СКУПОВИ У $\mathbb{R}^2$

Решени примери и задаци за вежбу

Драган Ђорић

Елементи скупа $\mathbb{R}^2$ су уређене двојке реалних бројева. Алгебарска структура $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$, где је $+$ операција сабирања уређених двојки, а $\cdot$ операција множења уређене двојке реалним бројем (скаларом), је *векторски простор* (видети [2], стр.61) над пољем $\mathbb{R}$. Овај векторски простор ћемо (ради једноставности) такође означавати са $\mathbb{R}^2$ (као и сам скуп). Векторски простор $\mathbb{R}^2$ је дводимензиони, а једну базу тог простора чине вектори $(1,0)$ и $(0,1)$.

1 Норма и метрика у $\mathbb{R}^2$

Увођењем норме за векторе из $\mathbb{R}^2$ (уређене парове), векторски простор $\mathbb{R}^2$ постаје *нормирани простор*. Како је сваки нормирани простор истовремено и метрички простор (метрика одређује растојање између тачака или елемената простора), то значи да у простору $\mathbb{R}^2$ могу да се уведу околине тачака (вектора) и да се дефинишу гранични процеси.

Ако се норма дефинише помоћу стандардног (еуклидског) скаларног производа[1] (видети [2], стр.68), добија се да је *норма*[2] или *дужина* вектора $x = (x_1, x_2)$, у ознаци $||x||$ (може и $|x|$, као што је у $\mathbb{R}$) дата са

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

У том случају *метрика* је дата са

$$d(x,y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

за $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$. За метрику може да се користи и термин *растојање*.

[1] Простор $\mathbb{R}^2$ са скаларним производом је *унитарни простор*.

[2] Норма у векторском простору X има следећа својства: $||0|| = 0$, $||x|| > 0$ за свако $x \in X$ и $x \neq 0$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ за свако $x \in X$ и $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ за свако $x, y \in X$. Скуп X са дефинисаном нормом је *нормиран простор*.

Скуп $\mathbb{R}^2$ са оваквом нормом и метриком је *еуклидски простор*[3], а метрика је еуклидска и означава се и са d_2.

Две метрике m_1 и m_2 у $\mathbb{R}^2$ су *еквивалентне* ако постоје позитивни бројеви α и β, такви да за све $x, y \in \mathbb{R}^2$ и $x \neq y$ важи

$$\alpha \cdot m_1(x, y) < m_2(x, y) < \beta \cdot m_1(x, y).$$

Решени примери

1.1. Доказати да функција $d_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ заиста ипуњава услове за метрику:

1. $d_2(x, y) = 0$ ако и само ако је $x = y$;
2. $d_2(x, y) = d_2(y, x)$ за свако $x, y \in \mathbb{R}^2$ (симетрија);
3. $d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y)$ за свако $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ (неједнакост троугла).

Решење. Из израза за функцију d_2,

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

директно следи 1. и 2. Треба још доказати да важи неједнакост троугла, односно да је

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}.$$

Ако је

$$x_1 - z_1 = a_1, \quad x_2 - z_2 = a_2, \quad z_1 - y_1 = b_1, \quad z_2 - y_2 = b_2,$$

претходна неједнакост је

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Пошто су обе стране ове неједнакости ненегативне, квадрирањем се добија еквивалентна неједнакост

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Ова неједнакост је тачна јер следи из неједнакости

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

која је еквивалентна познатој Кошијевој неједнакости[4]

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

1.2. Доказати да је свака метрика d која испуњава услове из претходног задатка ненегативна функција.

Решење. Из услова *неједнакост тругла* и *симетрија* имамо да је

$$d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

за свако $x, y \in \mathbb{R}^2$. Како је $d(x, x) = 0$, то значи да је $d(x, y) \geq 0$ за свако $x, y \in \mathbb{R}^2$.

[3] Еуклидски простор $\mathbb{R}^2$ је *метрички простор* и *нормиран простор*.

[4] Кошијева неједнакост се лако доказује јер је еквивалентна тачној неједнакости $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$. Аналогна неједнакост важи и у $\mathbb{R}^n$ (видети [2], стр.69), а може да се докаже разматрањем дискриминанте погодно изабраног квадратног тринома. На пример, у нашем случају (за $n = 2$) за

$$f(t) = (a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)t^2 + (2a_1 b_1 + 2a_2 b_2)t + b_1^2 + b_2^2$$

имамо да је $f(t) \geq 0$, па из неједнакости $D \leq 0$ (D је дискриминанта тринома $f(t)$) следи Кошијева неједнакост.

Задаци за самосталан рад

1.3. Доказати да је скуп $\mathbb{R}^2$ еквивалентан скупу $\mathbb{R}$.

1.4. Испитати да ли је функцијом $x \mapsto \max\{|x_1|, |x_2|\}$, где је $x = (x_1, x_2)$, дефинисана норма у векторском простору $\mathbb{R}^2$.

1.5. Испитати да ли је функцијом $x \mapsto \min\{|x_1|, |x_2|\}$, где је $x = (x_1, x_2)$, дефинисана норма у векторском простору $\mathbb{R}^2$.

1.6. Доказати да у случају еуклидске норме за свако $x, y \in \mathbb{R}^2$ важи

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

1.7. Нека је функцијом $x \mapsto ||x||$ дефинисана нека норма у $\mathbb{R}^2$. Испитати да ли је функција $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са $d(x, y) = ||x - y||$ метрика у $\mathbb{R}^2$.

1.8. Доказати да за свако $x, y, a \in \mathbb{R}^2$ и за било коју метрику d у $\mathbb{R}^2$ важе једнакости

$$d(-x, -y) = d(x, y), \quad d(x + a, y + a) = d(x, y).$$

1.9. Доказати да за свако $x, y, z, u \in \mathbb{R}^2$ и за било коју метрику d у $\mathbb{R}^2$ важи

$$d(x, u) \leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, u)$$

(неједнакост четвороугла).

1.10. Нека су $x_1, x_2, \ldots x_n$ било које тачке и нека је d било која метрика у $\mathbb{R}^2$. Доказати да за $n \geq 2$ важи

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

(неједнакост многоугла).

1.11. Функција $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана је са $d(x, y) = |x_1 - y_1|$, где је $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$. Да ли је d метрика у $\mathbb{R}^2$?

1.12. Доказати да функција $d_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

где је $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ дефинише растојање у $\mathbb{R}^2$ (познато је као *Менхетн метрика*).

1.13. Функција $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана је са

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|,$$

где је $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$. Да ли је d метрика у $\mathbb{R}^2$?

1.14. Доказати да функција $d_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

где је $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ дефинише растојање у $\mathbb{R}^2$ (познато је као *Чебишевљева метрика*[5]).

