ФУНКЦИЈЕ ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Довољни услови за диференцијабилност

Драган Ђорић

Функција $f : D \to \mathbb{R}$, где је $D \subset \mathbb{R}^2$, је *диференцијабилна* у унутрашњој тачки $(x, y) \in D$ ако је

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

када $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Ако (ради једноставнијег записа) прираштаје Δx и Δy означимо са h и k, услов диференцијабилности функције f у тачки (a, b) ће бити

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \tag{1}$$

када $(h, k) \to (0, 0)$.

1 Еквивалентан услов диференцијабилности

Услов (1) је еквивалентан услову

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \alpha(h,k)h + \beta(h,k)k, \tag{2}$$

где су α и β бесконачно мале функције када $(h, k) \to (0, 0)$.

Теорема 1. *Функција $f : D \to \mathbb{R}^2$, где је $D \subset \mathbb{R}^2$, је диференцијабилна у унутрашњој тачки (a, b) скупа D ако и само ако у тачки (a, b) важи услов (2).*

Доказ. [`Довољност`] Доказ да из услова (2) следи услов (1) дат је у уџбенику [1] (Теорема 2.3.1).

[`Неопходност`] Докажимо да важи и обратно, да из услова (1) следи услов (2). Ако је $\gamma(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$ када $h \to 0$ и $k \to 0$, онда је

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\gamma(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

односно $\gamma(h, k)/\sqrt{h^2 + k^2}$ је бесконачно мала када $h \to 0$ и $k \to 0$. Дакле,

$$\frac{\gamma(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \delta(h,k),$$

при чему $\delta(h,k) \to 0$ када $(h,k) \to (0,0)$. То даље значи да је

$$\gamma(h,k) = \delta(h,k)\sqrt{h^2+k^2} = \frac{\delta(h,k)h^2 + \delta(h,k)k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\delta(h,k)h}{\sqrt{h^2+k^2}}h + \frac{\delta(h,k)k}{\sqrt{h^2+k^2}}k.$$

Како је δ бесконачно мала функција када $h \to 0$ и $k \to 0$ и како су $h/\sqrt{h^2+k^2}$ и $k/\sqrt{h^2+k^2}$ ограничене функције, то је

$$\gamma(h,k) = \alpha(h,k)h + \beta(h,k)k,$$

где су α и β бесконачно мале функције када $h \to 0$ и $k \to 0$, дате са

$$\alpha(h,k) = \frac{\delta(h,k)h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \quad \beta(h,k) = \frac{\delta(h,k)h}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Према томе, доказали смо да важи услов (1). ■

2 Неопходни услови диференцијабилности

Из саме дефиниције диференцијабилности функције у некој тачки следи да функција у тој тачки има парцијалне изводе првог реда. Другим речима, постојање парцијалних извода f'_x и f'_y у тачки (a,b) је неопходан услов диференцијабилности функције f у тачки (a,b).

Неопходан услов диференцијабилности функције у некој тачки је и непрекидност функције у тој тачки. Ово тврђење је дато у уџбенику [1] (Теорема 2.3.2), при чему се у доказу полази од услова (2) који је (на основу тврђење из Теореме 1) еквивалентан услову (1). Непрекидност се лако добија и директно из услова (1) јер десна страна у тој једнакости тежи ка $f(a,b)$ када $h \to 0$ и $k \to 0$.

Према томе, свака функција која у тачки (a,b) не испуњава бар један од ова два неопходна услова није диференцијабилна у тачки (a,b).

Пример 1. *Функција $(x,y) \mapsto |x| + |y|$ нема парцијалне изводе у тачки $(0,0)$, па није ни диференцијабилна у тачки $(0,0)$ (мада је непрекидна у $(0,0)$).*

У следећем примеру није испуњен други неопходан услов.

Пример 2. *Функција $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ није непрекидна у тачки $(0,0)$, па није у тој тачки ни диференцијабилна (мада има парцијалне изводе у $(0,0)$).*

Међутим, ни оба ова услова заједно нису довољна за диференцијабилност. Пример непрекидне функције која има парцијалне изводе у тачки $(0,0)$, а није у тој тачки диференцијабилна, дат је у [1] (Пример 2.3.6). У питању је функција $f : (x,y) \mapsto \sqrt[3]{xy}$. Приметимо да за ову функцију не постоји f'_x у тачкама y-осе (осим тачке $(0,0)$) и не постоји f'_y у тачкама x-осе (осим тачке $(0,0)$. Осим тога, парцијални изводи f'_x и f'_y нису непрекидни у тачки $(0,0)$ (на области дефинисаности).

Ево још једног сличног примера.

