МАТЕМАТИКА 3

Драган Ђорић

64 задатка са решењима

За студенте генерације 2015

Драган С. Ђорић

МАТЕМАТИКА
3

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Глава 5
Функције комплексне променљиве

Факултет организационих наука
Београд, 2009.

5 ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

5.1 Изводи

320. Испитати диференцијабилност и аналитичност функције

$$f\ :\ z \mapsto (z-1)Re(z+1).$$

Решење: Ако је $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, онда је $u(x,y) = x^2-1$ и $v(x,y) = y(x+1)$, па је

$$u'_x(x,y) = 2x, \quad u'_y(x,y) = 0, \quad v'_x(x,y) = y, \quad v'_y(x,y) = x+1.$$

Како су Коши Риманови услови испуњени једино у тачки $z = 1$ и како функције u и v имају непрекидне парцијалне изводе у R^2, то је f диференцијабилна у тачки $z = 1$. Међутим, не постоји ниједна околина те тачке у којој је функција диференцијабилна, па f није аналитичка ни у једној тачки комплексне равни.

321. Одредити скуп тачака у којима је функција $f\ :\ z \mapsto sin\,\overline{z}$
(1) диференцијабилна, (2) аналитичка.

Решење: На основу једнакости

$$sin\,\overline{z} = sin\,x \cdot chy - i\,cos\,x \cdot shy = u(x,y) + iv(x,y)$$

имамо да је

$$u'_x(x,y) = cos\,x \cdot chy,\ u'_y(x,y) = sin\,x \cdot shy,$$

$$v'_x(x,y) = sin\,x \cdot shy,\ v'_y(x,y) = -\,cos\,x \cdot chy.$$

Пошто су u'_x, u'_y, v'_x и x'_y непрекидне функције у целој комплексној равни, то је за диференцијабилност функције f довољно да буду испуњени Коши-Риманови услови. Из једнакости $u'_x = v'_y$ следи да је $cos\,x = 0$, односно $x = \pi/2+k\pi$, $(k \in Z)$, а из услова $u'_y = -v'_x$ следи да је $y = 0$ (пошто је $sin\,x \neq 0$ кад је $cos\,x = 0$). Према томе, функција f је диференцијабилна у тачкама $\pi/2 + k\pi$ за $k \in Z$, али није аналитичка ни у једној од тих тачака јер ни за једну не постоји околина у којој је f диференцијабилна.

322. Дата је функција $f\ :\ z \mapsto z^2\overline{z}$. Испитати њену
(1) диференцијабилност, (2) аналитичност.

Решење: Како је

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2(x-iy) = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3) = u(x,y) + iv(x,u),$$

из Коши Риманових услова следи да је $3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2$ и $2xy = -2xy$, односно $x = y = 0$.

(1) У тачки $(0,0)$ су испуњени Коши Риманови услови и парцијални изводи u'_x, u'_y, v'_x и v'_y су непрекидни, што значи да је f диференцијабилна у $(0,0)$.

(2) Функција f није аналитичка у $(0,0)$ јер не постоји ниједна околина тачке $(0,0)$ у којој је f диференцијабилна.

323. Нека је $f(z) = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$ за $z \neq 0$ и $f(0) = 0$.

(1) Испитати диференцијабилност функције f у тачки $z = 0$.

(2) Испитати да ли у тачки $z = 0$ важе Коши Риманови услови.

Решење: (1) Како је

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta z} = \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}^2}{\Delta z^2} = \begin{cases} 1, & \Delta z = x \\ -1, & \Delta z = x + ix \end{cases}$$

функција f није диференцијабилна у $z = 0$.

(2) Ако је $f(z) = u + iv$, онда је за $z \neq 0$

$$u(x,y) = \frac{x^3 - xy^2 - 2xy^2}{x^2 + y^2}, \quad v(x,y) = \frac{y^3 - x^2y - 2yx^2}{x^2 + y^2}.$$

Како је

$$u'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = 1, \quad u'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

$$v'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(\Delta x, 0) - v(0,0)}{\Delta x} = 0, \quad v'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(0, \Delta y) - v(0,0)}{\Delta y} = 1,$$

то је $u'_x(0,0) = v'_y(0,0)$ и $u'_y(0,0) = -v'_x(0,0)$, односно важе Коши Риманови услови.

324. Одредити константе a и b за које је функција

$$f \;:\; x + iy \mapsto \cos x\,(chy + a \cdot shy) + i \sin x\,(chy + b \cdot shy)$$

аналитичка у целој комплексној равни.

Решење: Нека је

$$u(x,y) = \cos x\,(chy + a \cdot shy)\,, \quad v(x,y) = \sin x\,(chy + b \cdot shy)\,.$$

Како су парцијални изводи функција u и v непрекидни у целој комплексној равни, за аналитичност функције f довољни су Коши-Риманови услови. Усови $u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$ су испуњени за свако x и свако y једино ако је $a = b = -1$. Према томе, f је аналитичка за $a = b = -1$, при чему је $f(z) = e^{iz}$.

325. Испитати регуларност функције $f : C \to C$ ако је

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \text{ за } z \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Решење: За $z \neq 0$ функција је регуларна. Како је

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z + z \cos z} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{2\cos z - z \sin z} = 0,$$

функција је у $z = 0$ непрекидна. Слично је

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{z\to 0} \frac{\Delta z - \sin \Delta z}{\Delta^2 z \sin \Delta z} = \cdots = \frac{1}{6},$$

па f у $z = 0$ има извод. Према томе, f је регуларна у целој комплексној равни.

326. Нека је $f\ :\ z \mapsto u + iv$ аналитичка функција и нека су a, b и c реални бројеви такви да је $ab \neq 0$. Ако је

$$au(x, y) + bv(x, y) = c,$$

доказати да је f константна функција.

Решење: Пошто је f аналитичка функција, испуњени су Коши-Риманови услови. Из дате једнакости следи да је

$$u(x, y) = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}v,$$

односно

$$u'_x = -\frac{b}{a}v'_x, \quad u'_y = -\frac{b}{a}v'_y.$$

Како је $u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$, следи да је

$$u'_x(x, y) = u'_y(x, y) = v'_x(x, y) = v'_y(x, y) = 0.$$

Према томе, $u(x, y) = A$ и $v(x, y) = B$, где је $A \in R$ и $B \in R$, па је $f(z) = A + iB$.

327. Ако је f аналитичка функција за коју важи

$$f(x + iy) = \alpha(x) + i\beta(x), \alpha, \beta \in R$$

доказати да је $f(z) = ax + c$ $(A \in R,\ c \in C)$.

Решење: Из Коши Риманових услова следи да је $\alpha'(x) = \beta'(y)$ што је могуће једино ако је $\alpha'(x) = \beta'(y) = a$, где је $a \in R$. У том случају је $\alpha(x) = ax + c_1$ и $\beta(y) = ay + c_2$, односно $f(z) = az + c_1 + c_2 = az + c$.

