МАТЕМАТИКА 3

Драган Ђорић

109 задатака са решењима

За студенте генерације 2015

Драган С. Ђорић

МАТЕМАТИКА 3

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Глава 6
Лапласова трансформација

Факултет организационих наука
Београд, 2009.

6 ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

6.1 Дефиниција и основна својства

Лапласова слика

384. Нека је $f(t)=n$ за $n\le t<n+1$ $(n=0,1,\ldots)$ и нека је $g(t)=t^2$ за $t\ge 0$. Доказати да за функције f и g постоје Лапласове слике.

Решење: Функције f и g припадају класи $E(1)$, па су Лапласове слике за њих дефинисане за свако s за које је $Re(s)>1$.

385. Доказати да функција $f:\ t\ \mapsto e^{t^2}$ нема Лапласову слику.

Решење: Како је

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}dt=\int_0^\infty e^{t^2-st}dt$$

и како, за свако s,

$$e^{t^2-st}\to\infty\quad(t\to\infty),$$

то Лапласова слика функције f не постоји.

386. Испитати да ли $f:\ t\ \mapsto \dfrac{1}{t}$ има Лапласову трансформацију.

Решење: Нека је $I=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. Пошто је $e^{-st}f(t)\sim\dfrac{1}{t}$ $(t\to 0)$, то је интеграл I дивергентан за свако s. Према томе, функција f нема Лапласову трансформацију.

387. Доказати да за функцију $f:\ t\ \mapsto sin\dfrac{1}{t}$ постоји Лапласова трансформација.

Решење: Нека је $I=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. Како је

$$\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt=\int_0^\infty e^{-st}\left|sin\frac{1}{t}\right|dt\le\int_0^\infty e^{-st}dt$$

и како последњи интеграл конвергира за $Re(s)>0$, то важи и за интеграл I. Према томе, за функцију f постоји Лапласова слика, а самим тим и трансформација.

388. Испитати да ли $f:\ t\ \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ има Лапласову трансформацију.

Решење: Нека је $I(s) = \int_0^\infty e^{-st}\dfrac{dt}{\sqrt{t}}$. Како је

$$I(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

и како је $e^{-t^2} < \dfrac{1}{1+t^2}$, интеграл $I(1)$ конвергира. Према томе, $I(s)$ конвергира за свако s за које је $Re(s) > 1$, што значи да за функцију f постоји Лапласова трансформација.

Напомена: Функција f није експоненцијалног раста јер $f(t) \to \infty$ кад $t \to 0_+$.

389. Нека је F Лапласова слика функције f која припада класи $E(a)$ за $a > 0$. Доказати да је $\lim\limits_{Re(s)\to+\infty} F(s) = 0$.

Решење: Како је $f \in E(a)$, то је $|f(t)| \le Me^{at}$, па је

$$|F(s)| \le \int_0^\infty |e^{-st}f(t)|dt \le M\int_0^\infty |e^{-(Re(s)+iIm(s))t}|e^{at}dt \le M\int_0^\infty e^{(a-Re(s))t}.$$

Према томе,

$$|F(s)| \le \frac{M}{Re(s)-a} \to 0 \quad (Re(s) \to +\infty).$$

390. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx^2}dx$.

Решење: На основу дефиниције Лапласове слике је

$$F(s) = \int_0^\infty \left(e^{-st}\int_0^\infty e^{-tx^2}dx\right)dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-t(s+x^2)}dt\right)dx = \int_0^\infty \frac{dx}{s+x^2},$$

где је $F = L[f]$. Дакле, $F(s) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{s}}$.

Слика сличног оригинала. Линеарност.

391. Користећи Лапласову слику за функцију $f : t \mapsto e^t$ одредити Лапласове слике за функције $g : t \mapsto e^{at}$ $(a \in R)$ и $h : t \mapsto a^t$ $(a \in R_+)$.

Решење: Функције f и g су сличне. Ако је $F = L[f]$ и $G = L[g]$, онда на основу теореме о слици сличног оригинала је, за $Re(s) > a$,

$$G(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s/a-1} = \frac{1}{s-a}.$$

Ако је $H = L[h]$, онда из једнакости $h(t) = f(t\,ln\,a)$ следи да је $H(s) = \dfrac{1}{s-ln\,a}$ за $Re(s) > ln\,a$.

392. Одредити Лапласове слике за функције $f : t \mapsto sh\;at$ и $g : t \mapsto ch\;at$.

Решење: Нека је $F = L[f]$ и $G = L[g]$. Како је

$$sh\ at = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}, \quad ch\ at = \frac{1}{2}e^{at} + \frac{1}{2}e^{-at},$$

то је на основу својства линеарности, за $Re(s) > |a|$,

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2},$$

$$G(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

393. Користећи Лапласове слике за функције sin и cos одредити Лапласове слике за функције $f : t \mapsto sin\, at$ и $g : t \mapsto cos\, at$.

Решење: Нека је $S = L[sin]$, $C = L[cos]$, $F = L[f]$ и $G = L[g]$. Како су функције sin и f, односно cos и g сличне, то је

$$F(s) = \frac{1}{a}S\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s^2/a^2+1} = \frac{a}{s^2+a^2},\ G(s) = \frac{1}{a}C\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{s/a}{s^2/a^2+1} = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

394. Одредити Лапласову слику F функције $f : t \mapsto sin\, at \cdot cos\, bt$.

Решење: Како је

$$sin\, at \cdot cos\, bt = \frac{1}{2}\, sin(a+b)t + \frac{1}{2}\, sin(a-b)t,$$

то је на основу претходног задатка и својства линеарности

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{s^2+(a+b)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a-b}{s^2+(a-b)^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b)(s^2+(a-b)^2)+(a-b)(s^2+(a+b)^2)}{(s^2+(a+b)^2)(s^2+(a-b)^2)}. \\ &= \frac{a(s^2+a^2-b^2)}{(s^2+(a+b)^2)(s^2+(a-b)^2)} \end{aligned}$$

395. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = cos^3 t$.

Решење: Из једнакости $cos\, t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ следи да је

$$cos^3 t = \frac{1}{8}\left(e^{3ti} + 3e^{ti} + 3e^{-ti} + e^{-3ti}\right) = \frac{1}{4}\, cos\, 3t + \frac{3}{4}\, cos\, t.$$

Према томе,

$$L[f](s) = \frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+1} = \frac{s(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)}.$$

Напомена: Може и

$$cos^3 t = \frac{1}{2}(1+cos\, 2t)\, cos\, t = \frac{1}{4}\left(3\, cos\, t + cos\, 3t\right).$$

396. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = sin^4 t$.

Решење: Ако је $g(t) = cos^2 2t$, онда је $L[g](s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+16}\right)$, па из једнакости

$$sin^4 t = \left(\frac{1 - cos\, 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + cos^2 2t - 2\, cos\, 2t\right)$$

следи да је

$$L[f](s) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+16}\right) = \frac{24}{s(s^2+4)(s^2+16)}.$$

Слика помереног оригинала. Померање слике

397. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ e^{1-t}, & t \geq 1 \end{cases}$.

Решење: Ако је u одскочна функција, $g(t) = e^{-t}$, $G = L[g]$ и $F = L[f]$, онда је

$$f(t) = u(t-1)e^{-(t-1)}, \quad F(s) = e^{-s}G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}.$$

Друго решење: По дефиницији Лапласове слике је

$$F(s) = \int_1^\infty e^{-st}e^{1-t}dt = e\int_1^\infty e^{-(s+1)t}dt = -\frac{e}{s+1}e^{-(s+1)t}\Big|_1^\infty = \frac{e^{-s}}{s+1}.$$

398. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ или } t \geq b \\ 1, & 0 \leq t < a \\ 2, & a \leq t < b \end{cases}$.

Решење: Ако је u одскочна функција, онда је

$$\begin{aligned} f(t) &= u(t) - u(t-a) + 2(u(t-a) - u(t-b)) \\ &= u(t) + u(t-a) - 2u(t-b), \end{aligned}$$

па је

$$L[f](s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-as}}{s} - \frac{2e^{-bs}}{s} = \frac{1}{s}\left(1 + e^{-as} - 2e^{-bs}\right).$$

Друго решење: По дефиницији је

$$F(s) = \int_0^a e^{-st}dt + 2\int_a^b e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^a - \frac{2}{s}e^{-st}\Big|_a^b = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-as} - \frac{2}{s}e^{-bs}.$$

399. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ или } t \geq 2a \\ 1, & 0 \leq t < a \\ -1, & a \leq t < 2a \end{cases}$.

Решење: Ако је u одскочна функција, онда је

$$f(t) = u(t) - 2u(t-a) + u(t-2a),$$

па је $L[f](s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-as}\right)^2$.

Друго решење: По дефиницији је

$$F(s) = \int_0^a e^{-st}dt - \int_a^{2a} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^a + \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^{2a} = \frac{1}{s}\left(1+e^{-2as}-2e^{-as}\right).$$

400. Одредити $L[f]$ ако је $f(t)=0$ за $t<0$ или $t\geq n$ $(n\in N)$ и $f(t)=k$ за $k-1\leq t<k$ $(k=1,2,\dots,n)$.

Решење: Ако је u одскочна функција, онда је

$$f(t)=u(t)+u(t-1)+\cdots+u(t-(n-1))-nu(t-n),$$

па је

$$F(s)=\frac{1}{s}\left(1+e^{-s}+e^{-2s}+\cdots+e^{-(n-1)s}\right)-\frac{n}{s}e^{-ns}=\frac{1}{s}\left(\frac{1-e^{-ns}}{1-e^{-s}}-ne^{-ns}\right).$$

401. Одредити $L[f]$ ако је $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \text{ или } t\geq 2 \\ t, & 0<t\leq 1 \\ 2-t, & 1<t\leq 2 \end{cases}$.

