ФУНКЦИЈЕ ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Довољан услов за локални екстремум - доказ Теореме 4.2.6

Драган Ђорић

Нека је $M(x_0, y_0)$ стационарна тачка функције $f : D \to \mathbb{R}$, где је $D \subset \mathbb{R}^2$ отворен скуп и нека је $f \in C^2(D)$.

У уџбенику [1] дата је теорема о довољним условима за локални екстремум функције f у тачки M (Теорема 4.2.6). Овде се даје други доказ ове теореме.

1 Помоћно тврђење

Теорема 1. *Нека је функција $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са*

$$\Phi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

где су a, b, c реални бројеви за које важи $ac - b^2 > 0$ и $a > 0$. Тада постоји реалан број $\varepsilon > 0$ такав да је

$$\Phi(x, y) \geq \varepsilon(x^2 + y^2) \tag{1}$$

за свако $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Доказ. Како је $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$ и како је

$$\Phi(x, y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2,$$

то је

$$\Phi(x, y) \geq \varepsilon_2 y^2, \tag{2}$$

где је $\varepsilon_2 = c - \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{ac - b^2}{a} > 0$. Из датих услова следи да је и $c > 0$, па заменом улога x и y добијамо да важи и

$$\Phi(x, y) \geq \varepsilon_1 x^2, \tag{3}$$

где је $\varepsilon_1 > 0$. Из (2) и (3) имамо да је

$$2\Phi(x, y) \geq \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2.$$

Према томе, за $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ важи неједнакост (1). ■

2 Други доказ Теореме 4.2.6

Ако је $a = f''_{x^2}(M)$, $b = f''_{xy}(M)$ и $c = f''_{y^2}(M)$, тада важи следеће тврђење (Теорема 4.2.6 из [1]).

Теорема 2. *Функција f у стационарној тачки M*

1. *има локални минимум ако је $ac - b^2 > 0$ и $a > 0$,*
2. *има локални максимум ако је $ac - b^2 > 0$ и $a < 0$,*
3. *нема локални екстремум ако је $ac - b^2 < 0$.*

Доказ. Нека су прираштаји Δx и Δy такви да $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$ и нека је $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Пошто је M стационарна тачка, то је $df(M) = 0$, па је

$$\Delta f(M) = \frac{1}{2}d^2 f(M) + \frac{1}{2}\alpha(\Delta x, \Delta y)\rho^2 = \frac{1}{2}(a\Delta x^2 + 2b\Delta x\Delta y + c\Delta y^2) + \frac{\alpha}{2}\rho^2, \tag{4}$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ када $\rho \to 0$.

За $h = \dfrac{\Delta x}{\rho}$ и $k = \dfrac{\Delta y}{\rho}$ из (4) имамо да је

$$\Delta f(M) = \frac{\rho^2}{2}(ah^2 + 2bhk + ck^2 + \alpha) = \frac{\rho^2}{2}(\Phi(h,k) + \alpha), \tag{5}$$

где је Φ функција дефинисана у Теореми 1 и где је $h^2 + k^2 = 1$.

1. Ако је $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$, тада према Теореми 1 постоји $\varepsilon > 0$ за које важи

$$\Phi(h,k) \geq \varepsilon(h^2 + k^2) = \varepsilon.$$

Пошто је α бесконачно мала функција када $(h,k) \to (0,0)$, постоји околина тачке M у којој је $|\alpha| < \varepsilon$.

Сада из (5) следи да у тој околини тачке M важи $\Delta f(M) > 0$, што значи да функција f у тачки M има локални минимум.

2. Ако за функцију f важи $a < 0$ и $ac - b^2 > 0$, тада за функцију $-f$ важи $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$. Према тврђењу 1. функција $-f$ има у тачки M локални минимум, а то значи да функција f у тој тачки има локални максимум.

3. Како је $\Phi(x, 0) = ax^2$ и $\Phi\left(-\dfrac{b}{a}y, y\right) = \dfrac{ac - b^2}{a}y^2$ (за $a \neq 0$), функција Φ има различите знаке за аргументе $(\Delta x, 0)$ и $(-b\Delta y/a, \Delta y)$. Исто важи и за одговарајуће аргументе $(h, 0)$ и $(-bk/a, k)$.

Нека је, на пример, $\Phi(h, 0) = \mu > 0$ и $\Phi\left(-\dfrac{b}{a}k, k\right) = \nu < 0$. Тада за свако $t > 0$ важи

$$f(x_0 + th, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{t^2}{2}(\mu + \alpha), \quad f\left(x_0 - \frac{b}{a}tk, y_0 + tk\right) - f(x_0, y_0) = \frac{t^2}{2}(\nu + \beta),$$

где су α и β бесконачно мале функције када $t \to 0$. Ако је U околина тачке M у којој је $\mu + \alpha > 0$ и $\nu + \beta < 0$, онда постоје реални бројеви $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ за које је $(x_0 + t_1 h, y_0) \in U$ и $\left(x_0 - \frac{b}{a}t_2 k, y_0 + t_2 k\right) \in U$. То даље значи да за сваку околину $V \subset U$ тачке M постоји $t \in (0, \min\{t_1, t_2\}]$ за које важи $(x_0 + th, y_0) \in V$ и $\left(x_0 - \frac{b}{a}tk, y_0 + tk\right) \in V$.

Према томе, у свакој околини тачке M постоји тачка у којој је вредност функције f већа него у тачки M, као и тачка у којој је вредност функције f мања него у тачки M. То значи да функција f у тачки M нема локални екстремум. ∎

Теорема 2 може да се добије и као специјалан случај Теореме 4.2.8 из уџбеника [1] јер из доказа Теореме 2 видимо да је функција Φ при условима из тачке 1. позитивно дефинитна, при условима из тачке 2. негативно дефинитна и при условима из тачке 3. она мења знак.

У доказу Теореме 2 није, као што је случај у доказу Теореме 4.2.8, коришћено својство непрекидне функције на компактном скупу (Друга Вајерштрасова теорема). Природно се намеће питање да ли техника из доказа Теореме 2 може да се примени и за доказ Теореме 4.2.8. За квадратне форме сталног знака може се индукцијом доказати да важе својства аналогна својству из Теореме 1.

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.