Пример 3. *Функција* $f:(x,y)\mapsto\sqrt{|xy|}$ *је непрекидна у* $\mathbb{R}^2$, *има парцијалне изводе у тачки* $(0,0)$, *а није диференцијабилна у тој тачки. Заиста, како је* $f(0,0)=f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, *функција је диференцијабилна у тачки* $(0,0)$ *ако је* $f(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$ *када* $h\to 0$ *и* $k\to 0$. *Из једнакости*

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\sqrt{|\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi|}}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}$$

видимо да није $f(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$ *када* $h\to 0$ *и* $k\to 0$. *Према томе, функција* f *није диференцијабилна у тачки* $(0,0)$.

Приметимо да и у овом примеру парцијални изводи f'_x *и* f'_y *нису дефинисани у некој целој околини тачке* $(0,0)$ *и да нису ни непрекидни у тој тачки (на скупу дефинисаности). За проверу да ли је* $f(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$ *када* $h\to 0$ *и* $k\to 0$, *уместо коришћења поларних координата, могли смо и да уочимо да је* $f(h,h)/\sqrt{h^2+h^2}=1/\sqrt{2}$.

Функција не мора да буде диференцијабилна у тачки (a,b) чак и у случају да је непрекидна и да има парцијалне изводе не само у тачки (a,b), већ и у некој њеној околини.

Пример 4. *Функција* $(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ *је непрекидна у тачки* $(0,0)$ *и има парцијалне изводе у* $\mathbb{R}^2$,

$$f'_x(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},\quad f'_x(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

а није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

3 Јаки довољни услови за диференцијабилност

Следећа теорема даје довољне услове за диференцијаблност функције f у тачки (a,b).

Теорема 2. *Ако су парцијални изводи првог реда функције* f *дефинисани у некој околини* U *тачке* (a,b) *и ако су непрекидни у тачки* (a,b), *тада је функција* f *диференцијабилна у тачки* (a,b).

Доказ. За прираштаје h и k за које важи $(a+h,b+k)\in U$ имамо да је

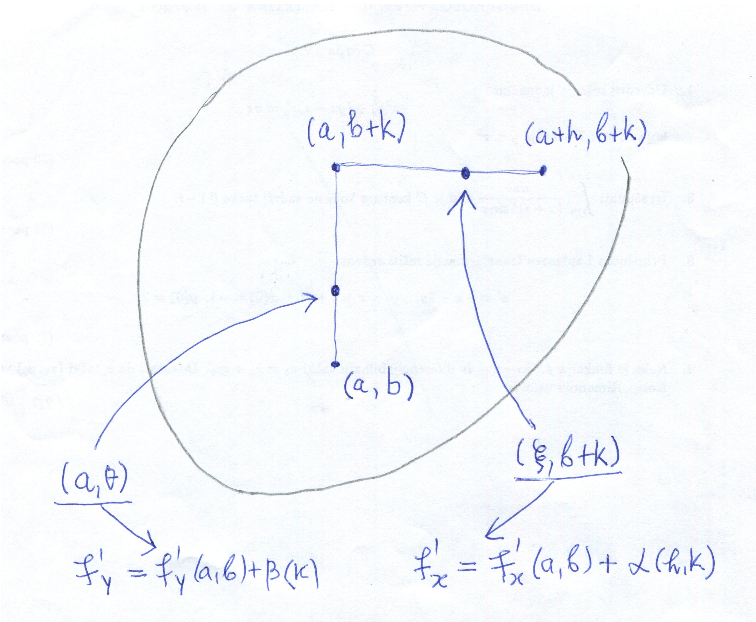
$$\Delta f(a,b)=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b). \tag{3}$$

Ако су $\varphi:[a,a+h]\to\mathbb{R}$ и $\psi:[b,b+k]\to\mathbb{R}$ функције дефинисане са $\varphi(x)=f(x,b+k)$ и $\psi(y)=f(a,y)$, тада оне испуњавају услове за примену Лагранжове теореме. То значи да постоји тачке $\xi\in(a,a+h)$ и $\theta\in(b,b+k)$ (видети сл.1) за које важи

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)h,\quad \psi(b+k)-\psi(b)=\psi'(\theta)k.$$

С обзиром на дефиницију функција φ и ψ, то даље значи да је

$$f(a+h,b+k)-f(a,b+k)=f'_x(\xi,b+k)h,\quad f(a,b+k)-f(a,b)=f'_y(a,\theta)k. \tag{4}$$