Решење: Ако је u одскочна функција, онда је

$$\begin{aligned} f(t) &= t\,(u(t)-u(t-1))+(2-t)\,(u(t-1)-u(t-2)) \\ &= tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2), \end{aligned}$$

па је

$$L[f](s)=\frac{1}{s^2}-\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2}=\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}.$$

402. Одредити $L[f]$ ако је $f(t)=e^{-t}\,cos^2 t$.

Решење: Ако је $g(t)=cos^2 t$, онда је $L[f](s)=G(s+1)$. Како је $g(t)=\dfrac{1+cos\,2t}{2}$, то је

$$G(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}, \quad F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)}.$$

403. Одредити $L[g]$ ако је $g(t)=f(t)ch\ at$ $(a\in R)$ и $F=L[f]$.

Решење: Како је $g(t)=\dfrac{1}{2}f(t)e^{at}+\dfrac{1}{2}f(t)e^{-at}$, то је

$$L[g](s)=\frac{1}{2}F(s-a)+\frac{1}{2}F(s+a)=\frac{1}{2}\left(F(s-a)+F(s+a)\right).$$

404. Одредити $L[f]$ ако је $f(t)=sh^3 t$.

Решење: Ако је $g(t)=sh^2 t$ и $G=L[g]$, онда је $G(s)=\dfrac{2}{s(s^2-4)}$, јер је $sh^2 t=\dfrac{ch\ 2t-1}{2}$. Како је

$$sh^3 t = sh\ t\cdot sh^2 t=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)sh^2 t=\frac{1}{2}e^t sh^2 t-\frac{1}{2}e^{-t}sh^2 t,$$

то је

$$\begin{aligned} L[f](s) &= \frac{1}{2}\left(G(s-1)-G(s+1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(s-1)((s-1)^2-4)}-\frac{2}{(s+1)((s+1)^2-4)}\right) \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)(s-3)}-\frac{1}{(s+1)(s-1)(s+3)} \\ &= \frac{6}{(s^2-1)(s^2-9)}. \end{aligned}$$

Друго решење: Из једнакости $sh^3 t = \frac{1}{4}(sh\ 3t - 3sh\ t)$ следи да је

$$L[f](s) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{s^2-9}-\frac{3}{s^2-1}\right) = \frac{6}{(s^2-1)(s^2-9)}.$$

Извод слике. Извод оригинала.

405. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = t^2\, sin\, at$ $(a \in R)$.

Решење: Ако је $L[f] = F$, онда је

$$F(s) = (-1)^2\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)'' = 2a \cdot \frac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}.$$

406. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = t^2 sh(at)$ $(a \in R)$.

Решење: Ако је $L[f] = F$, онда је

$$F(s) = (-1)^2\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right)'' = 2a \cdot \frac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}.$$

407. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = t^2 ch(at)$ $(a \in R)$.

Решење: Ако је $L[f] = F$, онда је

$$F(s) = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right)'' = 2s \cdot \frac{s^2+3a^2}{(s^2-a^2)^3}.$$

408. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = t^n e^{at}$.

Решење: Ако је $h(t) = e^{at}$ и $L[h] = H$, онда је

$$L[f](s) = (-1)^n H^{(n)}(s) = (-1)^n\left(\frac{1}{s-a}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Друго решење: Ако је $g(t) = t^n$, онда је $L[g](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, па је

$$L[f](s) = L[g](s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

409. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = t^n ch(at)$, где је $a \in R$ и $n \in N$.

Решење: Како је $f(t) = \frac{1}{2}t^n e^{at} + \frac{1}{2}t^n e^{-at}$, то је на основу претходног задатка

$$L[f](s) = \frac{1}{2}\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} + \frac{1}{2}\frac{n!}{(s+1)^{n+1}} = \frac{n!}{2} \cdot \frac{(s+a)^{n+1} + (s-a)^{n+1}}{(s^2-a^2)^{n+1}}.$$

410. Одредити $L[f']$ ако је $f(t) = e^{-at} \cos t$ $(a \in R)$.

Решење: Како је $L[f](s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+1}$ и $f(0) = 1$, то је

$$L[f'](s) = sL[f](s) - f(0) = \frac{s(s+a)}{(s+a)^2+1} - 1.$$

Напомена: Наравно, може и $f'(t) = -e^{-at}(a \cos t + \sin t)$, а затим применити Лапласову трансформацију.

411. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n}{e^t}\right)$.

Решење: Ако је $g(t) = t^n e^{-t}$, онда је $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0$, па је

$$L[f](s) = L[g^{(n)}](s) = s^n L[g](s) = s^n \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}.$$

412. Нека је функција f таква да f' припада класи $E(a)$ $(a > 0)$ и нека је $F = L[f]$. Доказати да је

$$(1)\ f(0) = \lim_{Re(s)\to+\infty} sF(s), \quad (2)\ \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

Решење: Из једнакости $L[f'](s) = sF(s) - f(0)$ и дефиниције Лапласове слике следи да је

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0). \qquad (*)$$

Како $L[f'](s) \to 0$ кад $Re(s) \to \infty$ (видети задатак 389.) из једнакости $(*)$, за $Re(s) \to \infty$, добијамо да $sF(s) - f(0) \to 0$ одакле следи (1), а за $s \to 0$ добијамо да је

$$\int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

одакле следи да је $\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = sF(s) - f(0)$, односно (2).

Интеграл слике. Интеграл оригинала.

413. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \frac{\cos at - \cos bt}{t}$, где је $a \in R$ и $b \in R$.

Решење: Ако је $g(t) = \cos at - \cos bt$, $G = L[g]$ и $F = L[f]$, онда је

$$F(s) = \int_s^\infty G(z)dz = \int_s^\infty \left(\frac{z}{z^2+a^2} - \frac{z}{z^2+b^2}\right)dz = \frac{1}{2}\ln\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}.$$

414. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \dfrac{sh(at)}{t}$, где је $a \in R$.

Решење: Ако је $g(t) = sh(at)$, $G = L[g]$ и $F = L[f]$, онда је

$$F(s) = \int_s^\infty G(z)dz = \int_s^\infty \frac{a}{z^2 - a^2}dz = \frac{1}{2}\int_s^\infty \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)dz = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{s+a}{s-a}.$$

415. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \dfrac{e^{-at}}{t} \cdot sin\,bt$, где је $a \in R$ и $b \in R$.

Решење: Ако је $g(t) = \dfrac{sin\,bt}{t}$ и $G = L[g]$, онда је

$$G(s) = \int_s^\infty \frac{b}{z^2 + b^2}dz = \frac{\pi}{2} - arctan\,\frac{s}{b} = arccot\,\frac{s}{b},$$

па је

$$L[f](s) = G(s+a) = arccot\,\frac{s+a}{b}.$$

416. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \dfrac{1 - cos\,at}{te^{bt}}$, где је $a \in R$ и $b \in R$.

Решење: Ако је $g(t) = \dfrac{1 - cos\,at}{t}$ и $G = L[g]$, онда је

$$G(s) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2 + a^2}\right)dz = ln\,\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\,\Big|_s^\infty = ln\,\frac{\sqrt{s^2 + a^2}}{s},$$

па је

$$L[f](s) = G(s+b) = ln\,\frac{\sqrt{(s+b)^2 + a^2}}{s+b}.$$

417. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \dfrac{sin^2\,t}{t^2}$.

Решење: Ако је $g(t) = sin^2\,t$, $h(t) = g(t)/t$, $G = L[g]$, $H = L[h]$ и $F = L[f]$, онда је

$$H(s) = \int_s^\infty G(z)dz = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{z}{\sqrt{z^2+4}}\,\Big|_s^\infty = -\frac{1}{2}\,ln\,\frac{s}{\sqrt{s^2+4}} = \frac{1}{4}\,ln\,\frac{s^2+4}{s^2},$$

$$F(s) = \int_s^\infty H(z)dz = \frac{1}{4}\int_s^\infty ln\,\frac{z^2+4}{z^2}dz = \frac{1}{4}\left(z\,ln\,\frac{z^2+4}{z}\,\Big|_s^\infty + 8\int_s^\infty \frac{dz}{z^2+4}\right).$$

Према томе,

$$F(s) = -\frac{1}{4}s\,ln\,\frac{s^2+4}{s^2} + \frac{\pi}{2} - arctan\,\frac{s}{2}.$$

418. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \displaystyle\int_0^t x^n e^{-ax}dx$, где је $n \in N$ и $a \in R$.

Решење: Ако је $g(t) = t^n e^{-at}$, $G = L[g]$ и $F = L[f]$, онда је

$$F(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{n!}{s(s+a)^{n+1}}.$$

419. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t \frac{g(x)}{x} dx$ и $G = L[g]$.

Решење: Ако је $h(t) = \frac{g(t)}{t}$ и $H = L[h]$, онда је

$$F(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s} \int_s^\infty G(z) dz.$$

420. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t \frac{sin\, x}{x} dx$.

Решење: Ако је $S = L[sin]$, онда на основу претходног задатка следи да је

$$L[f](s) = \frac{1}{s} \int_s^\infty S(z) dz = \frac{1}{s} \int_s^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{s} \left(\frac{\pi}{2} - arctan\, s \right).$$

Лапласова слика периодичне функције

421. Ако је оригинал f периодична функција с периодом T и $F = L[f]$, доказати да је

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-ts} f(t) dt.$$

Решење: Сменом $t = x + T$ добијамо да је

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-sx} f(x+T) dx = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) = e^{-sT} F(s).$$

Према томе,

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} F(s),$$

одакле следи дата једнакост.

422. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \frac{sin\, t}{|\, sin\, t|}$.