[5] Ова метрика је још позната и као *униформна метрика* и означава се и са d_u

1.15. Испитати да ли функција $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$d(x,y) = \max\{a|x_1 - y_1|, b|x_2 - y_2|\}, \quad a, b > 0$$

где је $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ дефинише растојање у $\mathbb{R}^2$.

1.16. Да ли је функција $d = ad_2$, где је $a > 0$, метрика у $\mathbb{R}^2$?

1.17. Да ли је функција $d = d_2^2$ метрика у $\mathbb{R}^2$?

1.18. Нека су m_1 и m_2 две метрике у $\mathbb{R}^2$. Испитати да ли су $m_1 + m_2$, $2m_1 + 3m_2$, $\max\{m_1, m_2\}$, $\min\{m_1, m_2\}$, $m_1 \cdot m_2$, $m_1^2 + m_2^2$, $\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$, $\sqrt[3]{m_1^3 + m_2^3}$ такође метрике у скупу $\mathbb{R}^2$.

1.19. Доказати да функција $d_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$d_p(x,y) = \left(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\right)^{1/p},$$

где је $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ и где је $1 < p < \infty$, дефинише растојање у $\mathbb{R}^2$.

1.20. Доказати да функција $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

за $x, y \in \mathbb{R}^2$ дефинише растојање у $\mathbb{R}^2$ (познато је као *дискретна метрика*).

1.21. Доказати да функција $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$d(x,y) = \begin{cases} d_2(x,y), & x,\ y \text{ i } (0,0) \text{ су колинеарне тачке}, \\ d_2(x,0) + d_2(0,y), & \text{у противном}, \end{cases}$$

за $x, y \in \mathbb{R}^2$ дефинише растојање у $\mathbb{R}^2$ (познато је као *Грчка метрика* или *метрика ваздушне линије*).

1.22. Доказати да у $\mathbb{R}^2$ важи $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq 2d_\infty(x,y)$.

1.23. Доказати да су метрике d_1, d_2 и d_∞ у $\mathbb{R}^2$ међусобно еквивалентне.

1.24. Испитати да ли су све метрике d_p за $1 \leq p < \infty$ међусобно еквивалентне.

1.25. Нека је d метрика у $\mathbb{R}^2$ и нека је функција $d_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$d_l(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$$

за $x, y \in \mathbb{R}^2$. Доказати да је d_l такође метрика у $\mathbb{R}^2$.

1.26. Нека је d метрика у $\mathbb{R}^2$ и нека је функција $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

за $x, y \in \mathbb{R}^2$. Доказати да је ρ такође метрика у $\mathbb{R}^2$.

1.27. Доказати да за сваку метрику у $\mathbb{R}^2$ и свако $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ важи

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

1.28. Доказати да за сваку метрику у $\mathbb{R}^2$ и свако $x, y, u, v \in \mathbb{R}^2$ важи

$$|d(x,u) - d(y,u)| \leq d(x,y) + d(u,v).$$

2 Геометријска интерпретација скупова у $\mathbb{R}^2$

Ако елементу (x, y) из $\mathbb{R}^2$ придружимо тачку са координатама x и y у равни xOy, онда ће скупу из $\mathbb{R}^2$ одговарати скуп тачака у равни. Важи и обратно, изабрани скуп тачака у равни одређује скуп у $\mathbb{R}^2$. У том смислу, можемо за дати скуп из $\mathbb{R}^2$ користити и његову *геометријску интерпретацију* (одговарајући скуп тачака у равни).

Једноставни примери скупова тачака у равни су *линије* и *фигуре*. На пример, непрекидне функције $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ за $t \in [t_1, t_2]$ дефинишу *непрекидну криву*. Ако су φ и ψ линеарне функције, $x = \alpha t + \beta$ и $y = \gamma t + \delta$, за $t \in \mathbb{R}$ добијамо *праву линију* или *праву*. За дате тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ права која садржи те тачке дефинисана је са

$$x = x_1 + t(x_2 - z_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тачку M_1 добијамо за $t = 0$, а тачку M_2 за $t = 1$. За $T \in [0, 1]$ имамо *дуж* M_1M_2. Крива која је састављена од коначног броја дужи је *изломљена линија*.

Скуп тачака дефинисаних са $x = \cos t$ и $y = \sin t$ за $t \in [t_1, t_2]$ је *кружна линија*. За $t \in [0, 2\pi]$ то је *кружница*, за $t \in [0, \pi]$ то је *горња полукружница*, а за $t \in [\pi, 2\pi]$ то је *доња полукружница*. Са $x = x_0 + r\cos t$ и $y = y_0 + r\sin t$ за $t \in [0, 2\pi]$ дата је кружница с центром у тачки $M_0(x_0, y_0)$ и полупречником дужине r. Иста кружница је дефинисана и једначином

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

и представља скуп свих тачака $M(x, y)$ које су на растојању r од тачке $M_0(x_0, y_0)$.

Скуп свих тачака $M(x, y)$ за које важи $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ је *затворен круг* или само *круг*) који ћемо означавати са $K[M_0, r]$. Ако је строга неједнакост, то ће бити *отворен круг* који ћемо означавати са $K(M_0, r)$.

У случају еуклидске метрике тачке (x, y) из $\mathbb{R}^2$ можемо да поистоветимо са тачкама $M(x, y)$ из xOy равни. У том смислу за скупове из $\mathbb{R}^2$, чије геометријске интерпретације у xOy равни представљају познате линије и фигуре, можемо да преузмемо називе тих линија и фигура. Међутим, исте те појмове можемо да користимо и у случају неке друге метрике.

Ако је d било која метрика у $\mathbb{R}^2$, *отворен круг* или *отворена кугла* с центром у тачки $a \in \mathbb{R}^2$ и полупречником $r > 0$ је скуп

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \; d(x, a) < r\}$$

(ознака B је од енглеске речи *ball*). *Затворен круг* или *затворена кугла* је скуп

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \; d(x, a) \leq r\}.$$

Ако је d еуклидска метрика, скуповима $B(a, r)$ и $B[a, r]$ у равни xOy одговарају кругови $K(A, r)$ и $K[A, r]$, с центром у тачки $A(a)$. За неке друге метрике геометријске интерпретације кугли из $\mathbb{R}^2$ не морају бити кругови.

На сличан начин уводимо називе и за разне друге скупове из $\mathbb{R}^2$. Тако је скуп $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *затворени правоугаоник*, а скуп $(a_1, b_2) \times (a_2, b_2)$ је *отворени правоугаоник* или *отворени интервал* у $\mathbb{R}^2$. Правоугаоник може да буде и бесконачан. На пример, $[0, +\infty) \times [0, 1]$ је *бесконачан правоугаоник*.

