ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦИЈЕ ТРИ ПРОМЕНЉИВЕ

Решени примери и задаци за вежбу

Драган Ђорић

Функције три променљиве

- Функција $f : X \to \mathbb{R}$, где је $X \subset R^3$ отворен скуп, има у тачки $(a, b, c) \in X$ *локални минимум (максимум)* ако постоји околина U тачке (a, b, c) таква да важи $f(x, y, z) \geq f(a, b, c)$ $(f(x, y, z) \leq f(a, b, c))$ за свако $(x, y, z) \in U$.

- *Неопходан услов за локални екстремум*

  Ако у тачки $(a, b, c) \in X$ постоји градијент функције f и ако функција у тој тачки има локални екстремум, тада је $\nabla f(a, b, c) = 0$.

- *Довољан услов за локални екстремум*

  Нека је (a, b, c) стационарна тачка функције f.

  - Ако је $d^2 f(a, b, c) > 0$ за $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, тада функција f у тачки (a, b, c) има локални минимум.
  - Ако је $d^2 f(a, b, c) < 0$ за $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, тада функција f у тачки (a, b, c) има локални максимум.

- Ако $d^2 f(a, b, c)$ за $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$ мења знак, тада функција f у тачки a нема локални екстремум.

- Наведени услови нису и неопходни. У осталим случајевима, као и у случају критичне тачке која није стационарна, постојање локалног екстремума се проверава на основу дефиниције локалног екстремума.

Силвестеров критеријум за $n = 3$

Нека је $A(x_0, y_0, z_0)$ стационарна тачка функције f и нека су m_1, m_2, m_3 главни минори Хесеове матрице

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} f''_{x^2}(A) & f''_{xy}(A) & f''_{xz}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{y^2}(A) & f''_{yz}(A) \\ f''_{zx}(A) & f''_{zy}(A) & f''_{z^2}(A) \end{bmatrix}.$$

Тада важе следећа тврђења.

- Ако је $m_1 > 0,\ m_2 > 0,\ m_3 > 0$, тада функција f у тачки A има локални минимум.

- Ако је $m_1 < 0,\ m_2 > 0,\ m_3 < 0$, тада функција f у тачки A има локални максимум.

- Ако је $m_2 < 0$ или $m_1 > 0,\ m_3 < 0$ или $m_1 < 0,\ m_3 > 0$, тада функција f у тачки A нема локални екстремум.

У осталим случајевима (на пример, $m_1 > 0,\ m_2 > 0,\ m_3 = 0$) постојање локалног екстремума у тачки A треба проверити на основу дефиниције локалног екстремума.

Решени примери

За дату функцију три променљиве одредити све локалне екстремуме (ако постоје).

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 + 2x + 6yz.$

Задатак је решен у [1].

2. $f(x, y, z) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + z + \dfrac{y^2}{4z}.$

Задатак је решен у [5].

3. $f(x, y, z) = 2x^2 + \dfrac{y^2}{x} - 4z + \dfrac{2z^2}{y}.$

Задатак је решен у [5].

4. $f(x, y, z) = e^{2y}(2yz - x^2 - z^2),\ y \neq 0.$

Задатак је решен у [2].

5. $f(x, y, z) = x^2 - 2x + yz^2 + y^2 - y.$

Задатак је решен у [2].

6. $f(x, y, z) = e^{-z/2}\left(2xz + x^2 + y^2 - 3z - 6\right).$

Задатак је решен у [2].

7. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z} + 2x + 4y + z + z^2.$

Задатак је решен у [2].

8. $f(x, y, z) = e^{x/2}\left(y^2 + z^2 - 2xz\right).$

Задатак је решен у [2].

9. $f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{2}{z} + \dfrac{z^2}{y}.$

Задатак је решен у [2].

10. $f(x, y, z) = e^{x+y}\left(x + \dfrac{y^2}{2} + 2z - z^2\right).$

Задатак је решен у [2].

11. $f(x, y, z) = x + y + 3z + \dfrac{2z}{xyz}.$

Задатак је решен у [2].

12. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z} + 2x + 2y + z^2.$

Задатак је решен у [2].