Решење: Ако је $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ или } t \geq 2\pi \\ 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$ и ако је $F = L[f]$ и $G = L[g]$, онда је

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-2\pi s}}$$

јер је функција f периодична са периодом 2π. Како је $G(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-\pi s})^2$ (видети задатак 399.), то је

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\left(1-e^{-\pi s}\right)^2}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1-e^{-\pi s}}{1+e^{-\pi s}} = \frac{1}{s} \cdot tanh \frac{\pi s}{2}.$$

423. Одредити $L[sin^+]$ и $L[sin^-]$ ако су функције sin^+ и sin^- дефинисане са

$$sin^+ t = max\{sin\, t, 0\}, \quad sin^- t = max\{-sin\, t, 0\}$$

Решење: Нека је

$$g(t) = \begin{cases} sin\, t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & t < 0 \text{ или } t > \pi \end{cases}, \quad G = L[g], \quad S^+ = L[sin^+], \quad S^- = L[sin^-].$$

Како је sin^+ периодична функција са периодом 2π и како је

$$G(s) = \int_0^\pi e^{-st}\, sin\, t dt = -\frac{e^{-st}}{s^2+1}\,(s\, sin\, t + cos\, t)\,\Big|_0^\pi = \frac{1+e^{-s\pi}}{s^2+1},$$

то је

$$S^+(s) = \frac{G(s)}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{1}{(s^2+1)(1-e^{\pi s})}$$

Из једнакости

$$sin^- t = u(t-\pi)\, sin^+(t-\pi),$$

следи да је

$$S^-(s) = e^{-\pi s}S^+(s) = \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s}).}$$

424. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = |\, sin\, t|$.

Решење: Функција f је периодична са периодом π. Ако су g и G дефинисане као у претходном задатку и ако је $F = L[f]$, онда је

$$F(s) = \frac{G(s)}{1-e^{-\pi s}} = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}} = \frac{1}{s^2+1}\cdot coth\frac{\pi s}{2}.$$

Друго решење: Према ознакама из претходног задатка је

$$F(s) = S^+(s) + S^-(s) = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}.$$

425. Одредити $L[f]$ ако је f периодична функција са периодом $T = 2$, при чему је $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \end{cases}.$

Решење: Ако је $F = L[f]$, онда је

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 te^{-ts}dt + \int_1^2 (2-t)e^{-ts}dt\right).$$

Како је

$$\int_0^1 te^{-ts}dt = -\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}, \quad \int_1^2 (2-t)e^{-ts}dt = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-s},$$

то је

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}\frac{(1-e^{-s})^2}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{s^2}tanh\ s.$$

Конволуција (Множење слика)

426. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t (t-x)e^x dx$.

Решење: Ако је $g(t) = t$ и $h(t) = e^t$, онда је $f = g * h$, па је $L[f](s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}$.

Напомена: Може и

$$f(t) = (t-x)e^x \Big|_0^t + \int_0^t e^x dx = e^t - t - 1,$$

одакле следи $L[f](s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(s-1)}$, али је једноставније помоћу својства Лапласове слике конволуције.

427. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t u(t-x)\, sin\, x dx$, где је u одскочна функција.

Решење: Како је $f = u * sin$, то је $L[f](s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$.

Напомена: Како је $t - x \geq 0$ за $0 \leq x \leq t$, то је $f(t) = \int_0^t sin\, x dx = 1 - cos\, t$, па се лако налази $L[f]$ и без својства конволуције.

428. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t cos(t-x)\, cos\, x dx$.

Решење: Како је $f(t) = (cos * cos)(t)$, то је

$$L[f](s) = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}.$$

Напомена: Без својства конволуције је знатно дуже решавање јер је

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (cos\, t + cos(t-2x))dx = \frac{1}{2}(t\, cos\, t + sin\, t).$$

429. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t e^{-x}(t-x)\, sin\, x dx$.

Решење: Ако је $g(t) = e^{-t}\, sin\, t$ и $h(t) = t$ онда је $f = g * h$, па је

$$L[f](s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s^2+2s+2)}.$$

430. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t e^{t-x}\, cos(t-x) sh\, x dx$.

Решење: Ако је $g(t) = e^t\, cos\, t$, онда је $f = g * sh$, па је

$$L[f](s) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} \cdot \frac{1}{s^2 1}.$$

6.2 Инверзна трансформација

431. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s(s^2+1)^2}$.

Решење: Ако је $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)^2}$ и $L^{-1}[G] = g$, онда је $F(s) = e^{-2s}G(s)$, па је $f(t) = g(t-2)u(t-2)$, где је u јединична одскочна функција. Како је

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2},$$

то је $g(t) = 1 - cos\, t - \dfrac{1}{2} t\, sin\, t$, односно

$$f(t) = \left(1 - cos(t-2) - \frac{1}{2}(t-2)\, sin(t-2)u\right) u(t-2).$$

432. Одредити $L^{-1}[X]$ ако је $X(s) = \dfrac{1}{s^3-8}$.

Решење: Како је

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{s+4}{s^2+2s+4} \\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{(s+1)+3}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}, \end{aligned}$$

то је

$$L^{-1}[X](t) = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t}\left(cos\, \sqrt{3}t + \sqrt{3}\, sin\, \sqrt{3}t\right).$$

433. Одредити $L^{-1}[X]$ ако је $X(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3-1}$.

Решење: Како је

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s-1}{s^2+s+1} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

то је

$$L^{-1}[X](t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-t/2}\, cos\, \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\, sin\, \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

434. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{s^2+2}{s^3+3s^2+5s+3}$.

Решење: Ако је

$$G(s)=\frac{s^2-2s+3}{s(s^2+2)}=\frac{3}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2}-\frac{2}{s^2+2},$$

онда из једнакости

$$F(s)=\frac{(s+1)^2-2(s+1)+3}{(s+1)\left((s+1)^2+2\right)}$$

следи да је

$$L^{-1}[F](t)=e^{-t}L^{-1}[G](t)=e^{-t}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right).$$

435. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+4s+13)^2}$.

Решење: Како је

$$F(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2s+4}{(s^2+4s+13)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right)'=-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)',$$

то је $L^{-1}[F](t)=\dfrac{1}{6}te^{-2t}\sin 3t$.

436. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^3+1)^2}$.

Решење: Ако је

$$G(s)=\frac{1}{s^3+1}=\frac{1/3}{s+1}-\frac{1}{3}\frac{s-2}{s^2-s+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\frac{s-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

онда из једнакости $F(s)=-\dfrac{1}{3}G'(s)$ следи да је

$$L^{-1}[F](t)=\frac{1}{9}t\left(e^{-t}-e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{3}{2}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

437. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s)=\dfrac{2s-3}{(s-1)(s^2+4s+5)}$.

Решење: Како је

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{10}\cdot\frac{s}{s^2+4s+5}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{s^2+4s+5}\\&=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{10}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{37}{10}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1},\end{aligned}$$

то је

$$L^{-1}[F](t)=\frac{1}{10}e^t-\frac{1}{10}e^{-2t}\cos t+\frac{37}{10}e^{-2t}\sin t.$$

438. Ако је $F(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$, где су A и B полиноми степена m и n ($m < n$) и ако су комплексни бројеви $s_1, s_2, \ldots, s_n$ једноструки корени полинома B, доказати да је

$$L^{-1}[F](t) = \sum_{k=i}^{n} \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}.$$

Решење: Нека је $F(s) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{c_k}{s - s_k}$. Тада је

$$c_k = \lim_{s \to s_k} (s - s_k) \frac{A(s)}{B(s)} = A(s_k) \lim_{s \to s_k} \frac{s - s_k}{B(s) - B(s_k)} = \frac{A(s_k)}{B'(s_k)},$$

па је

$$L^{-1}[F](t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{s_k t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t},$$

што је и требало доказати.

439. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{s+1}{s(s-1)(s-2)(s-3)}$.

Решење: Нека је $A(s) = s + 1$ и $B(s) = s(s-1)(s-2)(s-3)$. Тада је

$$B'(s) = 4s^3 - 18s^2 + 22s - 6$$

$$\frac{A(0)}{B'(0)} = -\frac{1}{6}, \quad \frac{A(1)}{B'(1)} = 1, \quad \frac{A(2)}{B'(2)} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{A(3)}{B'(3)} = \frac{2}{3},$$

па је (према претходном задатку)

$$L^{-1}[F](t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{3t}.$$

Напомена: Ако је $G(s) = e^{st} F(s)$, онда је (без позивања на претходни задатак)

$$\begin{aligned} L^{-1}[F](t) &= \operatorname*{res}_{s=0} G(s) + \operatorname*{res}_{s=1} G(s) + \operatorname*{res}_{s=2} G(s) + \operatorname*{res}_{s=3} G(s) \\ &= -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{3t}. \end{aligned}$$

440. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$.

Решење: Нека је $f(t) = L^{-1}[F](t)$, $g(t) = \cos at$ и $G = L[g]$. Тада је $F(s) = G(s) \cdot G(s)$, па је

$$\begin{aligned} f(t) = (g * g)(t) &= \int_0^t \cos a(t-u) \cos au\, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos at + \cos(2au - at)) du \\ &= \frac{1}{2} \left(t \cos at + \frac{1}{a} \sin at \right). \end{aligned}$$

441. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s-1)}$.

Решење: Нека је $f(t) = L^{-1}[F](t)$, $g(t) = t^2$, $h(t) = e^t$, $G = L[g]$ и $H = L[h]$. Тада је $F(s) = G(s) \cdot H(s)/2$, па је

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2}(g * h)(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t (t-x)^2 e^x dx \\ &= \frac{1}{2}e^x(t-x)^2 \Big|_0^t + \int_0^t (t-x)e^x dx \\ &= -\frac{t^2}{2} - t + e^t - 1. \end{aligned}$$

Напомена: Ако је $E(s) = e^{st}F(s)$, онда је

$$f(t) = \underset{s=0}{res}\, E(s) + \underset{s=1}{res}\, E(s).$$

Наравно, f може да се добије и из једнакости

$$F(s) = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s-1}.$$

442. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^3}$.

