ФУНКЦИЈЕ ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Диференцијабилност сложене функције

Драган Ђорић

Помоћу функција једне и функција две променљиве могу се композицијом добити разне *сложене* функције (једне или две променљиве).

На пример, ако је u функција две променљиве, а f функција једне променљиве, тада при одређеним условима слагања домена, можемо дефинисати функцију (две променљиве) z са

$$z(x,y) = f(u(x,y)). \tag{1}$$

Ако су u и v функције једне променљиве, а f функција две променљиве, тада (при одређеним условима) оне одређују функцију (једне променљиве) g дефинисану са

$$g(x) = f(u(x), v(x)). \tag{2}$$

Тако за $f(u,v) = u^v + v^u$, $u(x) = sinx$ и $v(x) = x$ имамо да је $g(x) = (\sin x)^x + x^{\sin x}$. На тај начин, за добијање нових функција једне променљиве можемо користити слагање функција у којем учествују и функције две променљиве.

У случају да су u, v и f функције две променљиве, нова функција h дефинисана са

$$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) \tag{3}$$

је такође функција две променљиве. Функција h је *сложена функција две променљиве.*

Пошто се извод композиције функција једне променљиве добија помоћу извода функција које учествују у тој композицији, природно је очекивати и да се извод функције g и парцијални изводи функција z и h могу добити помоћу извода или парцијалних извода функција u и v и парцијалних извода функције f.

Што се тиче диференцијабилности сложене функције, видећемо да она следи из претпоставке о диференцијабилности функција које учествују у композицији. Следећи пример показује да то није и неопходан услов за диференцијабилност.

Пример 1. *Нека су функције* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *и* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *дрфинисане са*

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{u}, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}$$

и нека је $z(x,y) = f(u(x,y))$.

Функција u *није диференцијабилна у тачки* $(0,0)$ *и функција* f *није диференцијабилна у тачки* $u = 0$, *а функција* z *јесте диференцијабилна у тачки* $(0,0)$.

1 Парцијални изводи сложене функције

Проблем налажења парцијалних извода функције z дефинисане са (1) лако се своди на познат случај. За фиксирано $y = y_0$ имамо да је z функција једне променљиве која се добија композицијом функције f и v, где је $v(x) = u(x, y_0)$. Дакле, $z(x, y_0) = \varphi(x) = (f \circ v)(x)$. Слично имамо и у случају да фиксирамо $x = x_0$. Тада је $z(x_0, y) = \psi(y) = (f \circ w)(y)$, где је $w(y) = u(x_0, y)$. Према правилу за извод композиције функција имамо да је $\varphi'(x) = f'(v(x))v'(x)$ и $\psi'(y) = f'(w(y))w'(y)$. Како је $v' = u'_x$, $w' = u'_y$, $\varphi' = z'_x$ и $\psi' = z'_y$, то значи да је

$$z'_x(x, y_0) = f'(u(x, y_0))u'_x(x, y_0), \quad z'_y(x_0, y) = f'(u(x_0, y))w'_y(x_0, y).$$

Пошто ове једнакости важе за свако $x = x_0$ и $y = y_0$ (за које је дефинисана функција z), то је

$$z'_x(x, y) = f'(u(x, y))u'_x(x, y), \quad z'_y(x, y) = f'(u(x, y))w'_y(x, y)$$

или у краћем и једноставнијем запису (где се за наведене функције подразумевају одговарајући аргументи),

$$z'_x = f'u'_x, \quad z'_y = f'u'_y. \tag{4}$$

За функцију h дефинисану са (3) у уџбенику [1] (Теорема 2.3.3) доказано је да су њени парцијални изводи дати једнакостима

$$h'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x, \quad h'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y. \tag{5}$$

Из (5) се, као специјалан случај, добија и извод за функцију g дефинисану са (2)

$$g' = f'_u u' + f'_v v'. \tag{6}$$

У доказу Теореме 2.3.3 (из [1]) једнакости (5) су добијене под претпоставком да су функције u, v и f диференцијабилне. Може се, наравно, поставити питање да ли је то и неопходан (или је само довољан) услов за једнакости (5). Пошто у тим једнакостима фигуришу само парцијални изводи функција u, v и f, може се помислити да је довољно претпоставити само да они постоје. Следећи пример показује да то није тако.

