ФУНКЦИЈЕ ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Диференцијали сложене функције

Драган Ђорић

1	**Инваријантност форме диференцијала првог реда**	**1**
2	**Диференцијал другог реда сложене функције**	**3**
3	**Неинваријантност форме диференцијала другог реда**	**4**

Сложене функције једне или две променљиве можемо добити композицијом функција једне и/или две променљиве.

На пример, ако је u функција две променљиве, а f функција једне променљиве, тада при одређеним условима слагања домена, можемо дефинисати функцију (две променљиве) z са

$$z(x,y) = f(u(x,y)). \tag{1}$$

Ако су u и v функције једне променљиве, а f функција две променљиве, тада (при одређеним условима) оне одређују функцију (једне променљиве) g дефинисану са

$$g(x) = f(u(x), v(x)). \tag{2}$$

Ако су u, v и f функције две променљиве, нова функција h дефинисана са

$$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) \tag{3}$$

је такође функција две променљиве.

У прилогу *Диференцијабилност сложене функције* [3] смо видели да су сложене функције z, g и h дате са (1), (2) и (3) диференцијабилне ако су функције u, v и f диференцијабилне.

Ако су наведене сложене функције диференцијабилне (у некој тачки или на неком скупу), тада оне имају диференцијал (у тачки или на скупу), при чему је

$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \quad dg = g' dx, \quad dh = h'_x dx + h'_y dy.$$

Узимајући у обзир изразе за парцијалне изводе сложене функције можемо да добијемо још једну форму ових диференцијала. У тој другој форми уместо диференцијала dx и dy (или прираштаја Δx и Δy) независних величина x и y фигуришу диференцијали du и dv функција u и v.

1 Инваријантност форме диференцијала првог реда

За сложену функцију h дефинисану са (2) лако се добија (видети уџбеник [1], стр.44) да је

$$dh = h'_x dx + h'_y dy = f'_u du + f'_v dv.$$

Претходне једнакости показују да се диференцијал на исти начин формира без обзира на то да ли су аргументи независне променљиве (у случају функције h то су променљиве x и y) или су посредни аргументи (за функцију h то су променљиве u и v) који су функције од независних аргумената.

Ова чињеница представља *иваријантност форме диференцијала* и она може да се користи при израчунавању диференцијала и парцијалних извода сложених функција.

Пример 1. *Нека је $h(x,y) = f(u,v) = u^2 \ln v$, где је $u(x,y) = \dfrac{x}{y}$ и $v(x,y) = xy$. На основу инваријантности форме и својстава диференцијала имамо да је*

$$dh = d(u^2 \ln v) = d(u^2)\ln v + u^2 d(\ln v) = 2u \ln v du + \frac{u^2}{v} dv.$$

Како је

$$du = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad dv = ydx + xdy,$$

то је

$$\begin{aligned} dh &= 2\frac{x}{y}\ln(xy)\frac{ydx - xdy}{y^2} + \frac{1}{xy}\cdot\frac{x^2}{y^2}(ydx + xdy) \\ &= \left(\frac{2x}{y^2}\ln(xy) + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(\frac{-2x^2}{y^3}\ln(xy) + \frac{x^2}{y^3}\right)dy \\ &= \frac{x}{y^2}(2\ln(xy) + 1)dx + \frac{x^2}{y^3}(-2\ln(xy) + 1)dy. \end{aligned}$$

Из добијеног израза за dh и једнакости $dh = h'_x dx + h'_y dy$ следи да је

$$h'_x(x,y) = \frac{x}{y^2}(2\ln(xy) + 1), \quad h'_y(x,y) = \frac{x^2}{y^3}(-2\ln(xy) + 1).$$

Наравно, до ових једнакости могли смо да дођемо и помоћу формула за парцијалне изводе сложених функција, као и директно преко експлицитног израза за $h(x,y)$ (без посредних функција u и v).