13. $f(x,y,z) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + z + \dfrac{y^2}{4z}$.

Задатак је решен у [2].

14. $f(x,y,z) = 2x^2 + \dfrac{y^2}{x} - 4z + \dfrac{2z^2}{y}$.

Задатак је решен у [2].

15. $f(x,y,z) = \dfrac{2x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.

Задатак је решен у [2].

16. $f(x,y,z) = xyz(1-x-y-z), \quad x,y,z > 0$.

Задатак је решен у [2].

17. $f(x,y,z) = x^2 - \dfrac{y}{z} + \dfrac{y}{2} + 2xyz$.

Задатак је решен у [2].

18. $f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^3 + 6y^2 + 2z^2 + 2xz$.

Задатак је решен у [6].

19. $f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

Задатак је решен у [6].

20. $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$.

Задатак је решен у [6].

21. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + (4-x-y-z)^2$.

Задатак је решен у [6].

22. $f(x,y,z) = xyz(1-x-y-z)$.

Задатак је решен у [6].

23. $f(x,y,z) = xy^2z^3(1-x-2y-3z), \quad x>0,\ y>0,\ z>0$.

Задатак је решен у [6].

24. $f(x,y,z) = \dfrac{2x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.

Задатак је решен у [6].

25. $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

Задатак је решен у [6].

26. $f(x,y,z) = x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{2}{z}$.

Задатак је решен у [6].

27. $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

Задатак је решен у [6].

28. $f(x,y,z) = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

Задатак је решен у [6].

Задаци за самосталан рад

29. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

30. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$.

31. $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 - 6x + 4y - 2z + 8$.

32. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + zy - 2x + y - z$.

33. $f(x,y,z) = 6x^2 + 2z^2 + 2xy - 2yz + 2xz + 2x - 2y + 4z + 4$.

34. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$.

35. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$.

36. $f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$.

37. $f(x,y,z) = 2xy^2 + x^2 + z^2 - 4xy - 2z$.

38. $f(x,y,z) = x^2z - x^2 - z^2 + xy - y$.

39. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

40. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$.

41. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

42. $f(x,y,z) = y^3 + 2x^2 + z^2 - xy + 2xz - y$.

43. $f(x,y,z) = z^3 + x^2 + y^2 - 2x - 3z$.

44. $f(x,y,z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$.

45. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^2 + 5xy + 2z$.

46. $f(x,y,z) = x^3 + z^3 + y^2 + xy + yz$.

47. $f(x,y,z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z$.

48. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$.

49. $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 15x + 14y + 4z + 17$.

50. $f(x,y,z) = -x^4 - y^4 - z^4 + 4xyz$.

51. $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^2 + z^2 - xy$.

52. $f(x,y,z) = xyz(16 - x - y - 2z)$.

53. $f(x,y,z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

54. $f(x,y,z) = xy^2z^3(49 - x - 2y - 3z)$.

55. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + xyz$.

56. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} + x + 1$.

57. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{xz} + \dfrac{z^2}{xy}$.

58. $f(x,y,z) = \dfrac{256}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + z^2$.

59. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2x + \ln(1 + z^2)$.

60. $f(x,y,z) = (x + 7z)e^{-x^2-y^2-z^2}$.

61. $f(x,y,z) = (3x + 2y + z)e^{-x^2-y^2-z^2}$.

62. $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z),\ \ x, y, z \in (0, \pi)$.

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., *Математика 2 - решени примери са испита и колоквијума*, ФОН, Београд, 2014.

[3] Тодорчевић, В., Џамић, Д., Младеновић, Н., Николић, Н., *Математика 2 - збирка задатака*, ФОН, Београд, 2016.

[4] Ђорић, Д., Лазовић, Р., Јованов., Ђ., *Математика 2 - збирка задатака и примери колоквијума*, ФОН, Београд, 2009. [Стара збирка]

[5] Ђорић, *Решени примери првог колоквијума - 22 примера првог колоквијума са комплетним решењима задатака*, http://math.fon.rs/matematika-dva

[6] Ђорић, *Задаци стари, решења нова - решења задатака 6. теме из Старе збирке* (збирке [4]), http://math.fon.rs/matematika-dva