328. Нека је $z = x + iy$ и нека је функција $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитичка за $x \neq 0$. Одредити $v(x, y)$ ако је

$$u(x, y) = ln\,|z|^2.$$

Решење: Из Коши Риманових услова добијамо да је

$$v'_y(x, y) = u'_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad v'_x(x, y) = -u'_y(x, y) = -\frac{2y}{x^2 + y^2},$$

па је

$$v(x, y) = \int \frac{2x}{x^2 + y^2} dy = 2\,arctan\,\frac{y}{x} + \varphi(x).$$

Диференцирањем леве и десне стране ове једнакости налазимо да је $\varphi(x) = C$. Према томе, $v(x, y) = 2\,arctan\,\dfrac{y}{x} + C$, где је $C \in R$.

329. Одредити све аналитичке функције f за које је

$$Re(f(x + iy)) = a \cdot arctan\,\frac{y}{x} + b, \quad a, b \in R.$$

Решење: Из једнакости $v'_y = u'_x = -\dfrac{ay}{x^2+y^2}$ следи да је

$$v(x,y) = \int v'_y(x,y)dy + \varphi(x) = -\frac{a}{2}\,ln(x^2+y^2) + \varphi(x).$$

Из другог Коши Римановог услова, $u'_y = -v'_x$, добијамо да је $\varphi'(x) = 0$, односно $\varphi(x) = C$ $(C \in R)$. Према томе,

$$f(z) = a\cdot arg\, z + b - i\cdot a\, ln\,|z| + i\cdot c = -i\cdot a(ln\,|z| + i\cdot arg\, z) + b + i\cdot c = -i\cdot a\, ln\, z + b + i\cdot c.$$

330. Одредити аналитичку функцију $f\,:\, x+iy \mapsto u+iv$ ако је

$$u(x,y) = e^x\,(x\cos y - y\sin y)\,,\;\; f(0) = 0.$$

Решење: Из једнакости $v'_y = u'_x = xe^x\cos y - e^x y\sin y + e^x\cos y$ следи да је

$$v(x,y) = \int v'_y(x,y)dy + \varphi(x) = xe^x\sin y + e^x y\cos y + \varphi(x),$$

при чему из услова $u'_y = -v'_x$ добијамо да је $\varphi'(x) = 0$, односно $\varphi(x) = C$ $(C \in R)$. Како је $f(0) = 0$, то је

$$v(x,y) = xe^x\sin y + ye^x\cos y.$$

331. Одредити све аналитичке функције $f\,:\, x+iy \mapsto u+iv$ за које је

$$v(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Решење: Из једнакости

$$u'_x = v'_y = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

следи да је

$$u(x,y) = \int\frac{dx}{x^2+y^2} - y\int\frac{2xdx}{(x^2+y^2)^2} - 2y^2\int\frac{dx}{(x^2+y^2)^2} + \varphi(y).$$

Међутим,

$$I = \int\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + 2\int\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + 2I - 2y^2\int\frac{dx}{(x^2+y^2)^2},$$

па је $u(x,y) = \dfrac{y-x}{x^2+y^2} + \varphi(y)$. Из друге Коши - Риманове једнакости, $u'_y = -v'_x$, налазимо да је $\varphi'(y) = 0$, односно $\varphi(y) = C$ $(C \in R)$. Према томе, $f(z) = (i-1)/z + C$.

332. Одредити све функције $f\,:\, z \mapsto u+iv$ $(z = x+iy)$ које су за $z \neq i$ аналитичке и за које је

$$v(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2-2y}.$$

Решење: Из једнакости

$$u'_x = v'_y = -\frac{2x(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

следи да је

$$u(x,y) = -2(y-1)\int \frac{xdx}{(x^2+(y-1)^2)^2} + \varphi(y) = \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} + \varphi(y).$$

Како је

$$v'_x = \frac{(y-1)^2-x^2}{(x^2+(y-1)^2)^2}, \quad u'_u = \frac{x^2-(y-1)^2}{(x^2+(y-1)^2)^2} + \varphi'(y),$$

из другог Кош Римановог услова, $u'_y = -v'_x$, добијамо да је $\varphi'(y) = 0$, односно $\varphi(y) = C$ $(C \in R)$. Према томе,

$$f(z) = \frac{y-1+ix}{x^2+(y-1)^2} + C = \frac{i\overline{z}-1}{z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1} + C = \frac{i\overline{z}-1}{(i\overline{z}-1)(z/i-1)} + C = \frac{i}{z-i} + C.$$

333. Одредити све функције α и β за које је функција $f : x+iy \mapsto u+iv$, где је

$$u(x,y) = \alpha(x)shy, \quad v(x,y) = \beta(x)chy$$

аналитичка.

Решење: Како је

$$u'_x = \alpha' \cdot sh\,y, \quad u'_y = \alpha \cdot ch\,y, \quad v'_x = \beta' \cdot ch\,y, \quad v'_y = \beta \cdot sh\,y,$$

из Коши Риманових услова следи да је $\alpha' = \beta$ и $\alpha = -\beta'$, односно $\alpha''(x)+\alpha(x) = 0$. Према томе,

$$\alpha(x) = A\,cos\,x + B\,sin\,x, \quad \beta(x) = -A\,sin\,x + B\,cos\,x, \quad A, B \in R.$$

334. Одредити све функције α и β за које је функција

$$f : x+iy \mapsto \alpha(x)\,sin\,y + i\beta(x)\,cos\,y$$

аналитичка у целој комплексној равни.

Решење: Нека је $u(x,y) = Re(f(z))$ и $v(x,y) = Im(f(z))$. Из Коши-Риманових услова $u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$ добијамо систем диференцијалних једначина

$$\alpha' = -\beta, \quad \beta' = -\alpha$$

у којима су непознате функције α и β. Решења овог система су двопараметарске фамилије функција

$$\alpha(x) = Ce^x + De^{-x}, \quad \beta(x) = Ce^x - De^{-x}, \quad C \in R,\ D \in R. \qquad (*)$$

Како су за све функције из ових фамилија парцијални изводи функција u и v непрекидни у целој комплексној равни, то је f аналитичка ако и само ако су функције α и β дефинисане релацијама $*$.