Сл. 1: Тачке из доказа Теореме 2

Из (3) и (4) следи да је

$$\Delta f(a,b) = f'_x(\xi, b+k)h + f'_y(a,\theta)k. \tag{5}$$

На основу претпоставке о непрекидности функција f'_x и f'_y у тачки (a,b) имамо да је[1]

$$f'_x(\xi, b+k) = f'_x(a,b) + \alpha(h,k), \quad f'_y(a,\theta) = f'_y(a,b) + \beta(k), \tag{6}$$

где су α и β бесконачно мале функције када $h \to 0$ и $k \to 0$. Из (5) и (6) следи да је

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = f'_x(a,b)h + \alpha h, \tag{7}$$

$$f(a, b+k) - f(a,b) = f'_y(a,b)k + \beta k. \tag{8}$$

Заменом ових израза у (3) добија се да је

$$\Delta f(a,b) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \alpha(h,k)h + \beta(k)k.$$

Из ове једнакости (према Теореми 1) закључујемо да је функција f диференцијабилна у тачки (a,b). ■

Према овој теореми, за функције које у околини тачке (a,b) имају дефинисане парцијалне изводе првог реда, можемо уместо једнакости из дефиниције диференцијабилности, проверавати да ли су ти парцијални изводи непрекидни у тачки (a,b). У случају да јесу, закључујемо да је функција диференцијабилна у тачки (a,b).

Уколико је функција из класе $C^1(D)$ (скуп функција које су непрекидно диференцијабилне[2] на скупу D), онда је она и диференцијабилна на D.

Пример 5. *Функција $f : (x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2)$ дефинисана је за свако $(x,y) \neq (0,0)$. Како су парцијални изводи*

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad f'_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

непрекидни у области дефинисаности, према Теореми 2 и функција f је диференцијабилна у области дефинисаности.

[1] Овде се користи тврђење: *Функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ има граничну вредност A у тачки (a,b) ако и само ако је $f(x,y) = A + \alpha(x,y)$, где је α бесконачно мала функција када $(x,y) \to (a,b)$.*

[2] Функција је у датој тачки *непрекидно диференцијабилна* ако у тој тачки има непрекидне парцијалне изводе првог реда.

У следећем примеру функција припада класи $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Пример 6. *За функцију $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисану са*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

имамо да је

$$f'_x(x,y) = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(x,y) = 2y^3\frac{2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

Функције f'_x и f'_y су непрекидне у тачкама $(x,y) \neq (0,0)$ (као количници непрекидних функција), па остаје још да се провери непрекидност парцијалних извода у тачки $(0,0)$. За $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$ добијамо да је

$$|f'_x(x,y)| = 2\rho|\cos\varphi\sin^4\varphi| \leq 2\rho, \quad |f'_y(x,y)| = 2\rho|\sin^3\varphi(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi| \leq 6\rho.$$

Из ових неједнакости видимо да је

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = f'_x(0,0), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = f'_y(0,0).$$

Према томе, функције f'_x и f'_y су непрекидне и у тачки $(0,0)$, што значи да $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Према претходној теореми функција f је диференцијабилна у свакој тачки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Услов из Теореме 2 није и неопходан за диференцијабилност. Постоје функције које су у датој тачки диференцијабилне, а не испуњавају услове Теореме 2. Један такав пример је дат у уџбенику [1] (Пример 2.3.7).

У доказу Теореме 2 коришћена је непрекидност функције f'_x у тачки (a,b) (функција f'_x је дефинисана у некој околини тачке (a,b)) и непрекидност функције f'_y у тачки (a,b) на скупу[3]

$$Y = \{(a,y) \mid y \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\} \tag{9}$$

за неко $\varepsilon > 0$. Дакле, за функцију f'_y може се претпоставити и да постоји само на скупу Y. У сваком случају услов непрекидности за f'_y може у Теореми 2 да се замени условом непрекидности у тачки (a,b) на скупу Y.

Теорема 3. *Нека функција f има дефинисан парцијални извод f'_x у околини тачке (a,b) и дефинисан парцијални извод f'_y на скупу Y. Ако је функција f'_x непрекидна у тачки (a,b), а функција f'_y непрекидна у тој истој тачки на скупу Y, онда је f диференцијабилна у тачки (a,b).*

Ако x и y замене улоге, добијамо симетричне услове. Аналогно дефиницији скупа Y из (9) уводимо и скуп

$$X = \{(x,b) \mid x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} \tag{10}$$

за неко $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. *Нека функција f има дефинисан парцијални извод f'_y у околини тачке (a,b) и дефинисан парцијални извод f'_x на скупу X. Ако је функција f'_y непрекидна у тачки (a,b), а функција f'_x непрекидна у тој истој тачки на скупу X, онда је f диференцијабилна у тачки (a,b).*

[3] За дефиницију појма *функција је непрекидна у тачки на скупу* видети уџбеник [1] (Дефиниција 1.4.22).