Пример 2. *Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са*

$$f(u, v) = \begin{cases} \dfrac{u^2 v}{u^2 + v^2}, & (u, v) \neq (0, 0) \\ 0, & (u, v) = (0, 0) \end{cases}$$

и нека су функције $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисане са $u(x) = v(x) = x$. Функције u и v су диференцијабилне у тачки $x = 0$, а функција f у тачки $(0, 0)$ има парцијалне изводе првог реда, $f'_u(0, 0) = f'_v(0, 0) = 0$.

За $x \neq 0$ имамо да је

$$g(x) = f(u(x), v(x)) = \frac{x^2 \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{x}{2},$$

а за $x = 0$ је $g(0) = f(0, 0) = 0$. То значи да је $g(x) = x/2$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па је $g'(x) = 1/2$ такође за свако $x \in \mathbb{R}$.

Међутим, за $x = 0$ не важи једнакост (6) јер се из ње добија да је $g'(0) = 0$.

Приметимо да у наведеном примеру функција f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$, а да сложена функција g има извод, али не важи формула (5) за налажење извода сложене функције. Дакле, без претпоставке диференцијабилности функције f не важе формуле за парцијалне изводе сложене функције. У следећем примеру из истог разлога (функција f није диференцијабилна) сложена функција g чак нема ни извод.

Пример 3. *Нека је $f(u,v) = \sqrt[3]{uv}$, $u(x) = v(x) = x^2$ и нека је $g(x) = f(u(x), v(x))$. Функције u и v су диференцијабилне у $\mathbb{R}$, а функција f има парцијалне изводе у тачки $(0,0)$. Како је $g(x) = |x|$, функција g нема извод у тачки $x = 0$. Разлог је то што функција f није диференцијабилна у тачки* $(0,0)$.

2 Слабији услови за постојање парцијалних извода сложене функције

Пошто смо видели да формуле за парцијалне изводе сложене функције (једнакости (5) и (6)) не важе ако функција f није диференцијабилна, остаје да се види да ли те формуле могу да важе без претпоставке о диференцијабилности функција u и v.

Следећа теорема говори о томе да је то могуће, односно да једнакости (5) и (6) важе и при слабијим условима од оних у Теореми 2.3.3 (из [1]. Наиме, функције u и v не морају бити диференцијабилне, већ је довољно да имају парцијалне изводе у посматраној тачки (x_0, y_0).

Докажимо најпре да аналогно тврђење важи за функцију једне променљиве која је компонована помоћу функција f, u и v, где су u и v функције једне променљиве.

Нека су функције u и v дефинисане у околини тачке $x_0 \in \mathbb{R}$ и нека је функција f дефинисана у околини тачке (u_0, v_0), где је $u_0 = u(x_0)$ и $v_0 = v(x_0)$. Тада је у некој околини U тачке x_0 дефинисана и функција $g : x \mapsto f(u(x), v(x))$.

Теорема 1. *Ако је функција f диференцијабилна у тачки (u_0, v_0) и ако функције u и v имају изводе у тачки x_0, тада и функција g има извод у тачки x_0 и важи једнакост*

$$g'(x_0) = f'_u(u_0, v_0)u'(x_0) + f'_v(u_0, v_0)v'(x_0). \tag{7}$$

Доказ. За $x_0 \in U$ и прираштај Δx такав да је $x_0 + \Delta x \in U$ имамо одговарајуће прираштаје $\Delta u(x_0)$, $\Delta v(x_0)$, $\Delta f(u_0, v_0)$ и $\Delta g(x_0)$. Како је функција f диференцијабилна у тачки (u_0, v_0), то је

$$\Delta g(x_0) = \Delta f(u_0, v_0) = f'_u(u_0, v_0)\Delta u(x_0) + f'_v(u_0, v_0)\Delta v(x_0) + \alpha \Delta u(x_0) + \beta \Delta v(x_0),$$

где су α и β бесконачно мале функције када $\Delta u(x_0) \to 0$ и $\Delta v(x_0) \to 0$.