335. Одредити све аналитичке функције $f : x+iy \mapsto u+iv$ за које је

$$v(x,y) = ln\left((x-1)^2 + (y-2)^2\right).$$

Решење: Из једнакости

$$u'_x = v'_y = \frac{2(y-2)}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

следи

$$u(x,y) = \frac{2}{y-2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-1}{y-2}\right)^2} + \varphi(y) = 2\,arctan\,\frac{x-1}{y-2} + \varphi(y).$$

Како је

$$v'_x = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

из услова $u'_y = -v'_x$ добијамо да је $\varphi'(y) = 0$, односно $\varphi(y) = A$, $(A \in R)$. Према томе,

$$f(x+iy) = 2\,arctan\,\frac{c-1}{y-2} + C + v(x,u)i, \quad C \in R.$$

336. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ за које је

$$u(x,y) = \frac{sin\,2x}{cos\,2x + ch\;2y}.$$

Решење: Из једнакости

$$v'_x = -u'_y = \frac{2\,sin\,2x \cdot sh\;2y}{(cos\,2x + ch\;2y)^2}$$

следи

$$v(x,y) = -sh\;2y \int \frac{d(cos\,2x)}{(cos\,2x + ch\;2y)^2} + \varphi(y) = \frac{sh\;2y}{cos\,2x + ch\;2y} + \varphi(y).$$

Како је

$$u'_x = \frac{2 + 2\,cos\,2x \cdot ch\;2y}{(cos\,2x + ch\;2y)^2},$$

из услова $u'_x = v'_y$ добијамо да је $\varphi'(y) = 0$, односно $\varphi(y) = A$, $(A \in R)$. Према томе,

$$f(x+iy) = \frac{sin\,2x + i \cdot sh\;2y}{cos\,2x + ch\;2y} + Ai, \quad A \in R,$$

односно $f(z) = tan\,z + Ai$.

5.2 Интеграли

Параметризација криве

337. Израчунати $\int_{C^+} Im(z)dz$, где је $C = \{z \mid z = 3e^{it},\ t \in [0, \pi/2]\}$.

Решење: Ако је $z = x + iy$, онда је

$$x = 3\,cos\,t, \quad y = 3\,sin\,t, \quad dz = (3\,cos\,t + i3\,sin\,t)dt,$$

па је

$$\int_C Imzdz = -9\int_0^{\pi/2} sin^2\,tdt + 9i\int_0^{\pi/2} sin\,t\,cos\,tdt = -\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} - i\right).$$

338. Израчунати $\int_{C^+}(Re(z) + Im(z))dz$, где је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење: Ако је I дати интеграл и $z = x + iy$, тада је

$$I = \int_{|z|=1}(x+y)(dx + idy) = \int_{|z|=1}(x+y)dx + i\int_{|z|=1}(x+y)dy.$$

Параметризацијом $x = cos\,t$ и $y = sin\,t$ имамо

$$I = -\int_0^{2\pi}(cos\,y\,sin\,t + sin^2\,t)dt + i\cdot\int_0^{2\pi}(cos^2\,t + sin\,t\,cos\,t)dt.$$

Како је

$$\int_0^{2\pi} sin\,t\,cos\,tdt = 0, \quad \int_0^{2\pi} sin^2\,tdt = \int_0^{2\pi} cos^2\,tdt = \pi,$$

то је $I = (i-1)\pi$.

339. Израчунати $\int_{C^-}\frac{\overline{z}}{z}dz$ ако је C граница области D, где је

$$D = \{z \,:\, 1 < |z| < 2,\ Re(z) > 0\}.$$

Решење: Нека је f подинтегрална функција и нека су C_1, C_2, C_3 и C_4 делови контуре C. На C_1 је $x = 0$ и $dz = iy$ за $y \in [-2, -1]$, па је

$$I_1 = \int_{C_1} f(z)dz = \int_{-2}^{-1}\frac{-iy}{iy}idy = -i\int_{-2}^{-1} = -i.$$

Слично је

$$I_3 = \int_{C_3} f(z)dz = \int_1^2\frac{-iy}{iy}idy = -i\int_1^2 = -i.$$

На C_2 је $z = e^{it}$, $\overline{z} = e^{-it}$, $dz = ie^{it}dt$ за $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, па је

$$I_2 = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{e^{-it}}{e^{it}}ie^{it}dt = i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-it}dt = 2i.$$

На C_4 је $z = 2e^{it}$, $\overline{z} = 2e^{-it}$, $dz = 2ie^{it}dt$, при чему се параметар t мења од $\pi/2$ до $-\pi/2$, па је

$$I_4 = \int_{C_4} f(z)dz = \int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{2e^{-it}}{2e^{it}}2ie^{it}dt = 2i\int_{\pi/2}^{-\pi/2} e^{-it}dt = -4i.$$

Према томе,

$$\int_{C^-}\frac{\overline{z}}{z}dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -4i.$$

340. Израчунати $\int_{C^+} Re(z)dz$ ако је C граница области D, где је

$$D = \{x + iy \ : \ x^2 + y^2 < 2x,\ x^2 + y^2 < 2y\}.$$

Решење: Нека је

$$C_1 = \{x + iy \ : \ x = \cos t,\ y = 1 + \sin t,\ -\pi/2 \le t \le 0\},$$
$$C_2 = \{x + iy \ : \ x = 1 + \cos t,\ y = \sin t,\ \pi/2 \le t \le \pi\}.$$

За $z = x + iy \in C_1$ је $dz = -\sin t + i\cos t$ и $Re(z) = \cos t$, па је

$$I_1 = \int_{C_1} Re(z)dz = \int_{-\pi/2}^{0} \cos t(-\sin t + i\cos t)dt = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}i.$$

Слично, за $z \in C_2$ је $dz = -\sin t + i\cos t$ и $Re(z) = 1 + \cos t$, па је

$$I_2 = \int_{C_2} Re(z)dz = \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos t)(-\sin t + i\cos t)dt = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}i - i.$$

Према томе,

$$\int_{C^+} Re(z)dz = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) i.$$

Кошијева теорема

341. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} (z - a)^n dz$ ако је C контура која обухвата тачку $z = a$ и ако је n цео број.

Решење: Ако је $n \ge 0$, тада је подинтегрална функција f датог интеграла I регуларна, па је $I = 0$.

Ако је $n < 0$, тада је

$$I = \int_{C_\rho^+} f(z)dz, \quad C_\rho = \{z \ : \ |z - a| = \rho\},$$

где је $\rho > 0$ и такво да је контура C_ρ унутар контуре C. За $z \in C_\rho$ је $z = a + \rho e^{it}$, па је

$$I = \rho^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)ti} dt = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

342. Израчунати $\displaystyle\int_L \frac{dz}{z}$ ако је L проста глатка крива која спаја тачке 1 и -1, при чему су имагинарни делови тачака криве (осим крајњих) (1) позитивни; (2) негативни.

Решење: (1) Нека је $L_1 = \{z \ : \ z = e^{it},\ 0 \le t \le \pi\}$. Тада је

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{L_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} idt = \pi i.$$

(2) Нека је $L_2 = \{z \,:\, z = e^{it},\ 0 \geq t \geq -\pi\}$. Тада је

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{L_2} \frac{dz}{z} = \int_0^{-\pi} i dt = -\pi i.$$

343. Користећи $\displaystyle\int_{L^+} \frac{dz}{z}$, где је $L = \{z \ : \ z = a\, cos\, t + ib\, sin\, t,\ t \in [0, 2\pi],\ a > 0, b > 0\}$, израчунати

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\, cos^2\, t + b^2\, sin^2\, t}.$$

Решење: За дату контуру L је

$$\int_{L^+} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\, sin\, t + ib\, cos\, t}{a\, cos\, t + ib\, sin\, t} dt$$
$$= (b^2 - a^2) \int_0^{2\pi} \frac{sin\, t\, cos\, t dt}{a^2\, cos^2\, t + b^2\, sin^2\, t} + iab \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\, cos^2\, t + b^2\, sin^2\, t}.$$

Ако је $C = \{z \,:\, z = \rho e^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ 0 < \rho < max\{a, b\}\}$, тада је

$$\int_{L^+} \frac{dz}{z} = \int_{C^+} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Према томе,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\, cos^2\, t + b^2\, sin^2\, t} = \frac{2\pi}{ab}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{sin\, 2t dt}{a^2\, cos^2\, t + b^2\, sin^2\, t} = 0.$$

344. Израчунати $\displaystyle\int_C \frac{(a+b)z - az_1 - bz_2}{(z - z_1)(z - z_2)} dz$ ако је C контура која ограничава област D, при чему $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$.