За функцију z дефинисану са (1) инваријантност форме диференцијала представљају једнакости

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = f' du.$$

Пример 2. *Ако је $f(u) = \arctan u$ и $u(x,y) = y/x$, тада за функцију $z : (x,y) \to f(u(x,y))$ имамо да је*

$$dz = f' du = \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{1+y^2/x^2} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{xdy - ydx}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Према томе, користећи инваријантност форме и својства диференцијала, добили смо диференцијал и парцијалне изводе функције z,

$$x'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

У случају функције g дефинисане са (2) инваријантност форме чине једнакости $dg = g' dx = f'_u du + f'_v dv$.

2 Диференцијал другог реда сложене функције

Претпоставимо да све функције које разматрамо припадају скупу C^2, што обезбеђује постојање диференцијала другог реда и једнакост мешовитих парцијалних извода другог реда.

За функцију h дефинисану са (3) имамо да је

$$d^2h = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2, \tag{4}$$

где је $A = h''_{x^2}$, $B = h''_{xy}$ и $C = h''_{y^2}$. Према томе, за диференцијал другог реда треба одредити парцијалне изводе другог реда сложене функције h.

Полазећи од једнакости

$$h'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x \tag{5}$$

и узимајући у обзир да су функције $(x,y) \mapsto f'_u(u(x,y), v(x,y))$ и $(x,y) \mapsto f'_v(u(x,y), v(x,y))$ такође сложене функције, добијамо да је

$$\begin{aligned} h''_{x^2} &= (f'_u)'_x u'_x + f'_u u''_{x^2} + (f'_v)'_x v'_x + f'_v v''_{x^2} \\ &= f''_{u^2} {u'_x}^2 + f''_{uv} u'_x v'_x + f''_{vu} u'_x v'_x + f''_{v^2} {v'_x}^2 + f'_u u''_{x^2} + f'_v v''_{x^2} \\ &= f''_{u^2} {u'_x}^2 + 2f''_{uv} u'_x v'_x + f''_{v^2} {v'_x}^2 + f'_u u''_{x^2} + f'_v v''_{x^2}. \end{aligned}$$

Диференцирањем леве и десне стране једнакости (4) по y, на сличан начин добија се

$$h''_{xy} = f''_{u^2} u'_x u'_y + f''_{uv} u'_x v'_y + f''_{vu} u'_y v'_x + f''_{v^2} v'_x v'_y + f'_u u''_{xy} + f'_v v''_{xy}.$$

Аналогно, полазећи од једнакости $h'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y$ добија се

$$h''_{y^2} = f''_{u^2} {u'_y}^2 + 2f''_{uv} u'_y v'_y + f''_{v^2} {v'_y}^2 + f'_u u''_{y^2} + f'_v v''_{y^2}.$$

Заменом добијених израза за парцијалне изводе другог реда у једнакост (4) налазимо диференцијал другог реда сложене функције h. С друге стране, ако применом својстава диференцијала добијемо диференцијал другог реда, онда из форме на десној страни једнакости (4) имамо да је $h''_{x^2} = A$, $h''_{xy} = B$ и $h''_{y^2} = C$.

Пример 3. *Ако је $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, где је*

$$f(u,v) = uv, \quad u(x,y) = xy, \quad v(x,y) = x^2 - y^2,$$

тада је

$$f'_u = v, \quad f'_v = u, \quad f''_{u^2} = f''_{v^2} = 0, \quad f''_{uv} = 1,$$

$$u'_x = y, \quad u'_y = x, \quad u''_{x^2} = u''_{y^2} = 0, \quad u''_{xy} = 1,$$

$$v'_x = 2x, \quad v'_y = -2y, \quad v''_{x^2} = 2, \quad v''_{y^2} = -2, \quad v''_{xy} = 0.$$

Према изведеним формулама за парцијалне изводе другог реда налазимо да је

$$h''_{x^2} = 6xy, \quad h''_{xy} = 3x^2 - 3y^2, \quad h''_{y^2} = -6xy.$$

Заменом ових израза у (4) добијамо диференцијал другог реда

$$d^2h(x,y) = 6xydx^2 + 6(x^2 - y^2)dxdy - 6xydy^2.$$

У овом примеру се лако налази и експлицитни облик функције h, па се парцијални изводи и диференцијал другог реда налазе и без формула за парцијалне изводе сложене функције. Како је

$$h(x,y) = f(u,v) = uv = xy(x^2 - y^2) = x^3y - xy^3,$$

то се једноставно налазе диференцијали и првог и другог реда.

