ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ ФУНКЦИЈЕ ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Решени примери и задаци за вежбу

Драган Ђорић

У наредним задацима се углавном испитује диференцијабилност дате функције у тачки $(0,0)$. Према дефиницији диференцијабилности треба проверити да ли је

$$\Delta f(0,0) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

када $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Ако је $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, то значи да треба проверити да ли је

$$\Delta f(0,0) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

када $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, односно да ли је

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Последњи услов можемо и једноставније записати ако прираштаје независних променљивих означимо са x и y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Неопходан услов диференцијабилности функције у некој тачки је непрекидност функције у тој тачки. Према томе, ако функција није непрекидна у датој тачки, онда она није ни диференцијабилна у тој тачки.

Решени примери

1. Доказати да је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

диференцијабилна у свим тачкама равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Задатак је решен у [1] и у [7].

У следећим задацима доказати да је дата функција $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки $(0,0)$, иако парцијални изводи у тој тачки имају прекид.

2. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [7].

3. $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [7].

4. $f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+y^2\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq 0\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\ y=0\\ y^2\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0,\ x=0\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [7].

У следећим задацима доказати да дата функција $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ у тачки $(0,0)$ није диференцијабилна, иако има парцијалне изводе.

5. $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

Задатак је решен у [7].

6. $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$.

Задатак је решен у [1] и у [7].

7. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [7].

8. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [7].

9. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [7].

Испитати да ли је дата функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

10. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [2].

11. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [2].

12. $f(x,y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [2].

13. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y - xy^2}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [2].

14. $f(x,y) = |x| + |y| - |x+y|$.

Задатак је решен у [2].

15. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [2].

16. $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [2].

17. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y - xy^4}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [2].

18. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\, x, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [2].

19. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [2].

20. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \dfrac{3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [6].

21. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - 5xy}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Задатак је решен у [3].

22. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3\cos x+x^3\cos y}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [3].

23. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2y}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [3].

24. $f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{4y^3}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [3].

25. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^6+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [3].

26. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y}{x^4+y^4}\sin\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [3].

27. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [3].

28. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Задатак је решен у [3].

Задаци за самосталан рад

Одредити све тачке у којима је дата функција диференцијабилна.

29. $f(x,y)=x|y|+y|x|.$

30. $f(x,y)=|x^2-y^2|.$

31. $f(x,y)=|x|+|y|-||x|-|y||.$

32. $f(x,y)=\max\{|x|^a,|y|^a\},\ a>0.$

33. $f(x,y)=\dfrac{1}{1+|xy|}.$

Испитати да ли је дата функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

34. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

35. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

36. $f(x,y)=\sqrt[4]{x^4+y^4}$.

37. $f(x,y)=\sqrt[5]{x^5+y^5}$.

38. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$.

39. $f(x,y)=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3$.

40. $f(x,y)=\cos\sqrt[3]{xy}$.

41. $f(x,y)=y+\cos\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

42. $f(x,y)=\arcsin(xy+\sqrt[3]{x^3+y^3})$.

43. $f(x,y)=\arctan(xy+y+\sqrt[3]{x^2y})$.

44. $f(x,y)=\ln(3+\sqrt[3]{x^2|y|})$.

45. $f(x,y)=|y|sinx$.

46. $f(x,y)=y^{3/5}\arcsin\sqrt{|x|}$.

47. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

48. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

49. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

50. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5+y^5}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

51. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^7+y^7}{x^6+y^6}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

52. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^3}{x^2+2y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

53. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-y^2)^3}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

54. $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{y}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0. \end{cases}$

55. $f(x,y)=\begin{cases} \sqrt[3]{xy}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0. \end{cases}$

56. $f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+y^2, & x\neq 0\\ y^2, & x=0. \end{cases}$

57. $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

58. $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\sqrt{(x^2+y^2)}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

59. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^6+y^6)^{2/3}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

60. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{\sqrt{x^6+y^6}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

61. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2y)^{4/3}}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

62. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2y)^{4/3}}{(x^4+y^4)^{3/4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

63. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x^3y|^{1/2}}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

64. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2y^3)^{3/5}}{x^2-xy+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

65. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2y^3)^{3/5}}{\sqrt{x^2-xy+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

66. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+xy}-e^{xy/2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

67. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^3y+y^5)^{1/3}}{|x|+|y|}+2y, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

68. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}\left[\ln\dfrac{1+xy}{1-xy}-2xy\right], & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

69. Доказати да функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисана са $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ није диференцијабилна у тачкама $(x,0)$ и $(0,y)$ за свако $x,y\in\mathbb{R}$.

70. Испитати да ли је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^y\sin x^2y}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

диференцијабилна у тачкама $(0,y)$.

71. Испитати да ли је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{y}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

диференцијабилна у тачкама $(0,y)$.

У следећим задацима одредити све вредности параметра a за које је дата функција диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

72. $f(x,y)=|xy|^a$.

73. $f(x,y)=\begin{cases}|x+y|^{3a}+|y|^{4-a}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

74. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^a|y|^{5-2a}}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

75. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{3a}+y^{7-a}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

76. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^a}{1-\ln(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., *Математика 2 - решени примери са испита и колоквијума*, ФОН, Београд, 2014.

[3] Тодорчевић, В., Џамић, Д., Младеновић, Н., Николић, Н., *Математика 2 - збирка задатака*, ФОН, Београд, 2016.

[4] Ђорић, Д., Лазовић, Р., Јованов., Ђ., *Математика 2 - збирка задатака и примери колоквијума*, ФОН, Београд, 2009. [Стара збирка]

[5] Ђорић, *Решени примери првог колоквијума - 22 примера првог колоквијума са комплетним решењима задатака*, http://math.fon.rs/matematika-dva

[6] Ђорић, *Решења задатака групе 1 са првог колоквијума из Математике 2 одржаног 2016. године*, http://math.fon.rs/matematika-dva

[7] Ђорић, *Задаци стари, решења нова - решења свих задатака 4. теме из Старе збирке* (збирке [4]), http://math.fon.rs/matematika-dva