Решење: Ако је f подинтегрална функција и ако је $C_1 = \{z \mid |z - z_1| < \rho_1\}$ и $C_2 = \{z \mid |z - z_2| < \rho_2\}$, где су ρ_1 и ρ_2 такви да C_1 и C_2 припадају области D, онда је f аналитичка на контурама C, C_1 и C_2 и на двоструко повезаној области коју оне ограничавају. Према Кошијевој теореми је

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

Како је $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где је

$$f_1(z) = \frac{b}{z - z_1}, \quad f_2(z) = \frac{a}{z - z_2},$$

и како је f_1 аналитичка на области коју ограничава контура C_2, а f_2 аналитичка на области коју ограничава контура C_2, то је

$$\int_{C_2} f_1(z) dz = \int_{C_1} f_2(z) dz = 0,$$

што значи да је

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f_1(z) dz + \int_{C_2} f_2(z) dz.$$

За тачке контуре C_1 је $z = z_1 + \rho_1^{it}$, а за тачке контуре C_2 је $z = z_2 + \rho_2 e^{it}$, где је $t \in [0, 2\pi)$, па је

$$\int_{C_1} f_1(z)dz = bi\int_0^{2\pi} dt = 2b\pi i, \quad \int_{C_2} f_2(z)dz = ai\int_0^{2\pi} dt = 2a\pi i.$$

Према томе, $\displaystyle\int_C f(z)dz = 2(a+b)\pi i$.

Њутн Лајбницова формула

345. Израчунати $\displaystyle\int_L ze^z dz$, где је $L = \{z \mid z = e^{it},\ t \in [-\pi/2, \pi/2]\}$.

Решење: Пошто је функција $f : z \mapsto ze^z$ регуларна у целој комплексној равни, а $F : z \mapsto ze^z - e^z$ њена примитивна функција, то је

$$\int_C f(z)dz = F(i) - F(-i) = ie^i + ie^{-i} - e^i + e^{-i} = 2i(cos\,1 - sin\,1).$$

346. Израчунати $\displaystyle\int_L z\,sin\,zdz$ ако је L проста глатка крива која спаја тачке $\pi/2$ и i.

Решење: Како је $f : z \mapsto z\,sin\,z$ регуларна у целој комплексној равни, то је

$$\int_L z\,sin\,zdz = -z\,cos\,z + sin\,z\,\Big|_{\pi/2}^{i} = -i\frac{e^{-1}+e}{2} + \frac{e^{-1}-e}{2i} - 1 = -1 - \frac{1}{e}i.$$

347. Израчунати $\displaystyle\int_L (iz^2 - 2ze^{z^2})dz$ ако је L проста део по део глатка крива која спаја тачке $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ и $z_2 = i$.

Решење: Подинтегрална функција f је регуларна у целој комплексној равни, па је

$$I = \int_L f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \left(i\frac{z^3}{3} - e^{z^2}\right)\Big|_{z_1}^{z_2}.$$

Према томе,

$$I = i\frac{i^3}{3} - e^{i^2} - \frac{i}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + e^{-i} = \frac{2-\sqrt{2}}{6} - e^{-1} + cos\,1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6} - sin\,1\right)i.$$

348. Израчунати $\displaystyle\int_L f(z)dz$ ако је $f : z \to u + iv$ аналитичка функција за коју је $f(0) = i$ и ако је

$$u(x,y) = e^x(x\,cos\,y - y\,sin\,y), \quad L = \{z\ :\ z = sin\,t + it,\ t \in [0,\pi]\}.$$

Решење: Из Коши Римановихусловадобијамо да је

$$v'_y(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y), \quad v'_x(x,y) = e^x(x\sin y + \sin y + y\cos y),$$

па је

$$v(x,y) = \int v'_y(x,y)dy + \varphi(x) = e^x(x\sin y + y\cos y) + \varphi(x)$$

и $\varphi'(x) = 0$, односно $\varphi(x) = C$. Према томе,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y) + iC \\ &= e^x((x+iy)\cos y + i(x+iy)\sin y) + iC \\ &= ze^z + iC. \end{aligned}$$

Како је $f(0) = i$, то је $C = 1$ и $f(z) = ze^z + i$. Примитивна функција за f је $F(z) = ze^z - e^z + iz$, па је

$$\int_L f(z)dz = F(\pi i) - F(0) = e^{i\pi}(i\pi - 1) - \pi + 1 = 2 - \pi - \pi i.$$

Кошијеве формуле

349. Израчунати $\int_{C^+} \frac{zdz}{z^2-1}$ ако је $C = \{z \,:\, |z-1| = 1/2\}$.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је

$$g(z) = \frac{z}{z+1} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{f(z)}{z-1}.$$

Како је f регуларна у области која садржи C, то је $I = 2\pi i f(1) = \pi i$.

350. Израчунати $\int_{C^+} \frac{\sin z dz}{z^2+1}$ ако је $C = \{z \,:\, |z-i| = 1\}$.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је

$$g(z) = \frac{\sin z}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{f(z)}{z-i}.$$

Како је f регуларна у области која садржи C, то је $I = 2\pi i f(i) = \pi \sin i = i\pi sh\, 1$.

351. Израчунати $\int_{C^+} \frac{z^4 dz}{z^4-1}$ ако је $C = \{z \,:\, |z-2| = 2\}$.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је

$$g(z) = \frac{z^4}{(z^2+1)(z+1)} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{f(z)}{z-1}.$$

Како је f регуларна у области која садржи C, то је $I = 2\pi i f(1) = \pi \sin i = \frac{\pi}{2} i$.

352. Израчунати $\int_{C^+} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$ ако тачка a припада области коју ограничава контура C.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-a)^3},\quad f(z)=ze^z,\quad f'(z)=(1+z)e^z,\quad f''(z)=(z+2)e^z.$$

Како је f регуларна у целој комплексној равни, то је

$$I=\frac{2\pi i}{2!}f''(a)=(a+2)e^a\pi i.$$

353. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+}\frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ ако је $C=\{z\ :\ |z-1|=1/2\}$.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-1)^3},\quad f(z)=-\frac{e^z}{z},\quad f'(z)=-\frac{e^z}{z}+\frac{e^z}{z^2},\quad f''(z)=-\frac{z^3-2z^2+2z}{z^4}e^z.$$

Како је f регуларна у области која садржи C, то је $I=\dfrac{2\pi i}{2!}f''(1)=-e\pi i$.

354. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+}\frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$ ако је $C=\{z\ :\ |z|=2\}$.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је $I=\dfrac{1}{16}(I_1-I_2)$, где је $I_1=\displaystyle\int_{C^+}g_1(z)dz$, $I_2=\displaystyle\int_{C^+}g_2(z)dz$ и

$$g_1(z)=\frac{3z^2-9z+8}{(z-1)^3}=\frac{f_1(z)}{(z-1)^3},\quad g_2(z)=\frac{3z^2+9z+8}{(z+1)^3}=\frac{f_2(z)}{(z+1)^3}.$$

Како су f_1 и f_2 регуларне функције, то је

$$I_1=\frac{2\pi i}{2!}f_1''(1)=6\pi i,\quad I_2=\frac{2\pi i}{2!}f_2''(1)=6\pi.$$

Према томе, $I=0$.

Друго решење: Нека је

$$C_a=\{z\ :\ |z-1|=1/2\},\quad C_b=\{z\ :\ |z+1|=1/2\}$$

и нека је

$$I_a=\int_{C_a^+}g(z)dz,\quad I_b=\int_{C_b^+}g(z)dz,\quad f_a(z)=\frac{1}{(z+1)^3},\quad f_b(z)=\frac{1}{(z-1)^3}.$$

Тада је

$$I=I_a+I_b=\frac{2\pi i}{2!}(f_a''(1)+f_b''(1))=\pi i\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\right)=0.$$

355. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+}\frac{e^z dz}{z^2+1}$ ако је $C=\{z\ :\ |z|=2\}$.

Решење: Нека је f подинтегрална функција датог интеграла I и нека је

$$C_1=\{z\ :\ |z-i|=1/2\},\ C_2=\{z\ :\ |z+i|=1/2\},\ I_1=\int_{C_1^+}f(z)dz,\ I_2=\int_{C_2^+}f(z)dz.$$

Тада је
$$I = I_1 + I_2 = 2\pi i\left(f_1(i) + f_2(i)\right),$$
где је $f_1(z) = \dfrac{e^z}{z+i}$ и $f_2(z) = \dfrac{e^z}{z-i}$. Према томе,
$$I = 2\pi i\left(\frac{e^i}{2i} + \frac{e^{-i}}{-2i}\right) = 2\pi i\frac{e^i - e^{-i}}{2i} = 2\pi\, sin\, 1 \cdot i.$$

356. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{ze^z dz}{(z+1)(z-1)^2}$ ако је $C = \{z \,:\, |z| = 2\}$.

Решење: Нека је f подинтегрална функција датог интеграла I и нека је
$$C_1 = \{z \,:\, |z-1| = 1\},\ C_2 = \{z \,:\, |z+1| = 1\},\ I_1 = \int_{C_1^+} f(z)dz,\ I_2 = \int_{C_2^+} f(z)dz.$$
Тада је
$$I = I_1 + I_2 = 2\pi i\left(f_1(-1) + f_2'(1)\right),$$
где је $f_1(z) = \dfrac{ze^z}{(z-1)^2}$ и $f_2(z) = \dfrac{ze^z}{(z-1)}$. Према томе,
$$I = 2\pi i\left(\frac{-e^{-2}}{4} + \frac{3}{2}\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) = 2\pi i\left(-\frac{e^{-2}+e^2}{4} + \frac{3}{2}e^2\right) = 3\pi(e^2 - ch\ 2)i.$$

Примена резидума

357. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^z dz}{(z^2+\pi^2)^2}$, где је $C = \{z \,:\, |z| = \sqrt{\pi^2 + 2^\pi}\}$.

Решење: Како је подинтегрална функција f аналитичка у области коју ограничава контура C, то дати интеграл може да се израчуна преко резидума функције f у тачкама $z = \pi i$ и $z = -\pi i$. Из једнакости
$$\underset{z=\pi i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to\pi i}\left(\frac{e^z}{(z+\pi i)^2}\right)' = \frac{\pi + i}{4\pi^3},$$
$$\underset{z=-\pi i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to-\pi i}\left(\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}\right)' = \frac{\pi - i}{4\pi^3},$$
следи да је
$$\int_{C^+} \frac{e^z dz}{(z^2+\pi^2)^2} = 2\pi i\left(\underset{z=\pi i}{res}\, f(z) + \underset{z=-\pi i}{res}\, f(z)\right) = \frac{1}{\pi}i.$$

358. Израчунати $\displaystyle\int_{C} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz$ ако је $C = \{z \mid z^2 = 5\}$.

Решење: Подинтегрална функција f има полове првог реда $z = 2i$ и $z = -2i$ и пол другог реда $z = -1$. Из једнакости
$$\underset{z=1}{res}\, f(z) = \lim_{x\to-1}\left(\frac{z^2-2z}{z^2+4}\right)' = \lim_{x\to-1}\frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25},$$

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2 4i} = \frac{7+i}{25},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2i} f(z) = \lim_{z\to -2i} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)} = \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)} = \frac{7-i}{25}$$

следи да је дати интеграл једнак 0.

359. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{z^2 dz}{(z^2-1)(z-1)^2}$ ако је C контура која не садржи тачке 1 и -1.

Решење: Нека је f подинтегрална функција датог интеграла I и нека је D област коју затвара контура C. Како је

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{z^2}{z+1}\right)'' = \frac{1}{8},\quad \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{z^2}{(z-1)^3} = -\frac{1}{8},$$

то је

$I = \pi i/4$ ако тачка 1 припада, а тачка -1 не припада D,

$I = -\pi i/4$ ако тачка 1 не припада, а тачка -1 припада D,

$I = 0$ ако тачке 1 и -1 обе припадају или обе не припадају D.

360. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{\cos z dz}{z(z+3i)^2}$ ако је C контура која не садржи тачке 0 и $-3i$.

Решење: Ако је f подинтгрална функција датог интеграла I, онда је

$$\operatorname*{res}_{z=0} fz) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{(z+3i)^2} = -\frac{1}{9},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-3i} f(z) = \lim_{z\to -3i}\left(\frac{\cos z}{z}\right)' = \lim_{z\to -3i}\frac{-z\sin z - \cos z}{z^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{e^3} - e^3\right),$$

па је

$$I = \begin{cases} -\dfrac{2}{9}\pi i, & 0\in D \text{ и } -3i\notin D\\ \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{2}{e^3}-e^3\right)\pi i, & 0\notin D \text{ и } -3i\in D\\ \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{2}{e^3}-e^3-1\right)\pi i, & 0\in D \text{ и } -3i\in D\\ 0, & 0\notin D \text{ и } -3i\notin D. \end{cases}$$

361. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{z^3(z^2+4)^2}$ ако је C контура која не садржи тачке 0, $2i$ и $-2i$.