Решење: Нека је $f = L^{-1}[F]$ и $g = L^{-1}[G]$, где је $G(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$. Тада је

$$\begin{aligned} g(t) = (sin * sin)(t) &= \int_0^t sin(t-u)\, sin\, u du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t cos(t-2u)du - \frac{1}{2}\int_0^t cos\, t du \\ &= \frac{1}{2}\, sin\, t - \frac{1}{2} t\, cos\, t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) = (sin * g)(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t sin(t-u)(sin\, u - u\, cos\, u)du \\ &= \frac{1}{4}(sin\, t - t\, cos\, t) - \frac{1}{2}\int_0^t sin(t-u) u\, cos\, u du \\ &= \frac{3}{8}\, sin\, t - \frac{3}{8} t\, cos\, t - \frac{1}{8} t^2\, sin\, t. \end{aligned}$$

443. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+1)^3}$.

Решење: Нека је $f = L^{-1}[F]$ и $g = L^{-1}[G]$, где је $G(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$. Тада је

$$\begin{aligned} g(t) = (cos * cos)(t) &= \int_0^t cos(t-u)\, cos\, u du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t cos(t-2u)du + \frac{1}{2}\int_0^t cos\, t du \\ &= \frac{1}{2}\, sin\, t + \frac{1}{2} t\, cos\, t \end{aligned}$$

$$f(t) = (sin * g)(t) = \frac{1}{2}\int_0^t sin(t-u)(sin\,u + u\,cos\,u)du$$
$$= \frac{1}{4}t^2\,sin\,t - \frac{1}{8}t\,cos\,t + \frac{1}{8}\,sin\,t$$

444. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{s}{s^4-1}$.

Решење: Пошто је $F(s) = \dfrac{s}{s^2-1}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$, то је

$$L^{-1}[F](t) = (ch * sin)(t) = \int_0^t ch(t-u)\,sin\,udu$$
$$= -\frac{1}{2}\left(sh(t-u)\,sin\,u + ch(t-u)\,cos\,u\right)\Big|_0^t$$
$$= \frac{1}{2}(cht - cos\,t).$$

Друго решење: Ако је $B(s) = s^4 - 1$, тада је $C(s) = B'(s) = 4s^3$, па је

$$L^{-1}[F](t) = \frac{1}{C(1)}e^t - \frac{1}{C(-1)}e^{-t} + \frac{i}{C(i)}e^{it} - \frac{i}{C(-i)}e^{-it}.$$

445. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$.

Решење: Ако је $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$, онда је

$$L^{-1}[G](t) = \frac{1}{a}\int_0^t sin\,axdx = \frac{1}{a^2}(1 - cos\,at),$$

па је

$$L^{-1}[F](t) = \frac{1}{a^2}\int_0^t (1 - cos\,ax)dx = \frac{1}{a^2}\left(t - \frac{1}{a}\,sin\,at\right).$$

Друго решење: Резултат следи из једнакости

$$F(s) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+a^2}\right).$$

Треће решење: Ако је $G(s) = F(s)\cdot e^{st}$, онда је

$$L^{-1}[F](t) = \underset{s=0}{res}\,G(s) + \underset{s=ai}{res}\,G(s) + \underset{s=-ai}{res}\,G(s)$$
$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{st}}{s^2+a^2}\right)' + \lim_{s\to ai}\frac{e^{st}}{s^2(s+ai)} + \lim_{s\to -ai}\frac{e^{st}}{s^2(s-ai)}$$
$$= \frac{t}{a^2} - \frac{1}{a^3}\left(\frac{e^{ati} - e^{ati}}{2i}\right)$$
$$= \frac{t}{a^2} - \frac{1}{a^3}\,sin\,at.$$

6.3 Примена

Интеграл као Лапласова слика

446. Израчунати $\int_0^\infty te^{-at} cos\, tdt \quad (a \in R^+)$.

Решење: Нека је $f(t) = t\, cos\, t$ и нека је $F = L[f]$. Тада је $F(s) = -\frac{d}{ds}F[cos](s)$, а по дефиницији је $F(s) = \int_0^\infty te^{-st} cos\, tdt$. Према томе,

$$\int_0^\infty te^{-st} cos\, tdt = -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

за $Re\ s > 0$. За $s = a$ добијамо да је

$$\int_0^\infty te^{-at} cos\, tdt = \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}.$$

447. Израчунати $\int_0^\infty \frac{e^{at}-e^{bt}}{t}dt \ (a, b \in R)$.

Решење: Нека је $g(t) = e^{at} - e^{bt}$, $f(t) = g(t)/t$, $G = L[g]$ и $F = L[f]$. Како је

$$F(s) = \int_s^\infty G(z)dz = \int_s^\infty \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)dz = ln\,\frac{s-b}{s-a},$$

а по дефиницији је $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, из једнакости

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = ln\,\frac{s-b}{s-a}$$

за $s \to 0$ добијамо да је $\int_0^\infty f(t)dt = ln\frac{b}{a}$.

Диференцијалне једначине - партикуларно решење

448. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 3t + e^{2t}$$

које задовољава услове $y(0) = -1$ и $y'(0) = 1$.

Решење: Нека је $L[y] = Y$. Тада је

$$L[y'](s) = sY(s) - y(0) = sY + 1$$

$$L[y''](s) = sL[y'] - y'(0) = s(sY+1) - 1 = s^2Y + s - 1.$$

Из дате једначине добијамо да је

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-s^4+5s^3-5s^2+3s-6}{s^2(s+1)(s-2)(s-3)} \\ &= -\frac{1}{s^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{s}-\frac{5}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-3}, \end{aligned}$$

па је

$$y(t) = L^{-1}[Y](t) = -t+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$

449. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t)-4y'(t)+5y(t) = 5t+1$$

које задовољава услове $y(0)=2$ и $y'(0)=2$.

Решење: Нека је $L[y]=Y$. Тада је

$$\begin{aligned} L[y'](s) &= sY(s)-y(0) = sY-2 \\ L[y''](s) &= s^2Y(s)-sy(0)-y'(0) = s^2Y-2s-2. \end{aligned}$$

Из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{2s^3-6s^2+s+5}{s^2(s^2-4s+5)} = \frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+\frac{s-3}{s^2-4s+5},$$

па је

$$y(t) = L^{-1}[Y](t) = t+1+e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t.$$

450. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t) = 5\sin t$$

које задовољава услове $y(0)=-1$ и $y'(0)=1$.

Решење: Нека је $L[y]=Y$. Тада је

$$\begin{aligned} L[y'](s) &= sY(s)-y(0) = sY+1, \\ L[y''](s) &= s^2Y(s)-sy(0)-y'(0) = s^2Y+s-1. \end{aligned}$$

Из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{-s^2-s+1}{(s+2)(s^2+1)} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

па је

$$y(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t}-\frac{4}{5}\cos t+\frac{3}{5}\sin t.$$

451. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t)-2y'(t)+2y(t) = 3e^{2t}$$

које задовољава услове $y(0)=1$ и $y'(0)=-1$.

Решење: Нека је $L[y]=Y$. Тада је

$$L[y'](s) = sY-1, \quad L[y''](s) = s^2Y-s+1,$$

па из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{s^2-5s+9}{(s-2)(s^2-2s+2)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

Према томе, тражено решење је

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\left((\cos t + 7\sin t\right).$$

452. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''' + y'' = \sin x$$

које задовољава услове $y(0) = y'(0) = 1$ и $y''(0) = 0$.

Решење: Ако је $L[y] = Y$, онда је

$$L[y''](s) = s^2Y(s) - s - 1, \quad L[y'''](s) = s^3Y(s) - s^2 - s,$$

па из дате једначине следи да је

$$(s^3+s^2)Y(s) = (s+1)^2 + \frac{1}{s^2+1},$$

односно

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

Према томе,

$$y(x) = 2x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

453. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t) + a^2y(t) = b\sin at, \quad (a \in R,\ b \in R^+)$$

које задовољава услове $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$.

Решење: Ако је $L[y] = Y$, онда из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{ab}{(s-ia)^2(s+ia)^2},$$

па је

$$\begin{aligned} y(t) &= \underset{s=ia}{res}\, e^{st}Y(s) + \underset{s=-ia}{res}\, e^{st}Y(s) \\ &= ab \lim_{s\to ai}\left(\frac{e^{st}}{(s+ia)^2}\right)' + ab \lim_{s\to -ai}\left(\frac{e^{st}}{(s-ia)^2}\right)' \\ &= \frac{b}{2a^2}(\sin at - at\cos at). \end{aligned}$$

454. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t) + 4y(t) = \sin 2t$$

које задовољава услове $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

Решење: Ако је $L[y] = Y$, онда из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{2}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2+6}{(s^2+4)^2},$$

па је

$$\begin{aligned} y(t) &= 2Re \ \underset{s=2i}{res}\, e^{st}Y(s) \\ &= 2Re \ \lim_{s\to 2i}\left(e^{st}\frac{s^2+6}{(s+2i)^2}\right)' \\ &= 2Re \ \left(-\frac{5}{16}ie^{2it}-\frac{1}{8}te^{2it}\right) \\ &= \frac{5}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t. \end{aligned}$$

455. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t)-5y'(t)+6y(t)=2\cos t$$

које задовољава услове $y(0)=3$ и $y'(0)=4$.

Решење: Ако је $L[y]=Y$, онда је

$$L[y']=sY-3, \quad L[y'']=s^2Y-3s-4.$$

Из дате једначине добијамо да је

$$Y(s)=\frac{3s^2-11s^2+5s-11}{(s-2)(s-3)(s-i)(s+i)}=\frac{P(s)}{Q(s)},$$

па је

$$y(t)=\frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t}+\frac{P(3)}{Q'(3)}e^{3t}+2Re\left(\frac{P(i)}{Q'(i)}e^{it}\right).$$

Како је $P(2)=-21$, $P(3)=-14$, $P(i)=2i$, $Q'(2)=-5$, $Q'(3)=10$ и $Q'(i)=10i+10$, то је

$$y(t)=\frac{21}{5}e^{2t}-\frac{7}{5}e^{3t}+\frac{1}{5}e^{3t}+\frac{1}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t.$$

Друго решење: Резултат следи из једнакости

$$Y(s)=\frac{21}{5}\cdot\frac{1}{s-2}-\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

456. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t+12e^{-t}$$

које задовољава услове $y(0)=0$ и $y'(0)=A$ $(A\in R)$.

