z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Задатак је решен у [3].
15. $f(x, y, z) = x + y^2 + z$, при условии $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = \frac{5}{4}$.
Задатак је решен у [2].
16. $f(x, y, z) = x + 2y - 2z^2$, при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
Задатак је решен у [2].
17. $f(x, y, z) = x^2 + yz$, при условии $x^2 - y - z^2 + 3 = 0$.
Задатак је решен у [2].
18. $f(x, y, z) = 5x^2 + 2y^2 + z^2$, при условии $x - 2y + z + 4 = 0$.

Задатак је решен у [2].

19. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, при услову $x + y + z = 1$.

Задатак је решен у [2].

20. $f(x, y, z) = x^2 + y + z^2$, при услову $x^3 + y^3 + 8 = 0$.

Задатак је решен у [2].

21. $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + yz^2$, при услову $y + z^2 = 3$.

Задатак је решен у [2].

22. $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + xz + yz + z$, при услову $x + y + z = 3$.

Задатак је решен у [2].

23. $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$, при услову $xyz = 4$, $x, y, z > 0$.

Задатак је решен у [2].

24. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, при услову $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$.

Задатак је решен у [2].

25. $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2$ при услову $x + y + z = 1$.

Задатак је решен у [6].

26. $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ при услову $xyz = 4$.

Задатак је решен у [6].

27. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, при услову $x + y - z + 5 = 0$.

Задатак је решен у [2].

28. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, при услову $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Задатак је решен у [2].

29. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, при услову $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Задатак је решен у [2].

30. $f(x, y, z) = xyz$ при услову $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Задатак је решен у [2].

31. $f(x, y, z) = xy^2z^3$ при услову $x + 2y + 3z = 12$, $x, y, z > 0$.

Задатак је решен у [6].

32. $f(x, y, z) = xy^2z^3$ при услову $x + y + z = 6$, $x, y, z \neq 0$.

Задатак је решен у [3].

33. $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ (за $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$), при услову $2x + 3y + 4z = a$.

Задатак је решен у [2].

34. $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{4}$.

Задатак је решен у [2].

35. $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$, при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{4z^2} = \frac{9}{4}$.

Задатак је решен у [2].

36. $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + x + y - z$, при условии $xyz = 8$.

Задатак је решен у [2].

37. $f(x, y, z) = (x^2 + y + z^2)e^{y/2}$, при условии $x + y + z = 2$.

Задатак је решен у [2].

38. $f(x, y, z) = e^{xyz}$ (за $x, y, z > 0$), при условии $x + y + z = 3$.

Задатак је решен у [2].

39. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z)e^{z/2}$, при условии $x + y + z = -10$.

Задатак је решен у [2].

40. $f(x, y, z) = \ln(x^3 y^2 z)$ при условии $3x - 2y + z = 6$.

Задатак је решен у [3].

41. $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ (за $x, y, z > 0$), при условии $x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

Задатак је решен у [2].

42. $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ при условии $x + y + z = \pi/2$, $x, y, z > 0$.

Задатак је решен у [6].

43. $f(x, y, z) = \cos x \cos y \cos z$ при условии $x + y + z = \pi$.

Задатак је решен у [6].

Задаци за самосталан рад

44. $f(x, y, z) = x + y + z$ при условии $xyz = 1$.

45. $f(x, y, z) = x + y - z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

46. $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

47. $f(x, y, z) = x + 2y + z$ при условии $2x^2 + y^2 - z^2 = 2$.

48. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2}$.

49. $f(x, y, z) = 3x + 2y + z$ при условии $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 24$.

50. $f(x, y, z) = x - 2y + 4z$ при условии $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 165$.

51. $f(x, y, z) = x + y + 2z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

52. $f(x, y, z) = 8x - 4z$ при условии $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$.
53. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 35$.
54. $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
55. $f(x, y, z) = 2x + y - z$ при условии $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$.
56. $f(x, y, z) = x - y + 2z$ при условии $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.
57. $f(x, y, z) = x + 2y + z$ при условии $2x^2 + y^2 - z^2 = 2$.
58. $f(x, y, z) = ax + by + cz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
59. $f(x, y, z) = z^2$ при условии $x^2 + y^2 - z = 0$.
60. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ при условии $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.
61. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ при условии $x + y + z = 4$.
62. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $x + 2y + 3z = 14$.
63. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $(x + y)^2 + z - 1 = 0$.
64. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $x^4 + y^4 + z^4 = 3$.
65. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $ax + by + cz + d = 0$.
66. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$.
67. $f(x, y, z) = x^2 + x + 2y^2 + 3z^2$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
68. $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ при условии $z - xy = 5$.
69. $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 11z^2 + 20xy - 4xz + 16yz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
70. $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 2zy + yz^2$ при условии $y + z^2 = 3$.
71. $f(x, y, z) = (x - 10)^2 + (y - 10\sqrt{6})^2 + (z - 30)^2$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
72. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $xyz = 1$.
73. $f(x, y, z) = xz + yz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
74. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ при условии $xyz = 1$.
75. $f(x, y, z) = xy + z^2$ при условии $ax + by + cz = 1$.
76. $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + 2yz + \frac{3}{2}z^2$ при условии $x + 2y + 3z = 1$.
77. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
78. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $ax + by + cz + d = 0$.
79. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
80. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.
81. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

82. $f(x, y, z) = 27x^3 + y^3 - z^3$ при услову $xyz = 9$.
83. $f(x, y, z) = x^3 + 27y^3 - z^3$ при услову $xyz = -9$.
84. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^3$ при услову $xyz = 27$.
85. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ при услову $x + y + z = 3$.
86. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ при услову $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
87. $f(x, y, z) = xyz$ при услову $x + y + z = 1$.
88. $f(x, y, z) = xyz$ при услову $xy + yz + zx = 12$.
89. $f(x, y, z) = xyz$ при услову $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.
90. $f(x, y, z) = xyz$ при услову $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.
91. $f(x, y, z) = xyz$ при услову $x^4 + y^4 + z^4 = 3$.
92. $f(x, y, z) = xyz$ при услову $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$.
93. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ при услову $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 27$.
94. $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ при услову $x + y + z = 9$, $x, y, z > 0$.
95. $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ при услову $2x + 3y + 4z = 9$, $x, y, z > 0$.
96. $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3}$ при услову $x + y^2 + z^3 = 1$.

Литература

- [1] Стојановић, М., Мухић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.
- [2] Ђорић, Д., *Математика 2 - решени примери са испита и колоквијума*, ФОН, Београд, 2014.
- [3] Тодорчевић, В., Џамић, Д., Младеновић, Н., Николић, Н., *Математика 2 - збирка задатака*, ФОН, Београд, 2016.
- [4] Ђорић, Д., Лазовић, Р., Јованов., Ђ., *Математика 2 - збирка задатака и примери колоквијума*, ФОН, Београд, 2009. [Стара збирка]
- [5] Ђорић, *Решени примери првог колоквијума - 22 примера првог колоквијума са комплетним решењима задатака*, <http://math.fon.rs/matematika-dva>
- [6] Ђорић, *Задаци стари, решења нова - решења задатака 6. теме из Старе збирке (збирке [4])*, <http://math.fon.rs/matematika-dva>