Растојање између тачке $x \in \mathbb{R}^2$ и непразног скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ дато је са

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \; : \; a \in A\},$$

а *растојање између непразних скупова $A, B \subset \mathbb{R}^2$* је

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \; : \; a \in A, \; b \in B\}.$$

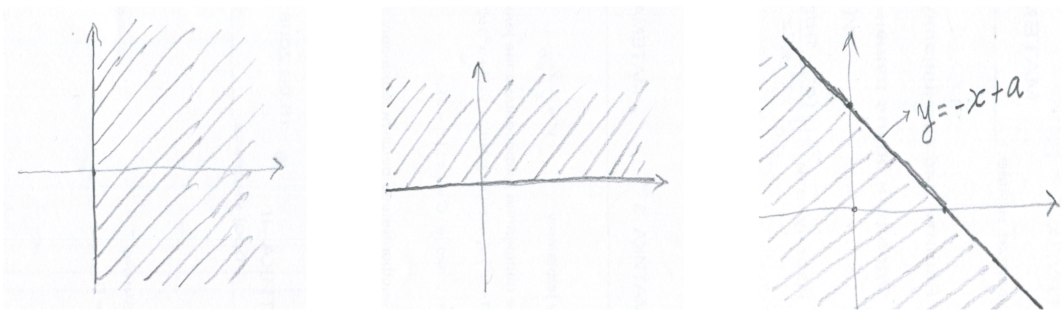
Решени примери

2.1. Одредити геометријску фигуру у равни дефинисану са $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $x + y \leq a$, где је $a > 0$.

Решење. Дати скуп тачака је пресек скупова A, B и C, где је

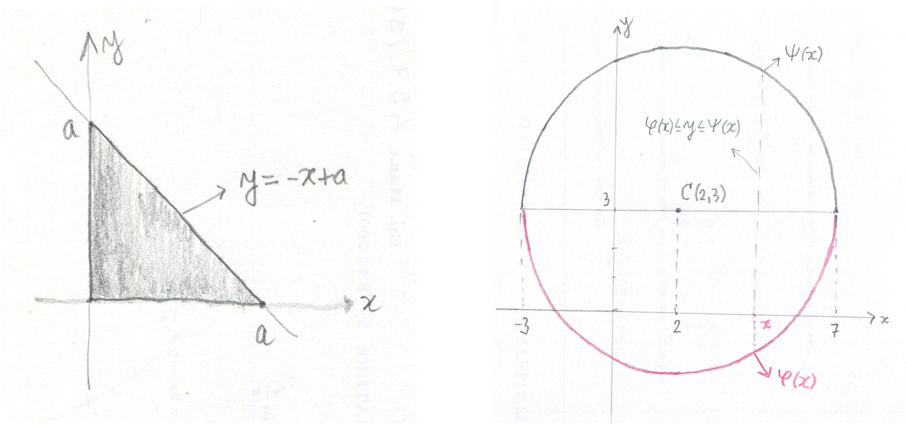
$$A = \{(x, y) \ : \ x \geq 0\}, \quad B = \{(x, y) \ : \ y \geq 0\}, \quad C = \{(x, y) \ : \ y \leq -x + a\}.$$

Скуп A је приказан на сл.1, лево. На истој слици су и скуп B (у средини) и скуп C (десно). Њихов пресек је приказан на сл.2, лево.



Сл. 1: Скупови A, B и C

2.2. Нека је $A \subset \mathbb{R}^2$ круг с центром у тачки $C(2, 3)$ и полупречником дужине 5. Тачке скупа A описати неједнакостима типа $a \leq x \leq b$ и $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$.



Сл. 2: Фигура из зад.2.1 (лево) и графици функција φ и ψ из зад.2.2 (десно)

Решење. Једначина кружнице (границе скупа A)

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

може да се напише и у облику

$$y = 3 \pm \sqrt{21 + 4x - x^2},$$

при чему је горња полукружница одређена знаком плус, а доња знаком минус. Тачке пречника који је паралелан x-оси су $(-3, 3)$ и $(7, 3)$.

Према томе, за $-3 \leq x \leq 7$ имамо да је $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, где је

$$\varphi(x) = 3 - \sqrt{21 + 4x - x^2}, \quad \psi(x) = 3 + \sqrt{21 + 4x - x^2}.$$

Задаци за самосталан рад

У следећим задацима дати скуп представити геометријски.

2.3. $\{(x,y)\ :\ |x|<1,\ |y|<1\}$

2.4. $\{(x,y)\ :\ |x|+|y|<1\}$.

2.5. $\{(x,y)\ :\ |x|+2|y|\le 3\}$.

2.6. $\{(x,y)\ :\ (x^2+y^2-1)(9-x^2-y^2)>0\}$.

2.7. $\{(x,y)\ :\ \sin^2\pi x+\sin^2\pi y=0\}$.

2.8. $\{(x,y)\ :\ \sin\pi x\cdot\sin\pi y=0\}$.

2.9. $\{(x,y)\ :\ x^2-6x+y^2-8y\le 0,\ x^2-2x+y^2+4y-35\le 0\}$.

2.10. $\{(x,y)\ :\ 0\le y\le 1,\ y\le x\le\sqrt{y}\}$.

2.11. $\{(x,y)\ :\ 0\le y\le 2,\ y\le x\le\sqrt{2+y-y^2}\}$.

2.12. Скуп тачака које ограничава четвороугао одређен правама $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$ и $6x-4y+2=0$ описати неједнакостима типа $a\le x\le b$ и $\varphi(x)\le y\le\psi(x)$.

2.13. Скуп тачака које ограничава четвороугао одређен правама $y=x$, $y=x+3$, $y=-2x+1$ и $y=-2x+5$ описати неједнакостима типа $a\le x\le b$ и $\varphi(x)\le y\le\psi(x)$.

2.14. Навести пример метрике у $\mathbb{R}^2$ за коју постоје две једнаке кугле са истим центром и различитим полупречницима.

2.15. Да ли постоји подскуп од $\mathbb{R}^2$ који са еуклидском метриком чини метрички простор и у којем постоје две једнаке кугле са истим центром и различитим полупречницима?

2.16. Доказати да је у случају дискретне метрике $B(a,r)=\{a\}$ за свако $r\in(0,1]$ и $B(a,r)=\mathbb{R}^2$ за свако $r>1$.

Сл. 3: Јединичне кугле у d_1 и $d_{3/2}$ метрици

2.17. Доказати да је у случају метрике d_1 јединични отворен диск дат са

$$B(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ |x|+|y|<1\}$$

(видети сл.3, лево).

2.18. Доказати да је случају метрике $d_{3/2}$ јединични отворен диск дат са

$$B(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ |x|^{3/2}+|y|^{3/2}<1\}$$

(видети сл.3, десно).