Решење: Тачка $z=0$ је пол трећег реда подинтегралне функције f датог интеграла I, а $z=2i$ и $z=-2i$ су њени полови другог реда. При томе је

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(z^2+4)^2}\right)'' = -\frac{1}{32},\quad \operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-2i} f(z) = \frac{1}{64}.$$

Према томе, $I = -\pi i/16$ ако само пол $z = 0$ припада области D коју ограничава контура C, $I = \pi i/32$ ако само један од полова $z = 2i$ и $z = -2i$ припада D, $I = -\pi i/32$ ако се у области D налазе пол $z = 0$ и један од полова $z = 2i$ и $z = -2i$, $I = \pi i/16$ ако области D припадају полови $z = 2i$ и $z = -2i$, а не припада пол $z = 0$, а $I = 0$ ако области D припадају сва три пола или не припада ниједан од њих.

362. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{z^5 - z^3}$ ако је $C = \{z \mid |z-1|^2 = 2\}$.

Решење: Области коју ограничава крива C припадају сингуларитети $z = 1$ и $z = 0$ подинтегралне функције f. Пошто је

$$\mathop{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z^3(z+1)} = \frac{1}{2},$$

$$\mathop{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{z^2-1}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{6z^2+2}{(z^2-1)^3} = -1,$$

то је дати интеграл једнак $-\pi i$.

363. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ ако је $C = \{z \mid |z|^2 = 2(Rez + Imz)\}$.

Решење: Крива C је кружница плупречника дужине $\sqrt{2}$ с центром у $1+i$, а кругу који она ограничава припадају сингуларитети $z = 1$ и $z = i$ подинтегралне функције f. Како је

$$\mathop{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{z^2+1}\right)' = -\frac{1}{2}, \quad \mathop{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{1}{4},$$

то је дати интеграл једнак $-\pi i/2$.

364. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz$, где је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење: Пол трећег реда $z = 0$ и пол првог реда $z = 1/2$ припадају области коју ограничава кружница C. Како је

$$\mathop{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{z^6+1}{(2z-1)(z-2)}\right)'' = \frac{21}{8},$$

$$\mathop{res}_{z=1/2} f(z) = \lim_{z\to 1/2} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\frac{65}{24},$$

то је дати интеграл једнак $2\pi i(21/8 - 65/24)$, односно $-\pi i/6$.

365. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{zdz}{(3z^2 - 10iz - 3)^2}$, где је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење: Сингуларитети $z = 3i$ и $z = i/3$ подинтегралне функције f су полови другог реда, али само $z = i/3$ припада кругу који ограничава кружница C. Како је

$$\mathop{res}_{z=i/3} f(z) = \lim_{z\to i/3} \left(\frac{(z-i/3)^2 z}{(3z-i)(z-3i)}\right)' = -\frac{5}{256},$$

то је дати интеграл једнак $-5\pi i/128$.

366. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^{\pi z/2}dz}{z^4+4z^2}$, ако је $C = \{x+iy \mid |x|+|y+1| = 2\}$.

Решење: Контура C је граница квадрата чија су темена тачке 1, $-2-i$, -3 и $2-i$. Како том квадрату припадају сингуларитети $z=0$ и $z=-2i$ подинтегралне функције f, и како је

$$\underset{z=0}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{\pi z/2}}{z^2+4}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{\pi e^{\pi z/2}(z^2+4)/2 - 2ze^{\pi z/2}}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{8},$$

$$\underset{z=-2i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to -2i}\frac{e^{\pi z/2}}{z^2(z-2i)} = \frac{\cos\pi - i\sin\pi}{-4\cdot(-4i)} = \frac{i}{16},$$

то је $\int_{C^+} f(z)dz = 2\pi i(\pi/8 + i/16) = -\pi/8 + i\pi^2/4$.

367. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{z^2dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ ако је C граница области D, где је $D = \{z \mid |z| \le 2,\ Im(z) \ge 0\}$.

Решење: Подинтегрална функција f датог интеграла I има у датом полукругу пол реда два у тачки $z=i$ и пол првог реда у тачки $z=-1+i$. Како је

$$\underset{z=i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to i}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right)' = \frac{9i-12}{100},$$

$$\underset{z=-1+i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to -1+i}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)} = \frac{3-4i}{25},$$

то је

$$I = 2\pi i\left(\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7}{50}\pi.$$

368. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^{az}dz}{z^2(z^2+z+2)}$, где је $C = \{z \mid |z| = 3\}$ и $a \in R$.

Решење: Тачка $z=0$ је пол другог реда, а тачке $z=-1+i$ и $z=-1-i$ полови првог реда подинтегралне функције f датог интеграла I. Како је

$$\begin{aligned}\underset{z=0}{res}\, f(z) &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{az}}{z^2+2z+2}\right)'\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{(z^2+2a+2)ae^{az} - e^{az}(2z+2)}{(z^2+2z+2)}\\ &= \frac{a-1}{2},\end{aligned}$$

$$\underset{z=-1+i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to -1+i}\frac{e^{az}}{z^2}\cdot\frac{z+1-i}{z^2+2z+2} = \frac{e^{(-1+i)a}}{(-1+i)^2}\cdot\frac{1}{2i} = \frac{e^{-a+ai}}{4},$$

$$\underset{z=-1-i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to -1-i}\frac{e^{az}}{z^2}\cdot\frac{z+1+i}{z^2+2z+2} = \frac{e^{(-1-i)a}}{(-1-i)^2}\cdot\frac{1}{2i} = \frac{e^{-a-ai}}{4},$$

то је

$$\begin{aligned} I =&2\pi i\left(\frac{a-1}{2}+\frac{e^{-a+ai}}{4}+\frac{e^{-a-ai}}{4}\right)\\ =&2\pi\left(\frac{a-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-a}\,cos\,a\right)\\ =&\pi i\left(a-1+e^{-a}\,cos\,a\right). \end{aligned}$$

369. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+}\frac{ze^z dz}{(z-a)^2(z+a)}$ ако је $C=\{z \mid |z|=1\}$, $a\in C$, $a\neq 1$.

Решење: Сингуларитети подинтегралне функције f су тачке $z=a$ и $z=-a$ ако је $a\neq 0$, односно $z=0$ ако је $a=0$. За $|a|>1$ сингуларитети су изван области коју ограничава кружница C, па је тада дати интеграл I једнак нули. Како је, за $a\neq 0$,

$$\underset{z=a}{res}\,f(z)=\underset{z\to a}{lim}\left(\frac{ze^z}{z+a}\right)^p=\frac{2a+1}{4a}e^a,\qquad \underset{z=-a}{res}\,f(z)=\underset{z\to -a}{lim}\frac{ze^z}{(z-a)^2}=-\frac{e^a}{4a},$$

то је $I=\dfrac{\pi i}{2a}\left((2a+1)e^a-e^{-a}\right)$, за $0<|a|<1$. За $a=0$ је $\underset{z=0}{res}=1$, па је $I=2\pi i$.

370. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+}\frac{(1-z^2)^2dz}{z(az^2-(a^2+1)z+a)}$ ако је $a\in R\setminus\{-1,0,1\}$ и $C=\{z\,:\,|z|=1\}$.

Решење: Нека је I дати интеграл, f подинтегрална функција, а D област коју ограничава контура C. Ако је $|a|<1$, тада је

$$I=2\pi i(\underset{z=0}{res}\,f(z)+\underset{z=a}{res}\,f(z)),$$

а ако је $|a|>1$, тада је

$$I=2\pi i(\underset{z=0}{res}\,f(z)+\underset{z=1/a}{res}\,f(z)).$$

Како је

$$\underset{z=0}{res}\,f(z)=\frac{1}{a},\quad \underset{z=a}{res}\,f(z)=a-\frac{1}{a},\quad \underset{z=1/a}{res}\,f(z)=\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a},$$

то је $I=2a\pi i$ за $|a|<1$, а $I=2\pi i/a^3$ за $|a|>1$.

371. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+}\frac{dz}{z^6+1}$ ако је C граница области D, где је $D=\{z\,:\,|z|<2,\ Imz>0\}$.

Решење: Подинтегрална функција f датог интеграла I има у датом полукругу полове првог реда у тачкама $z_1=e^{\pi i/6}$, $z_2=e^{\pi i/2}$ и $z_3=e^{5\pi i/6}$. Како је

$$\underset{z=z_k}{res}\,f(z)=\underset{z\to z_k}{lim}\frac{z-z_k}{z^6+1}=\underset{z\to z_k}{lim}\frac{1}{6z^5}=\frac{1}{6}z_k^{-5},$$

то је

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{-5\pi i/6}+\frac{1}{6}e^{-5\pi i/2}+\frac{1}{6}e^{-25\pi i/6}\right)=\frac{2}{3}\pi.$$

372. Израчунати $\displaystyle\int_C \left(\frac{z}{z-1}\right)^n$ ако је $C = \{z \mid z^2 = 2\}$ и $n \in N$.

Решење: Пол $z = 1$ подинтегралне функције f је реда n, па је

$$\underset{z=1}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 1} (z^n)^{(n-1)} = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

Како овај пол припада области коју ограничава контура C, то је

$$\int_c \left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 2\pi i \underset{z=1}{res}\, f(z) = 2n\pi i.$$

373. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z^2+zi)^n}$ ако је $n \in N$, а $C = \{z \,:\, |2z+i| = 2\}$.

Решење: Нека је D област коју ограничава контура C и нека је

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+zi)^n} = \frac{1}{z^n(z+i)^n}.$$

Како је $C = \{z \,:\, |z+i/2| = 1\}$, то области D припадају оба пола функције f, па је

$$\int_{C^+} \frac{dz}{(z^2+zi)^n} = 2\pi i(\underset{z=0}{res}\, f(z) + \underset{z=-i}{res}\, f(z)).$$

Из једнакости

$$\underset{z=0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z=0} \left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)^{(n-1)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} \frac{1}{i^{2n-1}} = -\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} i,$$

$$\underset{z=-i}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z=-i} \left(\frac{1}{z^n}\right)^{(n-1)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} \frac{1}{(-i)^{2n-1}} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} i,$$

следи да је $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z^2+zi)^n} = 0.$

374. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{zdz}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$, где је $C = \{x+iy \mid x^2+y^2 = 2x+2\}$.

Решење: Контура C је кружница $(x-1)^2 + y^2 = 3$, па области D коју она ограничава припадају полови $z = 1$, $z = i$ и $z = -i$ подинтегралне функције f датог интеграла I. Како је

$$\underset{z=1}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}\right)' = -\frac{1}{8}, \quad \underset{z=i}{res}\, f(z) = \underset{z=-i}{res}\, f(z) = \frac{1}{8},$$

то је $I = 2\pi i \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4} i.$

375. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{ln(z+a)}{z^2+a^2}$, ако је $a \in R$, $1 < a < 2$, а C је граница правоугаоника чија су темена тачке $-1-2i$, $1-2i$, $1+2i$ и $-1+2i$.

Решење: Сингуларитети подинтегракне функције f су тачке $z = ai$ и $z = -ai$ и припадају области коју ограничава C. Како је

$$\underset{z=ai}{res} f(z) = \lim_{z\to ai} \frac{ln(z+a)}{z+ai} = \frac{ln(ai+a)}{2ai}, \quad \underset{z=-ai}{res} f(z) = \lim_{z\to -ai} \frac{ln(z+a)}{z-ai} = \frac{ln(a-ai)}{-2ai},$$

то је

$$\int_{C^+} \frac{ln(z+a)}{z^2+a^2} = 2\pi i \left(\frac{ln(a+ai)}{2ai} - \frac{ln(a-ai)}{2ai}\right) = \frac{\pi}{a}\, ln\, \frac{1+i}{1-i} = \frac{\pi^2}{2a} i.$$

376. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^{2z}dz}{1+e^z}$ ако је $C = \{z \mid |z| = 5\}$.

Решење: Како је $1+e^z = 0$ ако је $e^z = -1$, односно $z = Ln(-1)$, сингуларитети подинтегралне функције f датог интеграла I су тачке $z_k = (2k+1)\pi i$. Међутим, једино тачке $z_0 = \pi i$ и $z_{-1} = -\pi i$ припадају области ограниченој кружницом C. Из

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-\pi i)\frac{e^{2z}}{1+e^z} = e^{2\pi i} \lim_{z\to z_0} \frac{z-\pi i}{1+e^z} = e^{\pi i} = -1,$$

$$\underset{z=z_{-1}}{res} f(z) = \lim_{z\to z_{-1}} (z+\pi i)\frac{e^{2z}}{1+e^z} = e^{2\pi i} \lim_{z\to z_{-1}} \frac{z+\pi i}{1+e^z} = e^{-\pi i} = -1$$

то је

$$I = 2\pi i(\underset{z=z_0}{res} f(z) + \underset{z=z_{-1}}{res} f(z)) = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i.$$

377. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^z dz}{ch\, z}$ ако је $C = \{x+iy \mid |x|+|y| = 2\}$.