Решење: Ако је $L[y]=Y$, онда је $L[y']=sY$ и $L[y'']=s^2Y-A$, па из дате једначине добијамо да је

$$Y(s)(s^2-3s+2)=A+\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s+1},$$

односно

$$Y(s)=\frac{A}{(s-1)(s-2)}+\frac{4}{s^2(s-1)(s-2)}+\frac{12}{(s-1)(s+1)(s-2)}.$$

Како је

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right]=L_{-1}\left[-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right]=-e^t+e^{2t},$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)(s-2)}\right] = \frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}-\frac{4}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}t+\frac{3}{4}-e^t+\frac{1}{4}e^{2t},$$
$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-2)}\right] = L^{-1}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{6}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-2}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{6}e^{-t}t+\frac{1}{3}e^{2t},$$

то је

$$y(t) = Ce^t-(C+5)e^{2t}+2t+3+2e^{-t},$$

где је $C=-A-10$.

457. Одредити партикуларно решење једначине

$$y^{iv}(t)+2y''(t)+y(t)=sin\,t$$

које задовољава услове $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$.

Решење: Ако је $L[y]=Y$, онда је

$$L[y']=sY,\quad L[y'']=s^2Y,\quad L[y''']=s^3Y,\quad L[y'''']=s^4Y,$$

па из дате једначине добијамо да је

$$(s^4+2s^2+1)Y(s)=\frac{1}{s^2+1},$$

односно $Y(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)^3}$. Према задатку 442. је

$$y(t)=\frac{3}{8}\,sin\,t-\frac{3}{8}t\,cos\,t-\frac{1}{8}t^2\,sin\,t.$$

458. Решити Кошијев проблем

$$y''(t)+4y(t)=f(t),\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,$$

где је $f(t)=1$ за $0<t<1$ и $f(t)=0$ за $t\geq 1$.

Решење: Како је $f(t)=u(t)-u(t-1)$, где је u јединична одскочна функција, из дате једначине добијамо да је

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+4}+\frac{1-e^{-s}}{s(s^2+4)}=\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)-\frac{e^{-s}}{4}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right).$$

Према томе,

$$y(t)=\frac{1}{2}\,sin\,2t+\frac{1}{4}(1-cos\,2t)-\frac{1}{4}(1-2\,cos\,2(t-1))u(t-1).$$

459. Решити Кошијев проблем

$$y''(t)+4y(t)=f(t),\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,$$

где је $f(t)=2t$ за $0<t<1$ и $f(t)=0$ за $t\geq 1$.

Решење: Како је

$$f(t) = 2t(u(t) - u(t-1)) = 2tu(t) - 2(t-1)u(t-1) - 2u(t-1),$$

то је $L[f](s) = \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{2e^{-s}}{s^2} - \dfrac{2e^{-s}}{s}$, па из дате једначине добијамо

$$Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) + \left(\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-s}.$$

Према томе,

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \left(\cos 2(t-1) + \frac{1}{2}\sin 2(t-1) - t\right)u(t-1).$$

460. Решити Кошијев проблем

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

где је $f(t) = 0$ за $t < 1$ и $f(t) = e^{1-t}$ за $t \geq 1$.

Решење: Како је $f(t) = u(t-1)e^{-(t-1)}$, то је $L[f](s) = \dfrac{e^{-s}}{s+1}$ (видети задатак 397.). Ако је $Y = L[y]$, онда из дате једначине добијамо

$$s^2Y - s + 1 + 2sY - 2 + Y = \frac{e^{-s}}{s+1},$$

односно $Y(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{e^{-s}}{(s+1)^3}$, па је

$$y(t) = L^{-1}[Y](t) = e^{-t} + \frac{(t-1)^2}{2}e^{-(t-1)}u(t-1).$$

461. Решити Кошијев проблем

$$y''(t) + 1 = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

где је $f(t) = \dfrac{|\sin t|}{\sin t}$ за $t \in (0, 2\pi)$ и $f(t) = 0$ за $t \geq 2\pi$.

Решење: Како је

$$L[f](s) = \int_0^{\pi} e^{-st}dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st}dt = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-\pi s} + \frac{1}{s}e^{-2\pi s},$$

из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3}e^{-\pi s} + \frac{1}{s^3}e^{-2\pi s},$$

где је $Y = L[y]$. Према томе,

$$y(t) = L^{-1}[Y](t) = 1 - (t-\pi)^2u(t-\pi) + \frac{1}{2}(t-2\pi)^2u(t-2\pi).$$

462. Решити Кошијев проблем

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1,$$

где је $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}.$

Решење: Нека је $L[y] = Y$. Како је $f(t) = u(t) - u(t-1)$, из дате једначине добијамо да је

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2+3s+2}\left(1+\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\right) \\ &= \frac{1+s}{s(s^2+3s+2)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+3s+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}-\frac{2}{s+1}\right)e^{-s}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right) - \frac{1}{2}\left(1+e^{-2(t-1)}\right)u(t-1) + e^{-(t-1)}u(t-1).$$

Диференцијалне једначине - опште решење

463. Решити једначину

$$y''(t) + y(t) = cos\, t.$$

Решење: Ако је $Y = L[y]$, $y(0) = A$ и $y'(0) = B$, онда из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{sA+B}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2} = A\cdot\frac{s}{s^2+1} + B\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

Како је $L[g](s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ за $g(t) = t\, sin\, t$, то је опште решење дате једначне

$$y(t) = A\, cos\, t + B\, sin\, t + \frac{1}{2}t\, sin\, t.$$

464. Одредити опште решење једначине

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4e^{2t}.$$

Решење: Ако је $L[y] = Y$, $y(0) = A$ и $y'(0) = B$, онда је

$$L[y'](s) = sY(s) - A, \quad L[y''](s) = s^2Y - sA - B,$$

па из дате једначине добијамо да је

$$Y(s)(s^2-3s+2) - As - B + 3A = \frac{4}{s-2},$$

односно

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{4}{(s-2)^2(s-1)} + \frac{As+B-3A}{(s-2)(s-1)} \\ &= \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{B-4-A}{s-2} + \frac{4-B+2A}{s-1} \\ &= \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{C_1}{s-2} + \frac{C_2}{s-1}, \end{aligned}$$

где је $C_1 = B - 4 - A$ и $C_2 = 4 - B + 2A$. Према томе,

$$y(t) = L^{-1}[Y](t) = 4te^{2t} + C_1e^{2t} + C_2e^t.$$

Друго решење: Нека је $Y(s) = \dfrac{P(s)}{(s-2)^2(s-1)}$, где је

$$P(s) = As^2 + (B - 5A)s + 6A - 2B + 4.$$

Тада је

$$\begin{aligned} y(t) &= \underset{s=2}{res}\, e^{st}Y(s) + \underset{s=1}{res}\, e^{st}Y(s) \\ &= \lim_{s\to 2}\left(\frac{e^{st}P(s)}{s-1}\right)' + \lim_{s\to 1}\frac{e^{st}P(s)}{(s-2)^2} \\ &= te^{2t}P(2) + e^{2t}(P'(2) - P(2)) + e^tP(1) \\ &= 4te^{2t} + (B - A - 4)e^{2t} + (2A - B + 4)e^t \\ &= 4te^{2t} + C_1e^{2t} + C_2e^t. \end{aligned}$$

465. Одредити опште решење једначине

$$y^{iv}(x) + y'''(x) = cos\, x.$$

Решење: Ако је $L[y] = Y$, $y(0) = A$, $y'(0) = B$, $y''(0) = C$ и $y'''(0) = D$, онда је

$$L[y'''](s) = s^3Y(s) - s^2A - sB - C, \quad L[y^{iv}](s) = s^4Y(s) - s^3A - s^2B - sC - D,$$

па из дате једначине добијамо да је

$$s^3(s+1)Y(s) = As^2(s+1) + Bs(s+1) + C(s+1) + \frac{1}{s^2+1},$$

односно

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)} + \frac{D}{s^3(s+1)}.$$

Како је

$$\frac{s}{s^2(s+1)(s^2+1)} = \frac{E_1}{s^2} + \frac{E_2}{s} + \frac{E_3}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

$$\frac{D}{s^3(s+1)} = \frac{D_1}{s^3} + \frac{D_2}{s^2} + \frac{D_3}{s} + \frac{D_4}{s+1},$$

то је

$$Y(s) = \frac{C_1}{s^3} + \frac{C_2}{s^2} + \frac{C_3}{s} + \frac{C_4}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

где је $C_1 = C + D$, $C_2 = B + D_2 + E_1$, $C_3 = A + D_3 + E_2$ и $C_4 = D_4 + E_3$. Према томе,

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3 + C_4e^{-x} + \frac{1}{2}(cos\, x - sin\, x).$$

466. Решити једначину $y'''(t) - y''(t) = te^t$.

Решење: Нека је $y(0) = A$, $y'(0) = B$ и $y''(0) = C$. Ако је $L[y] = Y$, онда је

$$L[y''](s) = s^2Y - sA - B, \quad L[y'''](s) = s^3Y - s^2A - sB - C,$$

па из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s-1)^3} + \frac{A}{s-1} + \frac{B-A}{s(s-1)} + \frac{C-B}{s^2(s-1)}. \qquad (*)$$

Из $L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^t$ следи да је $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right] = \int_0^t e^x dx = e^t - 1$ и

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)}\right] = \int_0^t (e^x - 1)dx = e^t - t - 1.$$

Слично, из $L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}\right] = \frac{1}{2}t^2e^t$ следи да је

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^3}\right] = \frac{1}{2}\int_0^t x^2e^x dx = \frac{1}{2}t^2e^t - te^t + e^t - 1,$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)^3}\right] &= \int_0^t \left(\frac{1}{2}x^2e^x - xe^x + e^x - 1\right)dx \\ &= \frac{1}{2}t^2e^t - 2te^t + 3e^t - t - 3. \end{aligned}$$

Из ових једнакости и $(*)$ инверзом Лапласовом трансформацијом добијамо да је

$$y(t) = Ce^t + Dt + E + \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 3\right)e^t,$$

где је $D = B - C - 1$ и $E = A - C - 3$.