2.19. Доказати да је случају метрике d_3 јединични отворен диск дат са

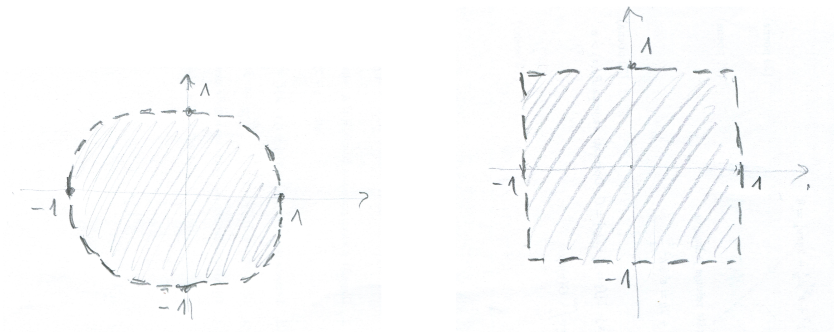
$$B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x|^3 + |y|^3 < 1\}$$

(видети сл.4, лево).

2.20. Доказати да је случају метрике d_∞ јединични отворен диск дат са

$$B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$

(видети сл.4, десно).



Сл. 4: Јединичне кугле у d_3 и d_∞ метрици

2.21. Доказати да функција $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$d(x,y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |x_1 + y_2 - x_2 - y_1|\},$$

где је $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$, дефинише метрику у $\mathbb{R}^2$ и одредити скуп тачака у равни који представља геометријску интерпретацију отвореног диска $B(0,1)$.

2.22. Доказати да је са $||x|| = |x_1| + |x_2|/2$, за $x = (x_1, x_2)$, дефинисана норма у $\mathbb{R}^2$ и одредити скуп тачака у равни који представља геометријску интерпретацију диска $B[0,1]$ у односу на метрику одређену овом нормом.

2.23. Навести пример непразних скупова $A, B \subset \mathbb{R}^2$ и метрике d за које важи

$$d(A,B) \neq 0, \quad d_2(A,B) = 0.$$

2.24. Доказати да за непразне подскупове $A, B \in \mathbb{R}^2$ важи

$$d(A,B) = \inf\{d(x,B) \ : \ x \in A\} = \inf\{d(y,A) \ : \ y \in B\}.$$

2.25. Доказати да за сваки непразан скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ и свако $x, y \in \mathbb{R}^2$ важи

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

3 Отворени и затворени скупови у $\mathbb{R}^2$

Еуклидски (метрички) простор $\mathbb{R}^2$, као и било који метрички простор $(\mathbb{R}^2, d)$, може се даље уопштити до тополошког простора увођењем појма отвореног скупа.

Нека је $\varepsilon > 0$. За $a \in \mathbb{R}^2$ кугла $B(a,\varepsilon)$ је *ε-околина тачке a* и означава се и са $U_\varepsilon(a)$. Тачка a скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ је *унутрашња тачка* скупа A ако постоји ε-околина тачке a која цела припада скупу A. *Унутрашњост* или *интериор* скупа A је скуп свих унутрашњих тачака скупа A и означава се са A° или са $int(A)$. *Спољашњост* или *екстериор* скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ је унутрашњост скупа A^c и означава се са $ext(A)$. Непразан скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ је *отворен* ако је свака његова тачка унутрашња, а празан скуп је такође отворен. Фамилија свих отворених скупова у $\mathbb{R}^2$ је *тополошка структура* или *топологија*[6] на $\mathbb{R}^2$. Скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ је *затворен* ако је његов комплемент отворен скуп. *Околина тачке* $a \in \mathbb{R}^2$ је сваки отворен скуп који садржи тачку a. На пример, отворен скуп је околина сваке своје тачке.

Тачка $a \in \mathbb{R}^2$ је *гранична тачка* скупа A ако свака ϵ-околина тачке a садржи и тачке скупа A и тачке које не припадају скупу A. Скуп свих граничних тачака скупа A је *граница* или *руб* скупа A и означава се са $\partial(A)$ или са $bd(A)$ или са $fr(A)$. Граница кугли $B(a, \varepsilon)$ (или ε-околине $U_\varepsilon(a)$) и $B[a, r]$ је кружница с центром у тачки a и полупречником ε. Граница и отвореног правоугаоника $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ и затвореног правоугаоника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ је скуп

$$\{a_1\} \times [a_2, b_2] \cup \{b_1\} \times [a_2, b_2] \cup \{a_2\} \times [a_1, b_1] \cup \{b_2\} \times [a_1, b_1].$$

Унутрашњост, спољашњост и граница скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ чине једну партицију скупа $\mathbb{R}^2$. Унутрашњост и спољашњост скупа A су отворени скупови, а граница је затворен скуп.

Тачка a је *тачка нагомилавања скупа* $A \subset \mathbb{R}^2$ ако се у свакој околини тачке a налази још једна тачка скупа A, различита од a. Скуп свих тачака нагомилавања скупа A је *изводни скуп скупа* A и означава се са A' или са $A^{(1)}$. Скуп A' такође има своје тачке нагомилавања, а скуп свих тих тачака означавамо са A'' или са $A^{(2)}$. Аналогно се дефинише скуп $A^{(n)}$ као скуп свих тачака нагомилавања скупа $A^{(n-1)}$.

Тачка a је *адхерентна тачка скупа* $A \subset \mathbb{R}^2$ ако у свакој околини тачке a постоји бар једна тачка скупа A. Скуп свих адхерентних тачака скупа A је *адхеренција скупа* A или *затворење*[7] *скупа* A и означава се са $\overline{A}$ или са $cl(A)$ или са $[A]$.

Скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ је *савршен* или *перфектан* ако је $A = A'$. Сваки савршен скуп је затворен. Тачка која припада скупу $A \subset \mathbb{R}^2$, а није тачка нагомилавања тог скупа је *изолована тачка скупа* A.

Околина скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ је сваки отворен скуп који садржи скуп A. Скуп $\mathbb{R}^2$ је околина сваког скупа из $\mathbb{R}^2$.

Скуп A је *свуда густ* у $\mathbb{R}^2$ ако је $cl(A) = \mathbb{R}^2$. За $A, B \in \mathbb{R}^2$, скуп A је *свуда густ у скупу* B ако је $B \subset cl(A)$. Скуп $A \in \mathbb{R}^2$ је *нигде густ* ако је $int(cl(A)) = \emptyset$.

Ако за сваке две тачке скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ дуж која их спаја цела припада том скупу, кажемо да је скуп *конвексан*. Једночлан скуп и празан скуп су такође конвексни скупови. Пресек свих конвексних скупова B за које важи $A \subset B$ је *конвексни омотач скупа* A.

Ако сваке две тачке скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ могу да се споје изломљеном линијом која цела припада том скупу, кажемо да је то *линеарно повезан скуп* или *путно повезан скуп*. Скуп који се састоји од једне тачке је такође линеарно повезан.

Скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ је *област у* $\mathbb{R}^2$ ако је отворен и линеарно повезан скуп. На пример, сваки отворен конвексан скуп је област. Специјално, отворен круг и отворен интервал (правоугаоник) су области у $\mathbb{R}^2$. Затворење области је *затворена област*.

У примерима и задацима који следе подразумева се да је метрика у $\mathbb{R}^2$ еуклидска, осим ако није посебно наглашено да је реч о некој другој метрици. Наравно, за свако тврђење које се односи на еуклидску метрику може се поставити питање да ли важи

[6] Скуп $\mathbb{R}^2$ са овом топологијом чини *тополошки простор*.

[7] Користе се још и појмови *затварање скупа* A и *затварач скупа* A

и у еквивалентној метрици или у било којој метрици, односно да ли постоји метрика у којој дато тврђење не важи.

Решени примери

3.1. Нека је $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Доказати да A није ни отворен, ни затворен скуп.

Решење. Пошто је $int(A) = \emptyset$ и $cl(A) = fr(A) = A \cup \{(0,0)\}$, то је $int(A) \neq A \neq cl(A)$, што значи да скуп A није ни отворен, ни затворен.

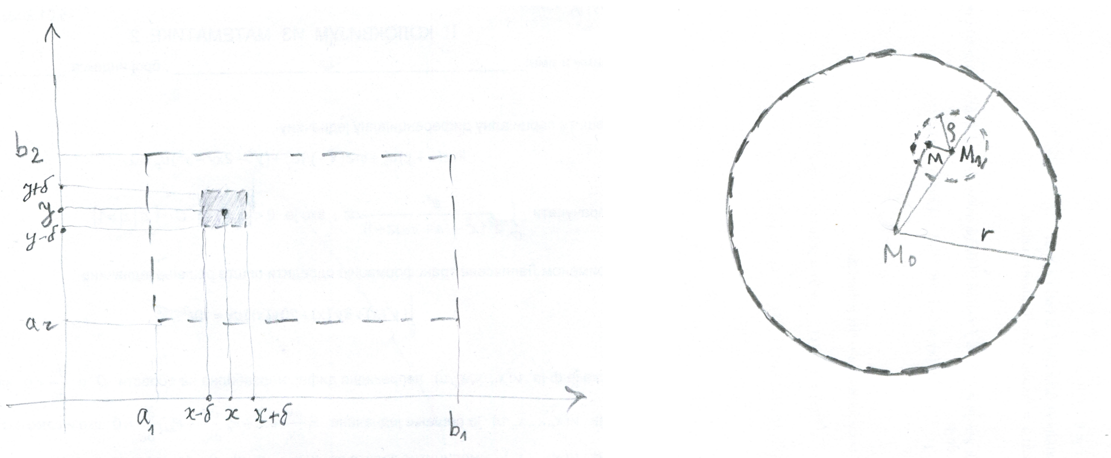
3.2. Доказати да је отворени правоугаоник отворен скуп у односу на метрику d_1.

Решење. Доказаћемо да је свака тачка отвореног правоугаоника унутрашња. Ако је (x, y) тачка отвореног правоугаоника $\Pi = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, то значи да је $a_1 < x < b_1$ и $a_2 < y < b_2$. Пошто постоји $\delta > 0$ такво да је

$$a_1 < x - \delta < x < x + \delta < b_1, \quad a_2 < y - \delta < y + \delta < b_2,$$

имамо δ-околину (у смислу метрике d_1) тачке (x, y) која цела припада отвореном правоугаонику Π (сл.5, лево).

Према томе, тачка (x, y) је унутрашња тачка правоугаоника Π.



Сл. 5: Отворени скупови

3.3. Доказати да је отворен круг отворен скуп.

Решење. Докажимо да је свака тачка M_1 отвореног круга $K(M_0, r)$ унутрашња. Ако је $0 < \rho < r - d(M_0, M_1)$ и ако је M било која тачка круга $K(M_1, \rho)$ (сл.5, десно), тада је

$$d(M_0, M) \leq d(M_0, M_1) + d(M_1, M) = d(M_0, M_1) + \rho < d(M_0, M_1) + r - d(M_0, M_1) = r.$$

То значи да ρ-околина (у смислу метрике d_2) тачке M_1 цела припада отвореном кругу $K(M_0, r)$.

Према томе, тачка M_1 је унутрашња тачка отвореног круга $K(M_0, r)$.

3.4. Доказати да је скуп $A \in \mathbb{R}^2$ затворен ако и само ако садржи све своје тачке нагомилавања.

Решење. Претпоставимо да је A затворен скуп и да је $(x, y) \in A^c$. Како је A^c отворен скуп, постоји околина тачке (x, y) која цела припада скупу A^c, што значи да (x, y) није тачка нагомилавања скупа A. Према томе, све тачке нагомилавања скупа A су у скупу A.

Претпоставимо сада обратно, да скуп A садржи све своје тачке нагомилавања и да је $(x, y) \in A^c$. Пошто (x, y) није тачка нагомилавања скупа A, постоји њена околина која нема заједничких тачака са скупом A, односно која цела припада скупу A^c. Према томе, скуп A^c је отворен, а скуп A је затворен.

3.5. За скуп $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ одредити унутрашњост, затворење и скуп свих тачака нагомилавања.

Решење. Скуп A је отворен круг, што значи да је то отворен скуп (видети задатак 3.3). Према томе, $int(A) = A$. Скуп свих тачака нагомилавања је затворен круг $K[(0, 0), 1]$, а то је такође и затворење скупа A (јер скуп A нема изолованих тачака).

Задаци за самосталан рад

3.6. Доказати да је скуп $A \in \mathbb{R}^2$ отворен ако и само ако је $int(A) = A$.

3.7. Доказати да је скуп тачака $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ за које важи $x > 0$, $y > 0$ и $x + y < 1$ отворен скуп у $\mathbb{R}^2$.

3.8. Доказати да је скуп $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy < 1\}$ отворен скуп у $\mathbb{R}^2$.

3.9. Нека су U и V отворени скупови у $\mathbb{R}$. Доказати да је $U \times V$ отворен скуп у $\mathbb{R}^2$.

3.10. Доказати да је $U \times \mathbb{R}$ отворен скуп у $\mathbb{R}^2$ ако је U отворен скуп у $\mathbb{R}$.

3.11. Доказати да су метрике m_1 и m_2 у $\mathbb{R}^2$ еквивалентне ако и само ако свака околина произвољне тачке $x \in \mathbb{R}^2$ у метрици m_1 садржи неку околину тачке x у метрици m_2 и обратно.

3.12. Доказати да у $\mathbb{R}^2$ еуклидска и дискретна метрика нису еквивалентне.

3.13. Доказати да су у $\mathbb{R}^2$ еуклидска и Менхетн метрика еквивалентне.

3.14. Доказати да су у $\mathbb{R}^2$ еуклидска и Чебишевљева метрика еквивалентне.

