МАТЕМАТИКА 1

ПРЕДАВАЊЕ 2

р.проф. др Милица Стојановић

МАТРИЦЕ

Дефиниција. Правоугаона шема (таблица) A од $m{\cdot}n$ елемената $a_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

је матица типа (димензије, формата) $m \times n$ над пољем K.
Реална матрица $K = \boldsymbol{R}$, комплексна матрица $K = \boldsymbol{C}$.
Ознаке: Шема **мора** бити записана унутар заграда:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

i-та врста (ред): елементи $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$;
j-та колона (стубац): елементи $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$.

Краће ознаке: $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$.

Типови матрица

- Матрица чији су сви елементи нуле је нула матрица.
- Матрица врста (вектор врста): $\left[a_{ij}\right]_{mn}$, $m = 1,\ n > 1$

$$\left[a_{1j}\right]_{1n} = \left[a_{11}\ \ a_{12}\ \ \ldots\ \ a_{1n}\right].$$

- Матрица колона (вектор колона): $\left[a_{ij}\right]_{mn}$, $m > 1,\ n = 1$

$$\left[a_{i1}\right]_{m1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

- **Квадратна матрица:** $m = n,\ \left[a_{ij}\right]_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$
- Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ леже на главној дијагонали квадратне матрице, а $a_{1n},\ a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ на споредној дијагонали.
- Траг матрице $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ је збир „дијагоналних“ елемената (са главне дијаг.)

- Дијагонална матрица:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ бар један ел. $\neq 0$

diag A - матрица формирана од дијагоналних елемената дате матрице A

- Скаларна матрица: $\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$

- Јединична матрица:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Кронекеров симбол: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$

$\Rightarrow E_n = \left\lfloor \delta_{ij} \right\rfloor_n$

- Горња троугаона матрица:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Доња троугаона матрица:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Дефиниција. Две матрице истог типа су једнаке ако и само ако су истог типа и ако су им одговарајући (који су на истом месту) елементи једнаки.

Дефиниција. Подматрица или субматрица матрице A је матрица која се добија изостављањем неких врста и/или колона матрице A.

- Матрица типа $m\times n$ има $\binom{m}{p}\cdot\binom{n}{q}$ подматрица типа $p\times q$, за $p\leq m$, $q\leq n$.

Операције са матрицама

- *Сабирање и одузимање*

Дефиниција. Збир матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ је матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$ где је

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,, \qquad i=1,\ldots,m \text{ и } j=1,\ldots,n.$$

Својства сабирања за матрице истог типа:

1. комутативност $A+B = B+A$,
2. асоцијативност $(A+B)+C= A+(B+C)$,
3. неутрални елемент је нула матрица $\mathbf{0}$ (истих димензија)

   $$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A, \ (\forall A)$$

4. за произвољну матрицу A_{mn} постоји њој супротна матрица $-A_{mn}$

   таква да је $A_{m\times n} + (-A_{m\times n}) = \mathbf{0}$, тј. $-A_{m\times n} = [-a_{ij}]_{m\times n}$.

Теорема. Ако је S скуп свих матрица истог типа, тада је структура $(S, +)$ Абелова група.

Дефиниција. Разлика матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$, у ознаци $A-B$ је матрица C дата са

$$C=A+(-B).$$

- *Множење матрице скаларом*

Елементе λ, μ, ... поља K зовемо скалари.

Дефиниција. Производ матрице $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и скалара λ је матрица $B=(b_{ij})_{m\times n}$, где је

$$b_{ij}=\lambda\, a_{ij} \qquad \text{за} \quad i=1,\dots,m \quad \text{и} \quad j=1,\dots,n.$$

Важи: $0\cdot A=\mathbb{0}$, $(-1)\cdot A=-A$.