467. Одредити опште решење једначине

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}(cos\, t + 2\, sin\, t).$$

Решење: Ако је $L[y] = Y$, $y(0) = A$ и $y'(0) = B$, онда је

$$L[y'](s) = sY(s) - A, \quad L[y''](s) = s^2Y - sA - B,$$

па из дате једначине добијамо да је

$$Y(s)(s^2 + 4s + 4) - As - 4A - B = \frac{s+4}{(s+2)^2 + 1},$$

односно

$$Y(s) = U(s) + V(s),$$

где је

$$U(s) = \frac{As + 4A + B}{(s+2)^2}, \quad V(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2\left((s+2)^2+1\right)}.$$

Како је

$$U(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{2A+B}{(s+2)^2}, \quad V(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{s+4}{s^2+4s+5},$$

то је

$$Y(s) = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{(s+2)^2} - \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1},$$

где је $C_1 = A + 1$ и $C_2 = 2A + B + 2$. Према томе,

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}[Y](t) \\ &= C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} - e^{-2t}(cos\,t + 2\,sin\,t). \end{aligned}$$

Друго решење: Имамо да је $y(t) = u(t) + v(t)$, где је

$$u(t) = L^{-1}[U](t), \quad v(t) = e^{-2t} L^{-1}[W](t), \quad W(s) = \frac{s+2}{s^2(s^2+1)}.$$

Како је

$$\underset{s=-2}{res}\, e^{st} U(s) = \underset{s\to -2}{lim} \left(e^{st}(As + 4A + B)\right)' = (2A+B)te^{-2t} + Ae^{-2t},$$

$$\underset{s=0}{res}\, e^{st} W(s) = \underset{s\to 0}{lim} \left(\frac{e^{st}(s+2)}{s^2+1}\right)' = 2t + 1,$$

$$\begin{aligned} \underset{z=i}{res}\, e^{st} W(s) + \underset{s=-i}{res}\, e^{st} W(s) &= \left(i - \frac{1}{2}\right) e^{it} - \left(i + \frac{1}{2}\right) e^{-it} \\ &= i\left(e^{it} - e^{-it}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \\ &= -2\,sin\,t - cos\,t, \end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned} y(t) &= (2A + B + A)\,te^{-2t} + (A+1)e^{-2t} - e^{-2t}\,(2\,sin\,t + cos\,t) \\ &= C_2 t e^{-2t} + C_1 e^{-2t} - e^{-2t}(2\,sin\,t + cos\,t). \end{aligned}$$

Напомена: Могло је и

$$\underset{z=i}{res}\, e^{st} W(s) + \underset{s=-i}{res}\, e^{st} W(s) = 2Re\left(\underset{z-i}{res}\, e^{st} W(s)\right) = -\,cos\,t - 2\,sin\,t.$$

Системи диференцијалних једначина - Кошијев проблем

468. Одредити партикуларно решење система диференцијалних једначина

$$x'(t) = x(t) - y(t) + 8t, \quad y'(t) = 5x(t) - y(t)$$

које задовољава услове $x(0) = 3$ и $y(0) = 1$.

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, онда је $L[x'](s) = sX - 3$ и $L[y'](s) = sY - 1$, па из датог система добијамо систем

$$(s-1)X(s) + Y(s) = 3 + \frac{8}{s^2}, \quad 5X - (s+1)Y(s) = -1.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$X(s) = \frac{3s + 2 + 8/s + 8/s^2}{s^2+4} = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{s}{s^2+4},$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 14s^2 + 40}{s^2(s^2+4)} = \frac{10}{s^2} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{s^2+4},$$

па је тражено партикуларно решење

$$x(t) = 2t + 2 + cos\,2t, \quad y(t) = 10t + cos\,2t + 2\,sin\,2t.$$

469. Одредити партикуларно решење система диференцијалних једначина

$$x'(t) = 3x(t) - 2y(t) + e^{3t}, \quad y'(t) = 2x(t) - y(t)$$

које задовољава услове $x(0) = 2$ и $y(0) = 1$.

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, онда из датог система добијамо систем

$$(s-3)X(s) + 2Y(s) = \frac{2s-5}{s-3}, \quad -2X + (s+1)Y(s) = 1.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$X(s) = \frac{2s^2-5s+1}{(s-1)^2(s-3)}, \quad Y(s) = \frac{s^2-2s-1}{(s-1)^2(s-3)}.$$

па је

$$x(t) = \underset{s=1}{res}\, e^{st}X(s) + \underset{s=3}{res}\, e^{st}X(s) = \lim_{s\to1}\left(e^{st}\frac{2s^2-5s+1}{s-3}\right)' + \lim_{s\to3} e^{st}\frac{2s^2-5s+1}{(s-1)^2},$$

$$y(t) = \underset{s=1}{res}\, e^{st}Y(s) + \underset{s=3}{res}\, e^{st}Y(s) = \lim_{s\to1}\left(e^{st}\frac{s^2-2s+1}{s-3}\right)' + \lim_{s\to3} e^{st}\frac{s^2-2s+1}{(s-1)^2}.$$

Према томе,

$$x(t) = te^t + e^t + e^{3t}, \quad y(t) = te^t + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Друго решење: Како је

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3}, \quad Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3},$$

инверзном Лапласовом трансформацијом добијамо $x(t)$ и $y(t)$.

470. Одредити партикуларно решење система диференцијалних једначина

$$x'(t) - y(t) = e^t, \quad y'(t) + x(t) = sin\,t$$

које задовољава услове $x(0) = 1$ и $y(0) = 0$.

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, онда из датог система добијамо систем

$$sX(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1} + 1, \quad X + sY(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$X(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2},$$

$$Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2},$$

односно

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{(s^2+1)^2}\right),$$

$$Y(s)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right),$$

па је тражено партикуларно решење

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(e^t+2\sin t+\cos t-t\cos t\right),\quad y(t)=\frac{1}{2}\left(-e^t-\sin t+\cos t+t\sin t\right).$$

471. Одредити партикуларно решење система диференцијалних једначина

$$x'(t)=2x(t)-y(t),\quad y'(t)=-2x(t)+y(t)+18t$$

које задовољава услове $x(0)=3$ и $y(0)=1$.

Решење: Ако је $L[x]=X$ и $L[y]=Y$, онда је $L[x'](s)=sX-3$ и $L[y'](s)=sY-1$, па из датог система добијамо систем

$$(s-2)X+Y=3,\quad 2X+(s-1)Y=\frac{18}{s^2}+1,$$

где су непознате X и Y. Решавањем овог система налазимо да је

$$X(s)=\frac{3s}{s-3}-\frac{4}{s(s-3)}-\frac{18}{s^3(s-3)},\qquad (*)$$

$$Y(s)=\frac{s}{s-3}-\frac{8}{s(s-3)}+\frac{18}{s^2(s-3)}-\frac{36}{s^3(s-3)}.\qquad (**)$$

Како је

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-3)}\right]=\int_0^t e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3},$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-3)}\right]=\frac{1}{3}\int_0^t\left(e^{3x}-1\right)dx=\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9},$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s-3)}\right]=\int_0^t\left(\frac{1}{9}e^{3x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)dx=\frac{1}{27}e^{3t}-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{9}t-\frac{1}{27},$$

из $(*)$ и $(**)$ добијамо

$$x(t)=e^{3t}+3t^2+2t+2,\quad y(t)=-e^{3t}+6t^2-2t+2.$$

472. Одредити партикуларно решење система

$$x'(t)=x(t)-y(t),\quad y'(t)=5x(t)-y(t)-5e^t$$

за које је $x(0)=y(0)=1$.

Решење: Ако је $L[x]=X$ и $L[y]=Y$, онда из датог система добијамо да је

$$(s-1)X(s)+Y(s)=1,\quad -5X(s)+(s+1)Y(s)=1-\frac{5}{s-1}.$$

Нека је

$$D=\begin{vmatrix} s-1 & 1\\ -5 & s+1\end{vmatrix},\quad D_X=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1-\dfrac{5}{s-1} & s+1\end{vmatrix},\quad D_Y=\begin{vmatrix} s-1 & 1\\ -5 & 1-\dfrac{5}{s-1}\end{vmatrix}.$$

Тада је

$$X(s) = \frac{D_X}{D} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{5}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+4} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2+4},$$

$$Y(s) = \frac{D_Y}{D} = \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4},$$

па је

$$x(t) = e^t - \frac{1}{2} sin\, 2t, \quad y(t) = cos\, 2t - \frac{1}{2} sin\, 2t.$$

473. Решити Кошијев проблем за систем

$$x'(t) + x(t) = 2y(t), \quad y'(t) + x(t) = y(t) + cos(at), \quad x(0) = y(0) = 0$$

ако је a реалан параметар.