Ако обе стране ове једнакости поделимо са Δx, добијамо да је

$$\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = f'_u(u_0, v_0)\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + f'_v(u_0, v_0)\frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x}. \tag{8}$$

Када $\Delta x \to 0$, тада

$$\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} \to u'(x_0), \quad \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \to v'(x_0). \tag{9}$$

Осим тога, за $\Delta x \to 0$ имамо да $\Delta u(x_0) \to 0$ и $\Delta v(x_0) \to 0$ јер су функције u и v непрекидне у тачки x_0 (што следи из претпоставке да ове функције имају извод у тачки x_0). То даље значи да $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ када $\Delta x \to 0$.

Сада из (8) и (9) следи да

$$\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} \to f'_u(u_0, v_0)u'(x_0) + f'_v(u_0, v_0)v'(x_0)$$

када $\Delta x \to 0$. Према томе, $g'(x_0)$ постоји и важи једнакост (7). ■

Ако се подразумева да тачки x_0 функција u и v одговара тачка (u_0, v_0) функције f, онда једноставно можемо рећи да у тачки x_0 важи једнакост (6).

Претпоставка да је функција f диференцијабилна у тачки (u_0, v_0) не може да се изостави или ослаби, што показују Пример 2 и Пример 3.

Из претходне теореме директно следе једнакости за парцијалне изводе функције h дефинисане са (3). Нека су функције u и v дефинисане у околони тачке (x_0, y_0) и нека је функција f дефинисана у околини тачке (u_0, v_0), где је $u_0 = u(x_0, y_0)$ и $v_0 = v(x_0, y_0)$.

Теорема 2. *Ако је функција f диференцијабилна у тачки (u_0, v_0) и ако у тачки (x_0, y_0) постоје парцијални изводи u'_x, u'_y, v'_x и v'_y, тада постоје и парцијални изводи функције h у тачки (x_0, y_0) и важе једнакости (5).*

Доказ. Пошто парцијални извод h'_x добијамо за фиксирано y, то значи да имамо функцију једне промењљиве, па можемо применити Теорему 1. Ако у формули (7) изводе u' и v' заменио са парцијалним изводима u'_x и v'_x, добијамо да парцијални извод h'_x у тачки (x_0, y_0) постоји и да важи

$$h'_x(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0).$$

На исти начин, фиксирањем промењљиве x добијамо да постоји парцијални извод h'_y у тачки (x_0, y_0) и да важи

$$h'_y(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_y(x_0, y_0).$$

Према томе, у тачки (x_0, y_0) важе једнакости (5). ■

Пример 4. *Нека су функције $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисане са*

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

нека је $f(u,v) = uv$ за $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ и нека је $h(x,y) = f(u(x,y,v(x,y))$.

За ове функције испуњени су услови Теореме 2 у тачки $(0,0)$. Функција f је диференцијабилна у $\mathbb{R}^2$, а функције u и v нису диференцијабилне у тачки $(0,0)$, али имају парцијалне изводе: $u'_x(0,0) = 1$, $u'_y(0,0) = v'_x(0,0) = v'_y(0,0) = 0$. Пошто је $f'_u = v$ и $f'_v = u$, према једнакостима (5) добијамо да је

$$h'_x(0,0) = f'_u(0,0)u'_x(0,0) + f'_v(0,0)v'_x(0,0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$h'_y(0,0) = f'_u(0,0)u'_y(0,0) + f'_v(0,0)v'_y(0,0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Наравно, ове парцијалне изводе можемо добити и директно из функције h која је дата са

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Теорема 1 и Теорема 2 дају довољне услове за постојање парцијалних извода сложене функције и за формуле помоћу којих се ти изводи могу израчунати. Наведени услови нису и неопходни. Дакле, једнакости (5) и (6) могу да важе и када наведени довољни услови нису испуњени.

Пример 5. *Нека је* $f(u,v) = \sqrt[3]{uv}$, $u(x) = v(x) = x^2$ *и нека је* $g(x) = f(u(x), v(x))$. *Функција* f *није диференцијабилна у тачки* $(0,0)$, *што значи да нису испуњени услови Теореме 1. Међутим, једнакости (6) за* $x = 0$ *су тачне јер је* $g'(0) = 0$ *и* $f'_u(0,0) = f'_v(0,0) = 0$.