3 Неинваријантност форме диференцијала другог реда

За функцију h дефинисану са (3) имамо да је

$$d^2h = h''_{x^2}dx^2 + 2h''_{xy}dxdy + h''_{y^2}dy^2. \tag{6}$$

Ако би важила инваријантност форме диференцијала d^2h, то би значило да је

$$d^2h = f''_{u^2}du^2 + 2f''_{uv}dudv + f''_{v^2}dv^2. \tag{7}$$

Показаћемо сада да једнакост (7) не важи у општем случају.

Полазећи од дефиниције диференцијала другог реда ($d^2h = d(dh)$) и једнакости

$$du = f'_u du + f'_v dv \tag{8}$$

(инваријантност диференцијала првог реда), применом особина диференцијала првог реда, добијамо да је

$$\begin{aligned}
d^2h &= d(f'_u du + f'_v dv)\\
&= d(f'_u du) + d(f'_v)dv\\
&= d(f'_u)du + f'_u d(du) + d(f'_v)dv + f'_v d(dv)\\
&= (f''_{u^2}du + f''_{uv}dv)du + f'_u d^2u + (f''_{vu}du + f''_{v^2}dv)dv + f'_v d^2v\\
&= f''_{u^2}du^2 + 2f''_{uv}dudv + f''_{v^2}dv^2 + f'_u d^2u + f'_v d^2v
\end{aligned}$$

Према томе, не важи једнакост (7). Нова форма за d^2h садржи још два сабирка, $f'_u d^2u$ и $f'_v d^2v$. Инваријантност се добија у случају да је $d^2u = d^2v = 0$.

Као што једнакост (6) можемо да запишемо у облику

$$d^2h = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 h,$$

тако другу форму за d^2h (у којој фигуршу диференцијали du и dv) можемо да запишемо у облику

$$d^2h = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2 h + \frac{\partial h}{\partial x}d^2u + \frac{\partial h}{\partial v}d^2v.$$

Задаци

1. Одредити dz ако је $z(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$, где је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција.

2. Нека су $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ диференцијабилне функције. Користећи инваријантност форме диференцијала доказати да је

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = udv + vdu, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \ (v \neq 0).$$

3. Одредити диференцијал другог реда за функцију $h : (x,y) \mapsto f(x^2+y^2, xy)$.

4. За функцију $h : (x,y) \mapsto f(u(x,y), v(x,y))$, где је $f(u,v) = \sin u \cdot \cos v$, $u(x,y) = xy$ и $v(x,y) = x^2 - y^2$, одредити диференцијал другог реда.

5. Извести формулу за форму диференцијала другог реда функције $h : (x,y) \mapsto f(u(x,y), v(x,y))$ полазећи од једнакости $d^2h = d(dh)$ и

$$dh = (f'_u u'_x + f'_v v'_x)dx + (f'_u u'_y + f'_v v'_y)dy$$

и користећи својства диференцијала првог реда.

6. Диказати да диференцијал другог реда за функцију $h : (x,y) \mapsto f(u(x,y), v(x,y))$ има особину инваријантности форме уколико су функције u и v линеарне.

7. Диказати да и диференцијал трећег реда за функцију $h : (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ има особину инваријантности форме уколико су функције u и v линеарне.

8. Испитати да ли за функцију $h : (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ сви диференцијали вишег реда имају особину инваријантности форме уколико су функције u и v линеарне.

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., *Математика 2 - решени примери са испита и колоквијума*, ФОН, Београд, 2014.

[3] Ђорић, Д., *Функције две променљиве - Диференцијабилност сложене функције*, http://math.fon.rs/matematika-dva