3.15. Нека су m_1 и m_2 еквивалентне метрике у $\mathbb{R}^2$ и нека је скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ отворен скуп у односу на метрику m_1. Доказати да је скуп A отворен скуп и у односу на метрику m_2.

3.16. Доказати да је отворени правоугаоник отворен скуп.

3.17. Доказати да је пресек коначно много отворених скупова у $\mathbb{R}^2$ такође отворен скуп.

3.18. Навести пример отворених скупова у $\mathbb{R}^2$ чији пресек није отворен скуп.

3.19. Доказати да је свако отворен круг у $\mathbb{R}^2$ унија отворених правоугаоника.

3.20. Доказати да је сваки отворен правоугаоник у $\mathbb{R}^2$ унија отворених кругова.

3.21. Доказати да је унутрашњост скупа унија свих отворених подскупова тог скупа.

3.22. Доказати да метрике d_1, d_2 и d_∞ у $\mathbb{R}^2$ генеришу исте фамилије отворених скупова[8].

3.23. Нека је $A \subset \mathbb{R}^2$ непразан отворен скуп различит од $\mathbb{R}^2$ и нека је $a \in A$. Доказати да међу отвореним круговима с центром у тачки a, који припадају скупу A, постоји највећи круг (са највећим полупречником).

3.24. Доказати да је скуп тачака $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ за које важи $y \geq x^2$ затворен скуп у $\mathbb{R}^2$.

3.25. Доказати да је $cl(A)$ затворен скуп за сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$.

3.26. Доказати да је $fr(A)$ затворен скуп за сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$.

3.27. Доказати да је A' затворен скуп за сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$.

3.28. Доказати да је скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ савршен ако и само ако је затворен и нема изолованих тачака.

3.29. Да ли је скуп $\mathbb{Q}^2$ затворен скуп у $\mathbb{R}^2$?

3.30. Навести пример затворених скупова у $\mathbb{R}^2$ чија унија није затворен скуп.

3.31. Нека су m_1 и m_2 еквивалентне метрике у $\mathbb{R}^2$ и нека је скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ затворен скуп у односу на метрику m_1. Доказати да је скуп A затворен скуп и у односу на метрику m_2.

3.32. Доказати да у свакој околини тачке нагомилавања скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ има бесконачно много тачака из A.

3.33. Доказати да је скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ затворен ако и само ако садржи све своје граничне тачке.

3.34. Доказати да за сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ важи $cl(A) = A \cup A'$.

3.35. Одредити A' ако је $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 = sin\dfrac{1}{x_1}\right\}$.

3.36. Да ли свака гранична тачка неког скупа из $\mathbb{R}^2$ мора да буде и његова тачка нагомилавања?

3.37. Да ли свака околина граничне тачке неког скупа из $\mathbb{R}^2$ мора да садржи и неку тачку унутрашњости и неку тачку спољашњости тог скупа?

3.38. Одредити границу скупа $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \ : \ x, y \in \mathbb{Q}\}$.

3.39. Одредити $fr(A)$ и $int(A)$ ако је $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x \in \mathbb{Q}\}$.

3.40. Одредити све тачке нагомилавања скупа $\{(1/m, 1/n) \ : \ m, n \in \mathbb{N}\}$.

3.41. Одредити скуп A' ако је $A = \{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{Q}, \ y \notin \mathbb{Q}\}$.

3.42. Одредити скуп A ако је $A' = \{(m, n) \ : \ m, n \in \mathbb{N}\}$.

3.43. Одредити скуп $A' \setminus A$ ако је $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 49, \ y \geq x^2 + 1\}$.

3.44. Доказати да је скуп који нема тачака нагомилавања затворен.

[8] То значи да ове метрике одређују једну исту топологију простора $\mathbb{R}^2$.

3.45. Доказати да за сваки скуп $A \in \mathbb{R}^2$ важи $fr(A) = (int(A) \cup ext(A))^c$.

3.46. Доказати да за сваки скуп $A \in \mathbb{R}^2$ важи $fr(A) = cl(A) \cap cl(A^c)$.

3.47. Доказати да је $fr(A)$ затворен скуп за сваки скуп A из $\mathbb{R}^2$.

3.48. Доказати да за сваки затворен скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ важи $fr(fr(A)) = fr(A)$.

3.49. Доказати да за сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ важи

$$fr(fr(fr(A))) = fr(fr(A)) \subset fr(A).$$

3.50. Да ли за сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ важи $int(cl(A)) = A$?

3.51. Да ли за сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ важи $cl(int(A)) = A$?

3.52. Да ли постоји скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ чије су све тачке изоловане и за који важи $A' \neq \emptyset$?

3.53. Да ли постоји непребројив скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ чије су све тачке изоловане?

3.54. Нека је A отворен, а B затворен скуп у $\mathbb{R}^2$. Доказати да је $A \setminus B$ отворен, а $B \setminus A$ затворен скуп.

3.55. Нека је $a \subset \mathbb{R}^2$ и нека је d нека метрика у $\mathbb{R}^2$. Доказати да $x \in cl(A)$ ако и само ако је $d(x, A) = 0$.

3.56. Доказати да је скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ затворен ако и само ако за свако $x \notin A$ важи $d(x, A) > 0$.

3.57. Нека за неко $\varepsilon > 0$ важи $d(x, y) \geq \varepsilon$ за свако $x, y \in A \subset \mathbb{R}^2$. Доказати да скуп A нема тачака нагомилавања.

У следећим задацима за дати скуп A одредити унутрашњост $(int(A))$, скуп свих тачака нагомилавања (A') и затворење $(cl(A))$ скупа A.

3.58. $A = \left\{(x, x^2) \ : \ x \in \mathbb{Q}\right\}$.

3.59. $A = \left\{\left(\dfrac{m}{n}, \dfrac{n}{m}\right) \ : \ m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

3.60. Доказати да је затворење скупа пресек свих затворених скупова који садрже тај скуп.

3.61. Навести пример непразног скупа у $\mathbb{R}^2$ чија је унутрашњост празан скуп.

3.62. Одредити унутрашњост скупа $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3.63. Да ли постоји непребројив скуп у $\mathbb{R}^2$ чија је унутрашњост празан скуп?

3.64. Нека је $A = \left\{(x, y) \mid x^2 < y < x\right\}$. Доказати да је скуп A отворен и одредити његову границу.

3.65. Утврдити да ли је $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ отворен или затворен скуп.

3.66. Нека је

$$A = \left\{\left(m + \frac{1}{p}, n + \frac{1}{q}\right) \mid m, n \in \mathbb{Z}, \ p, q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}.$$

Доказати да A није ни отворен, ни затворен скуп.

3.67. Кугла $B(a,r)$ је *рационална кугла* ако је $r \in \mathbb{Q}$ и ако је $a \in \mathbb{Q}^2$. Доказати да је сваки отворен скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ унија пребројиво много рационалних кугли.