3 Диференцијабилност сложене функције

Из Теореме 1 која се односи на функцију $g : x \mapsto f(u(x), v(x))$ следи да је сложена функција g и диференцијабилна у тачки x_0, јер је за функције једне променљиве диференцијабилност еквивалентна постојању извода.

Међутим, из Теореме 2 не следи диференцијабилност функције

$$h : (x,y) \mapsto f(u(x,y), v(x,y)).$$

На пример, функција h из Примера 4 није диференцијабилна у тачки $(0,0)$, а функције u, v и f испуњавају услове Теореме 2.

У Теореми 1 функције u и v су и диференцијабилне у тачки x_0. Да ли је такав услов за функције u и v довољан и за диференцијабилност сложене функције h? Одговор даје следећа теорема.

Теорема 3. *Ако је функција* f *диференцијабилна у тачки* (u_0, v_0) *и ако су функције* u *и* v *диференцијабилне у тачки* (x_0, y_0), *тада је и функција* h *диференцијабилна у тачки* (x_0, y_0) *и у тој тачки важе једнакости (5).*

Доказ. Нека је функција h деинисана у некој околини U тачке (x_0, y_0) и нека су прираштаји h и k такви да $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$. Ради једноставности писања (а и читања), аргументи функција ће у даљем доказу бити изостављени, а подразумева се да је (u_0, v_0) (где је $u_0 = u(x_0, y_0)$ и $v_0 = v(x_0, y_0)$) аргумент функције f и њених парцијалних извода и прираштаја, а (x_0, y_0) аргумент функција u и v и њихових прираштаја и парцијалних извода.

Из претпоставке диференцијабилности функција u и v у тачки (x_0, y_0) имамо да је у тој тачки

$$\Delta u = u'_x h + u'_y k + \alpha_1 h + \beta_1 k, \quad \Delta v = v'_x h + v'_y k + \alpha_2 h + \beta_2 k, \tag{10}$$

где су α_1, β_1, α_2 и β_2 бесконачно мале функција када $h \to 0$ и $k \to 0$.

Из претпоставке диференцијабилности функције f имамо да је

$$\Delta f = f'_u \Delta u + f'_v \Delta v + \alpha_3 \Delta u + \beta_3 \Delta v, \tag{11}$$

где су α_3 и β_3 бесконачно мале функције када $h \to 0$ и $k \to 0$ (јер тада и прираштаји Δu и Δv такође теже нули).

Заменом у (11) израза за Δu и Δv из (10) добијамо да је

$$\Delta f = f'_u(u'_x h + u'_y k + \alpha_1 h + \beta_1 k) + f'_v(v'_x h + v'_y k + \alpha_2 h + \beta_2 k) + \gamma, \tag{12}$$

где је

$$\begin{aligned}
\gamma =& \alpha_3(u'_x h + u'_y k + \alpha_1 h + \beta_1 k) + \beta_3(v'_x h + v'_y k + \alpha_2 h + \beta_2 k) \\
=& (\alpha_3 u'_x + \alpha_3\alpha_1 + \beta_3 v'_x + \beta_3\alpha_2)h + (\alpha_3 u'_y + \alpha_3\beta_1 + \beta_3 v'_y + \beta_3\beta_2)k \\
=& \alpha_4 h + \beta_4 k.
\end{aligned}$$

Једнакост (12) може да се запише и у облику

$$\Delta f = (f'_u u'_x + f'_v v'_x)h + (f'_u u'_y + f'_v v'_y)k + \delta, \tag{13}$$

где је
$$\delta = (f'_u\alpha_1 + f'_v\alpha_2)h + (f'_u\beta_1 + f'_v\beta_2)k + \gamma = \alpha h + \beta k. \tag{14}$$
Из (13) и (14) следи да је
$$\Delta f = (f'_u u'_x + f'_v v'_x)h + (f'_u u'_y + f'_v v'_y)k + \alpha h + \beta k,$$
односно
$$\Delta h(x_0, y_0) = \Delta f(u_0, v_0) = Ah + Bk + \alpha h + \beta k, \tag{15}$$
где је $A = f'_u u'_x + f'_v v'_x$ и $B = f'_u u'_y + f'_v v'_y$. Како су α_4 и β_4 бесконачно мале функција када $h \to 0$ и $k \to 0$, такве су и α и β, па из једнакости (15) закључујемо да је функција h диференцијабилна у тачки (x_0, y_0).