Међутим, у Теореми 2 услов непрекидности функције f'_x не може да се замени условом непрекидности у тачки (a, b) на скупу дефинисаности те функције (осим ако скуп дефинисаности за f'_x није нека цела околина тачке (a, b)).

Пример 7. *Нека је функција* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *дата са* $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$ *Парцијални извод* f'_x *је дефинисан за све тачке ван y-осе, а парцијални извод* f'_y *испуњава услов Теореме 3. Функција* f'_x *је непрекидна у тачки* $(0, 0)$ *на скупу дефинисаности, али ипак није диференцијабилна у тачки* $(0, 0)$.

4 Слабији довољни услови за диференцијабилност

Услови из Теореме 2, па чак и из Теореме 3 и Теореме 4, могу се ослабити, односно могу се дати слабији услови који су довољни за диференцијабилност функције.

У уџбенику [1] (Теорема 2.3.3) је доказано следеће тврђење.

Теорема 5. *Ако функција* f *има дефинисане парцијалне изводе у тачки* (a, b) *и ако је бар један од њих дефинисан и у околини тачке* (a, b) *и непрекидан у тој тачки, онда је функција* f *диференцијабилна у тачки* (a, b).

Дакле, довољан услов за диференцијабилност функције две променљиве може да обезбеди један од парцијалних извода првог реда. На пример, ако за парцијални извод f'_y изоставимо било какву претпоставку о непрекидности, добијамо следеће тврђење.

Теорема 6. *Нека функција* f *има дефинисан парцијални извод* f'_x *у некој околини тачке* (a, b) *и нека је парцијални извод* f'_y *дефинисан у тачки* (a, b). *Ако је функција* f'_x *непрекидна у тачки* (a, b), *тада је функција* f *диференцијабилна у тачки* (a, b).

Доказ ове теореме се добија тако што се у доказу Теореме 2, уместо примене Лагранжове теореме за функцију ψ, једнакост (8) добија директно на основу дефиниције парцијалног извода $f'_y(a, b)$. Како је $f(a, b + k) - f(a, b) = \Delta_y f(a, b)$ и како $\Delta_y f(a, b)/k \to f'_y(a, b)$ када $k \to 0$, то је

$$\frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = f'_y(a, b) + \beta(k).$$

Из ове једнакости (без било какве претпоставке о непрекидности за f'_y) поново добијамо једнакост (8). Све остало је исто као у доказу Теореме 2.

Следећи пример даје функцију на коју не може да се примени Теорема 2 (ни Теорема 3, ни Теорема 4), а може да се примени Теорема 5.

Пример 8. *Функција* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *дефинсана је са*

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

За свако $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *је* $f'_y(x, y) = 0$, *па је функција* f'_y *непрекидна у тачки* $(0, 0)$. *За парцијални извод* f'_x *имамо да је*

$$f'_x = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Лако се види да у свим тачкама $(0, y)$ за $y \in \mathbb{R}$ функција f'_x има прекид, што значи да не могу да се примене теореме које садрже јаке довољне услове.

Међутим, испуњени су услови за примену Теореме 5 (постоји $f'_x(0,0)$), па закључујемо да је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Питање 1. *Да ли и једнакост (7) може да се добије тако што се пође од једнакости*

$$\Delta_x f(a, b+k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k), \quad \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_x f(a, b+k)}{h} = f'_x(a, b+k)$$

(без примене Лагранжове теореме)?

Теорема 6 може да се користи и за функције које у датој тачки имају оба парцијална извода непрекидна. Предност је у томе што не мора да се проверава непрекидност оба парцијална извода, већ само једног.

Пример 9. *Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

За дату функцију је $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. У [2] (зад. 2.8) је на основу дефиниције утврђено да је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$. Ако се користи претходна теорема, довољно је проверити непрекидност парцијалног извода f'_x у тачки $(0,0)$. За $(x, y) \neq (0,0)$ диференцирањем датог израза по x налазимо да је

$$f'_x(x, y) = \frac{y^5 - y^3x^2}{(x^2+y^2)^2} = \rho(\sin^5\varphi - \cos^2\varphi \sin^3\varphi) = \rho F(\varphi).$$

Како је $|F| \leq 2$, то је

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x, y) = 0 = f'_x(0,0).$$

Према томе, функција f'_x је непрекидна у тачки $(0,0)$, па према Теореми 6 следи да је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Занимљиво је да чак ни ови довољни услови нису неопходни за диференцијаблност, што показује следећи пример.