Решење: Како је $ch\ z = 0$ ако је $e^z + e^{-z} = 0$, односно $e^{2z}+1 = 0$, $2z = Ln(-1)$, сингуларитети подинтегралне функције f датог интеграла I су тачке $z_k = \dfrac{2k+1}{2}\pi i$. Међутим, једино тачке $z_0 = \dfrac{\pi}{2}i$ и $z_{-1} = -\dfrac{\pi}{2}i$ припадају области ограниченој кружницом C. Из

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = e^{\pi i/2} \lim_{z\to z_0} \frac{z-\pi i/2}{ch\ z} = \frac{e^{\pi i/2}}{sh\ (\pi i/2)} = \frac{e^{\pi i/2}}{i\, sin(\pi/2)} = \frac{1}{i}e^{\pi i/2},$$

$$\underset{z=z_{-1}}{res} f(z) = e^{-\pi i/2} \lim_{z\to z_{-1}} \frac{z+\pi i/2}{ch\ z} = \frac{e^{-\pi i/2}}{sh\ (-\pi i/2)} = \frac{e^{-\pi i/2}}{i\, sin(-\pi/2)} = -\frac{1}{i}e^{-\pi i/2},$$

то је

$$I = 2\pi i(\underset{z=z_0}{res} f(z) + \underset{z=z_{-1}}{res} f(z)) == 2\pi\left(e^{\pi i/2} - e^{-\pi i/2}\right) = 4\pi i.$$

378. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} tan\, 2z dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење: Сингуларитети подинтегралне функције f су тачке $z_k = \dfrac{2k-1}{4}\pi$ $(k \in Z)$. Области коју ограничава кружница C припадају само тачке z_0 и z_1. Како је

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left(z+\frac{\pi}{4}\right) f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{sin\, 2z + 2(z+\pi/4)\, cos\, 2z}{-2\, sin\, 2z} = -\frac{1}{2},$$

и, слично, $res_{z=z_1} f(z) = -\dfrac{1}{2}$, то је $\int_{C^+} tan\, 2z dz = -2\pi i$.

379. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{tan\, z}{z-1} dz$ ако је C четвороугао чија су темена тачке -2, i, 2 и i.

Решење: Сингуларитети подинтегралне функције f су тачке $z = 1$ и $z = \pi/2 + k\pi$, где је $k \in Z$, при чему области датог четвороугла припадају само тачке $z = 1$, $z = -\pi/2$ и $z = \pi/2$. Како је

$$\underset{z=1}{res} f(z) = tan 1, \quad \underset{z=-\pi/2}{res} f(z) = \frac{2}{\pi+2}, \quad \underset{z=\pi/2}{res} f(z) = -\frac{2}{\pi-2},$$

то је

$$\int_{C^+} \frac{tan\, z}{z-1} dz == 2\pi i \left(tan\, 1 - \frac{8}{\pi^2 - 4} \right).$$

380. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{cot\, z}{4z-\pi} dz$ ако је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење: Сингуларитети подинтегралне функције f су тачке $z = \pi/4$ и $z = \pi + k\pi$, где је $k \in Z$, при чему области ограниченој контуром C припадају само тачке $z_1 = \pi/4$ и $z_2 = 0$. Како је

$$\underset{z=z_1}{res} f(z) = \lim_{z\to z_1} \left(z - \frac{\pi}{4} \right) f(z) = \frac{1}{4}, \quad \underset{z=z_2}{res} f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{cos\, z}{4z-\pi} = -\frac{1}{\pi},$$

то је

$$\int_{C^+} \frac{cot\, z}{4z-\pi} dz == 2\pi i \left(\underset{z=z_1}{res} f(z) + \underset{z=z_2}{res} f(z) \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right) = \frac{\pi - 4}{2} \cdot i.$$

381. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^z dz}{sin^2 z}$ где је $C = \{z \mid |z| = 4\}$.

Решење: Сингуларитети подинтегралне функције f су тачке $z = k\pi$, где је $k \in Z$. Како је $\lim\limits_{z\to k\pi} (z - k\pi)^2 f(z) \neq 0$, сви сингуларитети су полови другог реда, при чему је

$$\begin{aligned}
\underset{z=k\pi}{res} f(z) &= \lim_{z\to k\pi} \left((z-k\pi)^2 \frac{e^z}{sin^2 z} \right)' \\
&= \lim_{z\to k\pi} \frac{e^z((z-k\pi)^2 \, sin\, z + 2(z-k\pi)\, sin\, z - 2(z-k\pi)^2 \, cos\, z)}{sin^3 z} \\
&= \lim_{u\to 0} e^{u+k\pi} \frac{u^2 \, sin\, u + 2u\, sin\, u - 2u^2 \, cos\, u}{sin^3 u} \\
&= e^{k\pi}.
\end{aligned}$$

Области коју ограничава кружница C припадају сингуларитети $z = 0$, $z = -\pi$ и $z = \pi$, па је

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(1 + e^{\pi} + e^{-\pi} \right) = 2\pi i (2\, cosh\, \pi + 1).$$

382. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{zdz}{sin^2 z}$ где је $C = \{z \mid |z| = 5\}$.

Решење: Сингуларитети подинтегралне функције f датог интеграла I су тачке $z_k = k\pi$, при чему је у z_0 пол првог реда, а остали сингуларитети су полови другог реда. Како области ограниченој кружницом C припадају само сингуларитети z_{-1}, z_0 и z_1, то је

$$I = 2\pi i(\underset{z=z_{-1}}{res} f(z) + \underset{z=z_0}{res} f(z) + \underset{z_1}{res} f(z)).$$

За пол z_0 имамо да је

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{sin^2 z} = 1.$$

Како је

$$\underset{z=z_1}{res} f(z) = \lim_{z\to\pi} \left((z-\pi)^2 \frac{z}{sin^2 z}\right)'$$

и

$$\left((z-\pi)^2 \frac{z}{sin^2 z}\right)' = \frac{z-\pi}{sin\, z} \cdot \frac{(3z-\pi)\, sin\, z - (2z^2 - 2z\pi)\, cos\, z}{sin^2 z},$$

то је

$$\begin{aligned} \underset{z=z_1}{res} f(z) &= -\lim_{z\to\pi} \frac{(3z-\pi)\, sin\, z - (2z^2 - 2z\pi)\, cos\, z}{sin^2 z} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{(2\pi + 3u)\, sin\, u - (2\pi u + 2u^2)\, cos\, u}{sin^2 u} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Слично добијамо да је

$$\underset{z=z_{-1}}{res} f(z) = \lim_{z\to -\pi} ((z+\pi)^2 f(z))' = 1,$$

па је $I = 6\pi i$.

383. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{dz}{z^2\, sin\, z}$ ако је $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$.

Решење: Ако је I дати интеграл, а f подинтегрална функција, онда је

$$I = -\int_{C^+} f(z)dz = -2\pi i \underset{z=0}{res} f(z).$$

Како функција f има у $z = 0$ пол трећег реда (зашто?), то је

$$\underset{z=0}{res} f(z) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{sin\, z}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(\frac{sin\, z - z\, cos\, z}{sin^2 z}\right)' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} g(z).$$

Ако три пута применимо Лопиталово правило, добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} g(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{sin^2 z + 2\, cos^2 z - 2\, cos\, 2z - z\, sin\, 2z}{3\, sin^2 z\, cos\, z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{2\, sin\, 2z - 2z\, cos\, 2z}{6\, sin\, z\, cos^2 z - 3\, sin^3 z} = \lim_{z\to 0} \frac{cos\, 2z}{3\, cos^3 z}. \end{aligned}$$

Према томе, $\underset{z=0}{res} f(z) = \dfrac{1}{6}$, па је $I = -\dfrac{\pi}{3} i$.