Из једнакости (15) такође следи да су A и B парцијални изводи функције h у тачки (x_0, y_0). Према томе, доказали смо и да важе једнакости (5). ■

Услови у претходној теореми нису неопходни да би функција h била диференцијабилна, што показује следећи пример.

Пример 6. *Нека су функције $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисане са*
$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
нека је $f(u,v) = uv$ за $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ и нека је $h(x,y) = f(u(x,y,v(x,y))$.

Функције u и v нису диференцијабилне у тачки $(0,0)$, а функција h јесте диференцијабилна у тој тачки.

Задаци

1. За функцију $z : (x,y) \mapsto f(\sqrt{x^2+y^2})$, где је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција, одредити парцијалне изводе првог реда.

2. Доказати да за функцију $z : (x,y) \mapsto xf(xy)$, где је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција, важи једнакост $xz'_x - yz'_y = z$.

3. Проверити да ли за функцију $z : (x,y) \mapsto xf(x^2 - y^2)$, где је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција, важи једнакост
$$y^2 z'_x + xyz'_y = xz.$$

4. Доказати да за функцију $z : (x,y) \mapsto \dfrac{y^2}{3x} + f(xy)$, где је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција, важи једнакост
$$x^2 z'_x - xyz'_y + y^2 = 0.$$

5. За фуннкцију $h : (x,y) \mapsto u^3 + v^3$, где је $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ и $v(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$, одредити парцијалне изводе првог реда.

6. За функцију $h : (x,y) \mapsto \ln\dfrac{u}{v}$, где је $u(x,y) = \sin\dfrac{x}{y}$ и $v(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, одредити парцијалне изводе првог реда.

7. Нека је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(u,v)=\begin{cases}\dfrac{u^{5/3}v}{u^2+v^2}, & (u,v)\neq(0,0)\\ 0, & (u,v)=(0,0)\end{cases}$$

и нека су функције $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисане са

$$u(x)=x,\quad v(x)=\begin{cases}x^{4/3}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказати да су u и v диференцијабилне функције у тачки $x=0$ и да постоје парцијални изводи функције f у тачки $(0,0)$, а да сложена функција g дефинисана са (2) нема извод у тачки $x=0$.

8. Ако су $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилне функције и ако је $z(x,y)=f(x+g(y))$, проверити да ли важи једнакост $z'_x z''_{xy}=z'_y z''_{xx}$.

9. Доказати да за функцију $z:(x,y)\mapsto f\left(\dfrac{y}{x}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где су $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилне функције, важи једнакост

$$x^2z''_{x^2}+2xyz''_{xy}+y^2u''_{y^2}=0.$$

10. Доказати да за функцију $h:(x,y)\mapsto f(u(x,y),v(x,y))$ важи

$$h''_{x^2}=f''_{u^2}{u'_x}^2+2f''_{uv}u'_xv'_x+f''_{v^2}{v'_x}^2+f'_uu''_{x^2}+f'_vv''_{x^2}.$$

11. За функцију $h:(x,y)\mapsto f(u(x,y),v(x,y))$ извести формуле за све парцијалне изводе другог реда.

12. Нека је $h(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$, где је $u(x,y)=x^2y$ и $v(x,y)=3x+2y$. Доказати да је

$$h''_{y^2}=x^4f''_{u^2}+4x^2f''_{uv}+4f''_{v^2},\qquad h''_{xy}=2x^3yf''_{u^2}+(3x^2+4xy)f''_{uv}+2xf'_u+6f''_{v^2}.$$

13. Дата је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ за коју важи једнакост $f''_{x^2}(x,y)+f''_{y^2}(x,y)=0$. Доказати да за сложену функцију $h:(x,y)\mapsto f(u(x,y),v(x,y))$, где је

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2},$$

такође важи аналогна једнакост.

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., *Математика 2 - решени примери са испита и колоквијума*, ФОН, Београд, 2014.