Решење: Ако је $X = L[x]$ и $Y = L[y]$, онда из датог система добијамо

$$X(s) = \frac{2s}{(s^2+1)(s^2+a^2)}, \quad Y(s) = \frac{s(s+1)}{(s^2+1)(s^2+a^2)}.$$

За $a^2 = 1$ је $X(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ и $Y(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+1)^2} + \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$, па је

$$x(t) = t\, sin\, t, \quad y(t) = \frac{1}{2}(t\, cos\, t + sin\, t + t\, sin\, t).$$

За $a^2 \neq 1$ је

$$X(s) = \frac{2}{a^2-1}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+a^2}\right), \quad Y(s) = \frac{1}{a^2-1}\left(\frac{s-1}{s^2+1} + \frac{a^2-s}{s^2+a^2}\right),$$

па је

$$x(t) = \frac{2}{a^2-1}\left(cos\, t - cos\, at\right), \quad y(t) = \frac{1}{a^2-1}\left(cos\, t - sin\, t - cos\, at + a\, sin\, at\right).$$

474. Решити систем

$$x'(t) = 2y(t) + f(t), \quad y'(t) = 2x(t) + g(t), \quad x(0) = y(0) = 0,$$

ако је $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$ и $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le 1 \\ 2, & t > 1 \end{cases}$

Решење: Нека је $X = L[x]$, $Y = L[y]$, $F = L[f]$ и $G = L[g]$. Из датог система добијамо

$$X(s) = \frac{sF(s) + 2G(s)}{s^2-4}, \quad Y(s) = \frac{sG(s) + 2F(s)}{s^2-4}.$$

Како је

$$F(s) = 2\int_0^1 e^{-st} dt = \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-s}, \quad G(s) = 2\int_1^\infty e^{-st} dt = \frac{2}{s}e^{-s},$$

то је

$$X(s) = \frac{2}{s^2-4} - \frac{2e^{-s}}{s^2-4} + \frac{4e^{-s}}{s(s^2-4)}, \quad Y(s) = \frac{4}{s(s^2-4)} + \frac{2e^{-s}}{s^2-4} - \frac{4e^{-s}}{s(s^2-4)}.$$

Према томе,

$$x(t) = sh\ 2t - u(t-1)sh\ 2(t-1) + u(t-1)ch\ 2(t-1) - u(t-1),$$
$$y(t) = ch\ 2t - 1 + u(t-1)sh\ 2(t-1) - u(t-1)ch\ 2(t-1).$$

475. Решити Кошијев проблем за систем диференцијалних једначина

$$x'(t) - y'(t) - 2x(t) + 2y(t) = \sin t$$
$$x'' + 2y' + y = 0$$

и почетне услове $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$.

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, онда је

$$L[x'](s) = sX, \quad L[y'](s) = sY, \quad L[x''](s) = s^2Y,$$

па из датог система добијамо систем

$$(s-2)X - (s-2)Y = \frac{1}{s^2+1}, \quad s^2X + (2s+1)Y = 0.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s+1}{(s^2+1)(s+1)^2(s-2)} \\ &= \frac{i}{4}\frac{1}{s-i} - \frac{i}{4}\frac{1}{s+i} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{9}\frac{1}{s-2}, \\ Y(s) &= -\frac{s^2}{(s^2+1)(s+1)^2(s-2)} \\ &= \frac{2+i}{20}\frac{1}{s-i} + \frac{2-i}{20}\frac{1}{s+i} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+1} - \frac{4}{45}\frac{1}{s-2}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$x(t) = -\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{6}te^{-t} - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t},$$
$$y(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t + \frac{1}{6}te^{-t} - \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{4}{45}e^{2t}.$$

476. Решити Кошијев проблем за систем диференцијалних једначина

$$x''(t) + x'(t) + y''(t) - y(t) = e^t$$
$$x'(t) + 2x(t) - y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

и почетне услове $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$ и $x'(0) = 1$.

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, онда из датог система диференцијалних једначина добијамо систем алгебарских једначина

$$(s^2+s)X + (s^2-1)Y = 1 + \frac{1}{s-1}$$
$$(s+2)X + (-s+1)Y = \frac{1}{s+1}.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$X(s) = \frac{2s-1}{2(s-1)(s+1)^2}, \quad Y(s) = \frac{3s}{2(s^2-1)^2}.$$

Из једнакости

$$X(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1}$$

имамо да је

$$x(t) = L^{-1}[X](t) = \frac{1}{4}sht + \frac{3}{4}te^{-t},$$

а из једнакости

$$L[tsht](s) = \frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

следи да је $y(t) = \frac{3}{4}tsht$. Према томе, решење датог Кошијев проблема су функције $x : [0, +\infty) \mapsto R$ и $y : [0, +\infty) \mapsto R$ дефинисане једнакостима

$$x(t) = \frac{1}{4}sht + \frac{3}{4}te^{-t}, \quad y(t) = \frac{3}{4}tsht.$$

477. Одредити партикуларно решење система

$$x'' = x - y - z, \quad y'' = y - x - z, \quad z'' = z - x - y$$

за које је $y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$ и $x(0) = 1$.

Решење: Ако је $L[x] = X$, $L[y] = Y$ и $L[z] = Z$, онда је

$$L[x''](s) = s^2X(s) - s, \quad L[y''](s) = s^2Y(s), \quad L[z''](s) = s^2Z(s),$$

па из даатог система добијамо систем линеарних алгебарских једначина са непознатим X, Y и Z

$$\begin{aligned}(s^2-1)X + Y + Z &= s\\ X + (s^2-1)Y + Z &= 0\\ X + Y + (s^2-1)Z &= 0.\end{aligned}$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$X(s) = \frac{s^3}{(s^2+1)(s^2-2)}, \quad Y(s) = Z(s) = \frac{-s}{(s^2+1)(s^2-2)},$$

односно

$$X(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+\sqrt{2}},$$

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{6}\frac{1}{s-\sqrt{2}} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+\sqrt{2}}.$$

Применом инверзних Лапласових трансформација добијамо да је

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(cos\,t + e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right) = \frac{1}{3}(cos\,t + 2ch\sqrt{2}t),$$

$$y(t) = z(t) = \frac{1}{6}\left(2\,cos\,t - e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right) = \frac{1}{3}(cos\,t - ch\sqrt{2}t).$$

Напомена: Ако је $Q(s) = (s^2+1)(s^2-2)$, онда је

$$Q'(s) = 2s(2s^2-1),$$

па је

$$x(t) = \frac{i^3}{Q'(i)}e^{it} + \frac{(-i)^3}{Q'(-i)}e^{-it} + \frac{\sqrt{2}^3}{Q'(\sqrt{2})}e^{\sqrt{2}t} + \frac{(-\sqrt{2})^3}{Q'(-\sqrt{2})}e^{-\sqrt{2}t}$$
$$= \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-it} + \frac{1}{3}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{3}e^{-\sqrt{2}t}$$
$$= \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}ch\sqrt{2}t.$$

Слично,

$$y(t) = z(t) = \frac{1}{6}e^{it} + \frac{1}{6}e^{-it} - \frac{1}{6}e^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{6}e^{-\sqrt{2}t} = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}ch\sqrt{2}t.$$

478. Одредити партикуларно решење система

$$x'' = y + z - x, \quad y'' = x + z - y, \quad z'' = x + y - z$$

за које је $y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$ и $x(0) = 1$.

Решење: Према поступку и ознакама из претходног задатка добијамо

$$X(s) = \frac{s^3}{(s^2+2)(s^2-1)} = \frac{2}{3}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{3}\frac{s}{s^2-1},$$
$$Y(s) = Z(s) = \frac{s}{(s^2+2)(s^2-1)} = -\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{3}\frac{s}{s^2-1},$$

па је

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{3}ch\ t, \quad y(t) = z(t) = -\frac{1}{3}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{3}ch\ t.$$

Системи диференцијалних једначина - опште решење

479. Одредити опште решење система

$$x'(t) = 2x(t) + y(t), \quad y'(t) = -x(t) + te^t.$$

Решење: Ако је $L[x] = X$, $L[y] = Y$, $x(0) = A$ и $y(0) = B$, онда из датог система следи да је

$$sX - A = 2X + Y, \quad sY - B = -X + \frac{1}{(s-1)^2},$$

па је

$$X(s) = \frac{sA+B}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^4} = \frac{A}{s-1} + \frac{A+B}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^4},$$
$$Y(s) = \frac{(s-2)B-A}{(s-1)^2} + \frac{s-2}{(s-1)^4} = \frac{B}{s-1} - \frac{A+B}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)^4}.$$

Према томе, опште решење је

$$x(t) = Ae^t + (A+B)te^t + \frac{1}{6}t^3e^t, \quad y(t) = Be^t - (A+B)te^t + \frac{1}{2}t^2e^t - \frac{1}{6}t^3e^t.$$

480. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$x'(t) = -7x(t) + y(t), \quad y'(t) = -2x(t) - 5y(t).$$

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, онда је $L[x'](s) = sX(s) - A$ и $L[y'](s) = sY(s) - B$, где је $A = x(0)$ и $B = y(0)$. Применом Лапласове трансформације на дати систем добијамо линеарни систем алгебарских једначина

$$(s+7)X - Y = A, \quad 2X + (s+5)Y = B.$$

Нека је

$$D = \begin{vmatrix} s+7 & -1 \\ 2 & s+5 \end{vmatrix}, \quad D_X = \begin{vmatrix} A & -1 \\ B & s+5 \end{vmatrix}, \quad D_Y = \begin{vmatrix} s+7 & A \\ 2 & B \end{vmatrix}.$$

Тада је

$$X(s) = \frac{D_X}{D} = \frac{As + 5A + B}{s^2 + 12s + 37} = \frac{A(s+6) - A + B}{(s+6)^2 + 1},$$

$$Y(s) = \frac{D_Y}{D} = \frac{Bs + 7B - 2A}{s^2 + 12s + 37} = \frac{B(s+7) + B - 2A}{(s+6)^2 + 1}.$$

Из ових једнакости следи да је

$$x(t) = e^{-6t} L^{-1}[U](t), \quad y(t) = e^{-6t} L^{-1}[V](t),$$

где је

$$U(s) = \frac{As + B - A}{s^2 + 1}, \quad V(s) = \frac{Bs + B - 2A}{s^2 + 1}.$$

Према томе,

$$x(t) = e^{-6t} \left(A \cos t + (B - A) \sin t \right),$$
$$y(t) = e^{-6t} \left(B \cos t + (B - 2A) \sin t \right).$$

Напомена: Ако је

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad Z = L[z], \quad x(0) = A, \quad y(0) = B,$$

онда је

$$Z(s) = (sI - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + 12s + 37} \cdot \begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ 12 & s+7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

одакле добијамо $X(s)$ и $Y(s)$.