Пример 10. *Нека је $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2y^2}$. Како је*

$$|\Delta f(0,0)| = \sqrt[3]{h^2k^2} = \sqrt[3]{\rho^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi} \leq \rho^{4/3},$$

то је $\Delta f(0,0) = o(\sqrt{h^2+k^2})$ када $\rho \to 0$, па је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

С друге стране, из једнакости

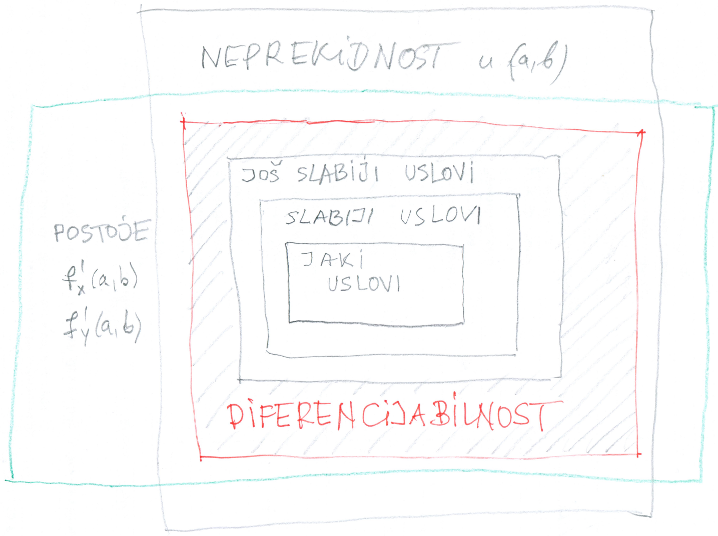
$$f(h, y) - f(0, y) = \sqrt[3]{h^2y^2}, \quad f(x, k) - f(x, 0) = \sqrt[3]{x^2k^2}$$

следи да $f'_x(0, y)$ за $y \neq 0$ и $f'_y(x, 0)$ за $x \neq 0$ не постоје.

Дакле, функција може да буде диференцијабилна чак и без услова који фигуришу у Теореми 5 и Теореми 6. То значи да се могу формулисати и неки други довољни услови, различити од наведених. Ако услови из ове две теореме нису испуњени, а немамо других довољних услова, не остаје ништа друго него да се диференцијабилност испита на основу дефиниције.

Пример 11. *У задатку 2.10 из [2] је* $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, *а* $f'_x(0,y) = -1$ *и* $f'_y(x,0) = 1$. *Према томе, функција* f'_x *није непрекидна у тачки* $(0,0)$ *на скупу* Y *и функција* $f'_y(x,0)$ *није непрекидна у тачки* $(0,0)$ *на скупу* X. *То значи да нису испуњени услови ниједне од наведених теорема које дају довољне услове за диференцијабилност. Наравно, из тога не можемо ништа закључити по питању диференцијабилности, а у [2] је на основу дефиниције утврђено да функција* f *није диференцијабилна у тачки* $(0,0)$.

Однос непрекидности, егзистенције парцијалних извода и датих довољних услова диференцијабилности је приказан на слици 2.



Сл. 2: Услови за диференцијабилност функције две променљиве

Задаци

Провером јаког довољног услова диференцијабилности (провером непрекидности парцијалних извода) доказати да је дата функција диференцијабилна на $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^3 \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

5. Одредити све вредности реалног параметра λ за које функција f дата са

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^\lambda y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

припада класи $C^1(\mathbb{R}^2)$.

У следећим задацима за дату функцију одредити све тачке у којима она има парцијалне изводе и све тачке у којима је диференцијабилна.

6. $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0.\end{cases}$

7. $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0\\ x, & y=0\\ y, & x=0.\end{cases}$

8. $f(x,y)=|x|+|y|-|x+y|$.

9. Да ли постоји функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ која није диференцијабилна у тачки $(0,0)$ и за коју функција f^n за свако $n\in\mathbb{N}$ такође није диференцијабилна у тачки $(0,0)$?

10. Да ли постоји функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква да f није, а f^2 јесте диференцијабилна у тачки $(0,0)$?

11. Нека је S скуп свих функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ које су диференцијабилне у тачки $(0,0)$ и нека су $+$ и $\cdot$ операције сабирања функција и множења функције реалним бројем. Да ли је $(S,+,\cdot)$ векторски простор?

12. Доказати да је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки (a,b) ако и само ако постоје реални бројеви A, B и C такви да је

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(a+h,b+k)-A-Bh-Ck|}{|h|+|k|}=0.$$

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., *Математика 2 - решени примери са испита и колоквијума*, ФОН, Београд, 2014.