3.68. Доказати да је свака фамилија отворених и дисјунктних скупова у $\mathbb{R}^2$ пребројива.

3.69. Доказати да за сваке две различите тачке a и b из $\mathbb{R}^2$ постоје дисјунктни отворени скупови A и B, такви да је $a \in A$ и $b \in B$.

3.70. Нека је $\mathcal{P}$ фамилија свих непразних подскупова из $\mathbb{R}^2$ и нека је

$$d(A,B) = \inf\{d_2(x,y) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Испитати да ли је $(\mathcal{P}, d)$ метрички простор.

3.71. Да ли за сваку тачку $x \in \mathbb{R}^2$ и сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ важи $d(x,A) = d(x, cl(A))$?

3.72. Да ли за сваку тачку $x \in \mathbb{R}^2$ и сваки скуп $A \subset \mathbb{R}^2$ важи $d(x,A) = d(x, int(A))$?

3.73. Да ли за свака два скупа $A, B \subset \mathbb{R}^2$ важи

$$d(A,B) = d(A, cl(A)) = d(cl(A), B) = d(cl(A), cl(B))\,?$$

3.74. Израчунати растојање између скупа $\{(x,0)\ :\ x \in \mathbb{R}\}$ и скупа $\{(x,e^x)\ :\ x \in \mathbb{R}\}$.

3.75. Израчунати $d(A,B)$ ако је

$$A = \{(x_1,x_2)\ :\ x_2 = x_1^2\}, \quad B = \{(x_1,x_2)\ :\ x_2 = x_1 - 2\}.$$

3.76. Израчунати $d(X,Y)$ ако је

$$X = \{(x_1,x_2)\ :\ x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}, \quad Y = \{(x_1,x_2)\ ;\ x_1 + 2\sqrt{3}x_2 =\}.$$

3.77. Да ли за свака два скупа $A, B \subset \mathbb{R}^2$ важи $d(A,B) = d(int(A), int(B))$?

3.78. Нека је A скуп из $\mathbb{R}^2$ и нека је $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Доказати да је скуп $\cup_{a \in A} O_\varepsilon(a)$ једна околина скупа A.

3.79. Доказати да је скуп $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ свуда густ у $\mathbb{R}^2$, као и у скупу $I \times I$ (I је скуп ирационалних бројева).

3.80. Доказати да је скуп $I \times I$ свуда густ у скупу $\mathbb{R}^2$, као и у скупу $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3.81. Доказати да је скуп $A \cup B$ нигде густ ако су скупови $A, B \in \mathbb{R}^2$ нигде густи.

3.82. Доказати да је $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ нигде густ скуп у $\mathbb{R}^2$.

3.83. Навести пример нигде густих скупова чија унија је свуда густ скуп у $\mathbb{R}^2$.

3.84. Доказати да је унија линеарно повезаних скупова, који имају заједничку тачку, такође линеарно повезан скуп.

3.85. Доказати да је скуп $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ област у $\mathbb{R}^2$.

3.86. Да ли је скуп $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ x_1^2 + x_2^2 \neq 1\}$ област у $\mathbb{R}^2$?

3.87. Да ли је скуп $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ 4 < x_1^2 + x_2^2 < 9,\ -2 < y < 2\}$ област у $\mathbb{R}^2$?

3.88. Доказати да је унија две области у $\mathbb{R}^2$ са непразним пресеком такође област.

3.89. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ области у $\mathbb{R}^2$ и нека је $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ за $i \neq j$. Доказати да је $\cup_{k=1}^{n} A_k$ област у $\mathbb{R}^2$.

3.90. Да ли постоји област чије затворење није линеарно повезан скуп?

3.91. Доказати да је пресек конвексних скупова такође конвексан скуп.

3.92. Одредити конвексан омотач скупа од три неколинеарне тачке у равни.

3.93. Одредити конвексан омотач скупа $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 = x_2^2\}$.

3.94. Доказати да је конвексни омотач отвореног скупа у $\mathbb{R}^2$ такође отворен скуп.

3.95. Да ли постоји затворен скуп у $\mathbb{R}^2$ чија конвексни омотач није затворен скуп?

4 Низови у $\mathbb{R}^2$

Низ (a_n) тачака у $\mathbb{R}^2$ конвергира ка тачки $a \in \mathbb{R}^2$ ако се у свакој околини тачке a налазе скоро сви чланови низа (сви осим коначно много првих чланова). Другим речима, низ (a_n) конвергира ка a ако за сваку околину $U(a)$ тачке a постоји индекс $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $a_n \in U(a)$ за свако $n > n_0$.

За конвергентан низ (a_n) пише се $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или само $\lim a_n = a$ (подразумева се да $n \to \infty$). Може, такође, да се пише и $a_n \to a$ када $n \to \infty$ или $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

Низ (a_n) у $\mathbb{R}^2$ је *Кошијев низ* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс n_0, такав да за свако $m, n > n_0$ важи $d(a_m, a_n) < \varepsilon$. У еуклидском простору $\mathbb{R}^2$, као и у случају низова у $\mathbb{R}$, важи да је низ конвергентан ако и само ако је Кошијев. Међутим, у општем случају то не мора да важи. У сваком метричком простору (M, d), где је $M \subset \mathbb{R}^2$ конвергентан низ јесте Кошијев, али обратно не мора да важи. Ако је у метричком простору (M, d) сваки Кошијев низ конвергентан, каже са да је (M, d) *комплетан метрички простор*. Дакле, еуклидски простор $\mathbb{R}^2$ је комплетан[9] метрички простор.

У примерима и задацима који следе подразумева се да је метрика у $\mathbb{R}^2$ еуклидска, мада нека тврђења важе и у случају било које метрике у $\mathbb{R}^2$. Уколико се тврђење односи на неку другу метрику, то ће бити посебно наглашено.

Решени примери

4.1. Доказати да низ (a_n) из $\mathbb{R}^2$ конвергира ка тачки $a \in \mathbb{R}^2$ ако и само ако $d(a_n, a) \to 0$ када $n \to \infty$.

Решење. Нека је $c_n = d(a_n, a)$. Тврђење следи из дефиниције граничне вредности низа (a_n) (у $\mathbb{R}^2$), граничне вредности низа (c_n) (у $\mathbb{R}$) и чињенице да $a_n \in U_\varepsilon(a)$ ако и само ако $c_n \in U_\varepsilon(0)$.

4.2. Доказати да је гранична вредност низа у $\mathbb{R}^2$ јединствена.

Решење. Нека је (a_n) низ у $\mathbb{R}^2$. Ако $a_n \to a$ и $a_n \to b$ када $n \to \infty$, тада из неједнакости

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b)$$

следи да је $d(a, b) = 0$. Према својству метрике, то значи да је $a = b$.