Теорема. Ако су A и B матрице истог типа, а λ и μ скалари, тада важи:

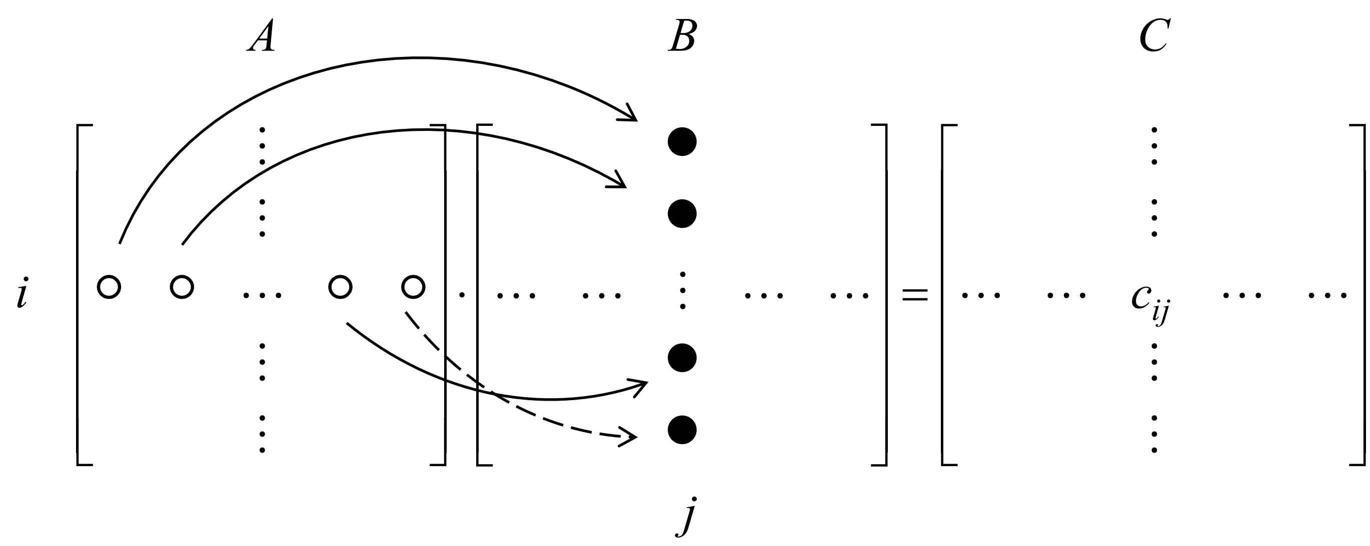
1. $1\cdot A=A$,
2. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$,
3. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
4. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,

Доказ. Произилази из операција + и · у пољу K.

- *Множење матрица*

Дефиниција. Производ $A\cdot B$ сагласних матрица $A=(a_{ik})_{l\times m}$ и $B=(b_{kj})_{m\times n}$ је матрица $C=(c_{ij})_{l\times n}$, при томе је

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{im}b_{mj}$$



- Матрицу A типа $m{\times}n$ могуће је помножити матрицом B са леве и десне стране само ако је B матрица типа $n{\times}m$.
- Све квадратне матрице истог реда су сагласне без обзира на поредак, али <u>**не** важи комутативност</u> у општем случају.

<u>**Теорема 1.**</u> За произвољне матрице A, B, C и јединичну матрицу E, уз претпоставку сагласности важи:

1. *асоцијативност*: $(A_{mp} \cdot B_{pr}) \cdot C_{rn} = A_{mp} \cdot (B_{pr} \cdot C_{rn})$
2. *дистрибутивност*: $A_{mp} \cdot (B_{pn} + C_{pn}) = A_{mp} \cdot B_{pn} + A_{mp} \cdot C_{pn}$
3. $A_{mn} \cdot E_n = E_m \cdot A_{mn} = A_{mn}$.

<u>**Теорема 2.**</u> Скуп свих квадратних матрица истог реда са операцијама сабирања и множења матрица је прстен са јединицом.