481. Решити систем

$$x'(t) = x(t) - y(t) + 2 \sin t, \quad y'(t) = 2x(t) - y(t).$$

Решење: Ако је $L[y] = Y$, $x(0) = A$ и $y(0) = B$, онда из датог система добијамо

$$X(s) = \frac{As}{s^2+1} + \frac{A - B}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{(s^2+1)^2}, \quad Y(s) = \frac{Bs}{s^2+1} + \frac{2A - B}{s^2+1} + \frac{4}{(s^2+1)^2}.$$

Како је $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ Лапласова слика функције $t \mapsto t\,sin\,t$, то је $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\cdot\dfrac{1}{s}$ Лапласова слика функције $t \mapsto \int_0^t x\,sin\,x dx$, односно $t \mapsto sin\,t - t\,cos\,t$, па је

$$x(t) = A\,cos\,t + (A-B)\,sin\,t + t\,sin\,t + sin\,t - t\,cos,$$
$$y(t) = B\,cos\,t + (2A-B)\,sin\,t + 2(sin\,t - t\,cos\,t),$$

где су A и B произвољне реалне константе.

482. Решити систем

$$x'(t) = y(t) - 2z(t) - x(t),\ y'(t) = 4x(t) + y(t),\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - z(t).$$

Решење: Акоје $L[x] = X$, $L[y] = Y$, $L[z] = Z$ и ако је $x(0) = A$, $y(0) = B$, $z(0) = C$, онда из датог система добијамо систем по X, Y и Z

$$(s+1)X - Y + 2Z = A, \quad -4X + (s-1)Y = B, \quad -2X - Y + (s+1)Z = C.$$

Детерминанта овог система је $D = (s+1)^2(s-1)$, а решења су

$$X(s) = \frac{A}{s+1} - \frac{2C}{(s+1)^2} + \frac{B}{s^2-1} - \frac{2B}{(s+1)^2(s-1)}$$
$$Y(s) = \frac{B}{s-1} + \frac{4B}{(s+1)^2(s-1)} + \frac{4A-8C}{s^2-1}$$
$$Z(s) = \frac{C}{s+1} + \frac{B}{s^2-1} + \frac{2A}{(s+1)^2} + \frac{4A+2B-4C}{(s+1)^2(s-1)}.$$

Како је

$$\frac{1}{(s+1)^2(s-1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1},$$

то је

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B-2C}{(s+1)^2}$$
$$Y(s) = \frac{2B+2A-4C}{s-1} + \frac{4C-2A-B}{s+1} - \frac{2B}{(s+1)^2}$$
$$Z(s) = \frac{2C-B-A}{s+1} + \frac{B+A-C}{s-1} + \frac{B-2C}{(s+1)^2},$$

па је

$$x(t) = (2C-B)te^{-t} + Ae^{-t}$$
$$y(t) = 2Bte^{-t} + (2B+2A-4C)e^{t} + (4C-2A-B)e^{-t}$$
$$z(t) = (2C-B)te^{-t} + (2C-B-A)e^{-t} + (B+A-C)e^{t}.$$

Интегралне једначине и системи

483. Решити једначину

$$y'(t) + \int_0^t y(x)dx = u(t-1)$$

ако је $y(0) = 1$ и ако је u јединична одскочна функција.

Решење: Нека је $Y = L[y]$. Како је $\int_0^t y(x)dx = (y * u)(t)$, из дате једначине добијамо $sY - 1 + \frac{1}{s}Y = \frac{e^{-s}}{s}$. Према томе,

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{e^{-s}}{s^2+1}, \quad y(t) = cos\, t + u(t-1)\, sin(t-1).$$

484. Решити једначину

$$\int_0^t (1+t-u)y(u)du = \frac{1}{2}e^{-t}\, sin\, t.$$

Решење: Ако $g : t \mapsto 1+t$, онда је $\int_0^t (1+t-u)y(u)du = (y * g)(t)$, па из дате једначине следи да је

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1},$$

где је $Y = L[y]$. Према томе,

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} - sin\, t\right) e^{-t}.$$

485. Решити једначину

$$\int_0^t sin(t-u)y(u)du = sin^2\, t.$$

Решење: Како је $\int_0^t sin(t-u)y(u)du = (sin * y)(t)$, из дате једначине следи

$$Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4},$$

где је $Y = L[y]$. Према томе, $Y(s) = \frac{1}{2s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4}$, па је $y(t) = (1 + 3\, cos\, 2t)/2$.

486. Решити једначину

$$y(t) = sin\, t + 2\int_0^t cos(t-x)y(x)dx.$$

Решење: Како је $\int_0^t cos(t-x)y(x)dx = (cos * y)(t)$, из дате једначине следи

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{2s^2}{s^2+1}Y(s),$$

одакле добијамо да је $Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Према томе, $y(t) = te^t$.

487. Решити једначину

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t (t-x+1)y(x)dx = 0.$$

Решење: Ако $g : t \mapsto 1 + t$ и ако је $y'(0) = A$, онда из дате једначине следи да је $y' + y + g * y = 0$, па применом Лапласове трансформације добијамо да је

$$sY - A + Y + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) Y = 0,$$

односно

$$Y(s) = \frac{A}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{s-1}{s^2+1}\right).$$

Према томе, опште решење дате једначине је

$$y(t) = \frac{A}{2}\left(e^{-t} + cos\, t - sin\, t\right), \quad A \in R.$$

488. Решити једначину

$$y(t) + 4\int_0^t e^{x-t}(t-x)^2 y(x)dx = e^{-3t}.$$

Решење: Ако $g : t \mapsto e^{-t}t^2$, онда је

$$\int_0^t e^{x-t}(t-x)^2 y(x)dx = \int_0^t e^{-(t-x)}(t-x)^2 y(x)dx = (g * y)(t),$$

па из дате једначине следи да је

$$Y(s) + 4 \cdot \frac{2}{(s+1)^3} \cdot Y(s) = \frac{1}{s+3},$$

односно

$$Y(s) = \frac{(s+1)^3}{(s+3)^2(s^2+3)}.$$

Из једнакости

$$\frac{(s+1)^3}{(s+3)^2(s^2+3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+3},$$

односно

$$(s+1)^3 = A(s+3)(s^2+3) + B(s^2+3) + (Cs+D)(s+3)^2$$

за $s = -3$ добијамо да је $B = -2/3$, а за $s = 0$, $s = -1$ и $s = 1$ добијамо систем

$$3A + 3D = 1, \quad 2A - C + D = 2/3, \quad A + C + D = 2/3$$

из којег налазимо да је $A = 2/3$, $C = 1/3$ и $D = -1/3$. Према томе,

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3}te^{-3t} + \frac{1}{3}cos\,\sqrt{3}t - \frac{1}{3\sqrt{3}}sin\,\sqrt{3}t.$$

489. Одредити партикуларно решење једначине

$$y(t) + sin\,2t = \int_0^t \left(y'''(x) + y(x)\right) e^{x-t} dx$$

за које је $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Решење: Ако $g : t \mapsto e^{-t}$, онда из дате једначине следи да је

$$y(t) + sin\,2t = ((y''' + y) * g)(t).$$

Применом Лапласове трансформације добијамо да је

$$Y(s)+\frac{2}{s^2+4}=\left((s^3Y(s)+Y(s)\right)\frac{1}{s+1},$$

односно

$$Y(s)=\frac{2}{s(s-1)(s^2+4)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{1}{10}\cdot\frac{s-4}{s^2+4}.$$

Према томе, партикуларно решење је

$$y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}e^t+\frac{1}{10}\,cos\,2t-\frac{1}{5}\,sin\,2t.$$

490. Решити једначину

$$y'(t)+\int_0^t(y'''(x)+y(x))e^{x-t}dx=sin\,t$$

ако је $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

Решење: Ако је $L[y]=Y$ и ако $g:t\mapsto e^t$, онда је

$$\int_0^t(y'''(x)+y''(x))e^{x-t}dx=((y'''+y'')*g)(t),$$

па из дате једначине следи да је $Y(s)=1/(s^2+1)^2$. Према томе,

$$y(t)=(sin*sin)(t)=\int_0^t sin\,x\cdot sin(t-x)dx=\frac{1}{2}(sin\,t-t\,cos\,t).$$

491. Решити систем једначина

$$x(t)=t+\int_0^t y(u)du,\quad y(t)=1+\int_0^t x(u)du.$$

Решење: Ако је $L[x]=X$ и $L[y]=Y$, из датог система добијамо систем

$$X=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}Y,\quad Y=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}X$$

из којег следи да је

$$X(s)=\frac{2}{s^2-1},\quad Y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{2s}{s^2-1}.$$

Према томе, $x(t)=2sht$ и $y(t)=2cht-1$.

492. Решити систем једначина

$$x'(t)+x(t)-y(t)+\int_0^t e^{t-u}x(u)du=0,\quad y'(t)-x(t)-\int_0^t(t-u)y(u)du=1$$

ако је $x'(0)=y'(0)=0$.

Решење: Ако је $X=L[x]$ и $Y=L[y]$, тада применом Лапласове трансформације из датог система добијамо систем по X и Y

$$sX+X-Y+\frac{1}{s-1}X=0,\quad sY-X-\frac{1}{s^2}Y=\frac{1}{s},$$

односно

$$\frac{s^2}{s-1}X - Y = 0, \quad -X + \frac{s^3-1}{s^2}Y = \frac{1}{s}.$$

Како је

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{s^2}{s-1} & -1 \\ -1 & \dfrac{s^3-1}{s^2} \end{vmatrix} = s(s+1), \quad D_X = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{s^3-1}{s^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{s},$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} \dfrac{s^2}{s-1} & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{s}{s-1}, \quad X(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}, \quad Y(s) = \frac{1}{s^2-1},$$

то је

$$x(t) = -1 + t + e^{-t}, \quad y(t) = sht.$$