[9] Комплетан нормиран векторски простор је *Банахов простор*.

4.3. Доказати да је скуп $A \in \mathbb{R}^2$ затворен ако и само ако за сваки конвергентан низ тачака (a_n) скупа A важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$.

Решење. Нека је A затворен скуп и нека је низ тачака (a_n) скупа A конвергентан. Ако је $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, тада за свако $\varepsilon > 0$ у околини $O_\varepsilon(a)$ има бесконачно много тачака скупа A. То значи да је $a \in cl(A)$. Како је $A = cl(A)$ (јер је A затворен скуп, то је $a \in A$.

Докажимо да важи и обратно тврђење. Претпоставимо да за сваки конвергентан низ тачака (a_n) скупа A важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$. Ако је $a \in cl(A)$, тада у околини $O_\varepsilon(a)$ постоји тачка a_1 скупа A, различита од a. Изаберимо сада ε_1 тако да је $\varepsilon_1 = d(a, a_1)/2$. Тада у околини $O_{\varepsilon_1}(a)$ постоји тачка a_2 скупа A, различита од a (наравно, она је различита и од a_1). Сада за $\varepsilon_2 = d(a, a_2)/2$ постоји тачка a_3 различита од a (и од a_1 и од a_2). Настављајући овај поступак добијамо низ различитих тачака скупа A који конвергира ка a. Како гранична вредност по претпоставци припада скупу A, то значи да скуп A садржи све тачке из $cl(A)$. Према томе, скуп A је затворен.

Други доказ за први део тврђења (неопходан услов). Нека је A затворен скуп, нека је $a_n \in A$ и нека је $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Треба доказати да $a \in A$. Ако претпоставимо супротно (да $a \in A^c$), тада постоји околина $U(a)$ таква да је $U \subset A^c$ (јер је A^c отворен скуп) и у тој околини су скоро сви чланови низа (a_n) (јер је a гранична вредност тог низа). Међутим, то није могуће јер скоро сви чланови низа (a_n) припадају скупу A. Према томе, полазна претпостака није добро, што значи да $a \in A$.

4.4. Нека су (x_n) и (y_n) два конвергентна низа и нека је d било која метрика у $\mathbb{R}^2$. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n).$$

Решење. Ако је $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, тада је

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

То значи да за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$d(x_n, y_n) < d(x, y) + 2\varepsilon$$

за довољно велико n. Слично се показује да важи и

$$d(x, y) < d(x_n, y_n) + 2\varepsilon.$$

Из ове две неједнакости следи да је

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < 2\varepsilon$$

за довољно велико n. Према томе, $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ када $n \to \infty$.

Напомена. Ако користимо неједнакости из зад.1.28, имамо да је

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0$$

за $n \to \infty$.

Задаци за самосталан рад

4.5. Ако је (a_n) конвергентан низ и d било која метрика у $\mathbb{R}^2$, доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b) = d(\lim_{n\to\infty} a, b)$$

за свако $b \in \mathbb{R}^2$.

4.6. Нека је $a = (x, y)$ и $a_n = (x_n, y_n)$ за $\in \mathbb{N}$. Доказати да низ (a_n) конергира ка a ако и само ако[10] низ (x_n) конвергира ка x и низ (y_n) конвергира ка y.

4.7. Нека је (a_n) низ у $\mathbb{R}^2$ који конвергира ка тачки a. Доказати да сваки његов подниз такође конвергира ка тачки a.

4.8. Доказати да је сваки конвергентан низ у $\mathbb{R}^2$ Кошијев.

4.9. Доказати да је сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}^2$ ограничен.

4.10. Доказати да је $\mathbb{R}^2$ са дискретном метриком комплетан метрички простор.

4.11. Доказати да је $\mathbb{R}^2$ са метриком d_p за свако $p \in (1, +\infty)$ комплетан метрички простор.

4.12. Нека је (x_n) Кошијев низ у $\mathbb{R}^2$ који има конвергентан подниз (y_n). Доказати да је и низ (x_n) конергентан и да конвергира истој тачки којој конвергира подниз (y_n).

4.13. Доказати да је сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}^2$ конвергентан[11].

4.14. Нека је (x_n) конвергентан низ различитих тачака из $\mathbb{R}^2$ и нека је X скуп вредности тог низа. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

где је $f : X \to X$ инјекција.

4.15. Нека су (a_n) и (b_n) два Кошијева низа у $\mathbb{R}^2$ (са метриком d) и нека је $x_n = d(a_n, b_n)$. Доказати да је низ (x_n) конвергентан.

4.16. Нека је A затворен скуп у метричком простору $\mathbb{R}^2$ у односу на неку метрику d и нека је $x \in \mathbb{R}^2$. Доказати да је $x \in A$ ако и само ако је $d(x, A) = 0$.

4.17. Доказати да је a тачка нагомилавања скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ ако и само ако постоји низ различитих тачака $a_n \in A$ који конвергира ка a.

4.18. Доказати да је a адхерентна тачка $A \subset \mathbb{R}^2$ ако и само ако постоји низ тачака $a_n \in A$ који конвергира ка a.

4.19. Нека је a гранична тачка скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ која није изолована тачка тог скупа. Доказати да постоји низ међусобно различитих тачака скупа A који конвергира ка тачки a.

[10] Ово значи да је конвергенција низа у $\mathbb{R}^2$ еквивалентна конвергеницији низова његових координата, што не мора да важи у неком другом метричком простору.

[11] Ово не важи у сваком метричком простору. На пример, у метричком простору $\mathbb{Q}$ низ који конвергира ка $\sqrt{2}$ је Кошијев, али није конвергентан у $\mathbb{Q}$. Простори у којима ово тврђење важи су *комплетни простори*. Из тврђења следи да је $\mathbb{R}^2$ комплетан метрички простор.

4.20. Нека су m_1 и m_2 еквивалентне метрике у $\mathbb{R}^2$ и нека је тачка $a \in \mathbb{R}^2$ гранична вредност низа (a_n) у метрици m_1. Доказати да је a гранична вредност тог низа и у метрици m_2.

4.21. Дата је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, таква да за неку метрику d и за свако $x, y \in \mathbb{R}^2$ важи[12]

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y),$$

где је $0 < q < 1$. Доказати да једначина $x = f(x)$ има јединствено решење[13] у $\mathbb{R}^2$.

Литература

[1] Стојановић, М., Михић, О., *Математика 2*, ФОН, Београд, 2013.

[2] Ђорић, Д., Лазовић, Р. *Математика 1*, ФОН, Београд, 2014.

[12] Функција f са овим својством је *контракција* на метричком простору $(\mathbb{R}^2, d)$.

[13] Решење x ове једначине је *непокретна тачка функције* f, а аналогно тврђење важи и у било ком комплетном метричком простору.