Докази теорема 1, 2. • Асоцијативност множења матрица $\rightarrow$ уџбеник, додатак;

• Дистрибутивност $\cdot$ према $+$ за матрице следи из дистрибутивности за реалне бројеве.

• Остало следи из дефиниција и својстава сабирања и множења матрица.

• *Степен квадратне матрице*

Дефиниција. За квадратну матрицу A дефинишемо: $A^0 = E,\ \ A^1 = A,\ \ A^n = A^{n-1} \cdot A$

Теорема. 1. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$; 2. $\left(A^m\right)^n = A^{mn}$.

Доказ. Математичком индукцијом: $n=1$: $A^m \cdot A^1 = A^{m+1}$.

Ако тврђење важи за неко n: $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$, онда важи и за $n+1$:

$$A^m \cdot A^{n+1} = A^m \cdot \left(A^n \cdot A\right) = \left(A^m \cdot A^n\right) \cdot A = A^{m+n} \cdot A = A^{m+n+1}.$$

Дефиниција. Транспонована матрица A^T матрице A, добија се заменом (свих) врста матрице A, одговарајућим колонома (исте матрице A).

Теорема (својства транспоновања матрица)

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Пермутације скупа $\{1, 2, \dots, n\}$

Дефиниција. Пермутацијом σ скупа $S = \{1, 2, \dots, n\}$ називамо било коју уређену n-торку $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ у којој се сваки елемент скупа S појављује тачно једном.

Нека је P_n скуп свих пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, при чему је пермутација $(1, 2, \dots, n)$ основна и нека је $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ нека друга пермутација тог скупа.

Дефиниција. Ако у пермутацији σ важи $\sigma_i > \sigma_j$ за $i < j$, онда елементи σ_i и σ_j образују једну инверзију.

- У пермутацији (2, 3, 1) скупа {1, 2, 3} инверзије чине елементи 2 и 1, 3 и 1.
- У пермутацији $(n, n-1, \dots, 1)$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ свака два елемента су у инверзији.

Дефиниција. Пермутација σ је парна ако је укупан број инверзија $Inv(\sigma)$ у њој паран, а непарна ако је $Inv(\sigma)$ непаран број.

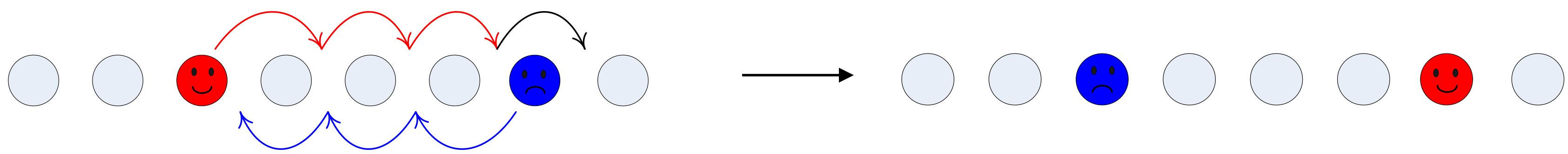
- број инверзија у пермутацији $(n, n-1, \dots, 1)$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ је

$$n-1+n-2+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2},$$ па парност зависи од n.

Теорема. Ако у датој пермутацији два елемента замене места (изврше транспозицију), пермутација мења парност.

Доказ. Ако два суседна елемента замене места, број инверзија се мења за 1 (умањује се за 1 ако су били, а увећава за 1 ако нису били у инверзији), па се мења и парност.

Ако између елемената који мењају места има k других елемената, они могу да замене места са $2k+1$ транспозиција скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. ■



Теорема. Нека је $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$ дата пермутација скупа S и нека је $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1} \ldots, \sigma_n)$ пермутација скупа $S \setminus \{\sigma_i\}$ добијена из дате, изостављањем елемента $\sigma_i = j$. Тада је: $(-1)^{Inv(\sigma)+Inv(\sigma')} = (-1)^{i+j}$.

Теорема. Међусобно инверзне пермутације имају једнак број инверзија.