# МАТЕМАТИКА 3

*Драган Ђорић*

# 36 задатака са решењима

*За студенте генерације 2015*

Драган С. Ђорић

# МАТЕМАТИКА
# 3

## ЗБИРКА
## РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

### Глава 3
### Линеарни системи диференцијалних једначина

Факултет организационих наука
Београд, 2009.

из које налазимо да је

$$y = C_1^2 e^{2t} + (C_3 + 2C_1C_2t)e^t - C_2^2, \quad C_3 \in R. \qquad (**)$$

Једнакости $(*)$ и $(**)$ дефинишу функције $x$ и $y$ у зависности од $t$, а из првог интеграла имамо да је $z = y - C_1e^t$.

## 3.2 Хомогени линеарни системи са константним коефицијентима

Реални и различити корени

**233.** Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= x - y + 2z \,. \end{aligned}$$

Решење: Ако је $X(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))^T$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, тада дати систем можемо да напишемо у облику

$$\frac{dX(t)}{dt} = A \cdot X(t),$$

а партикуларно решење

$$x(t) = ae^{\lambda t}, \quad y(t) = be^{\lambda t}, \quad z(t) = ce^{\lambda t}$$

у облику $X(t) = B \cdot e^{\lambda t}$, где је $B = (a\ b\ c)^T$. Из система добијамо услов $\lambda B = A \cdot B$, што значи да је $\lambda$ сопствена вредност, а $B$ сопствени вектор матрице $A$. Решавањем карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$ добијамо да је $\lambda \in \{1, 2, 3\}$.

За $\lambda = 1$ налазимо партикуларно решење $X_1$ из ситема $(A - I)B = 0$. Како је $\{(0\ \alpha\ \alpha), \alpha \in R\}$ скуп решења овог система, за $\alpha = 1$ имамо $a = 0$ и $b = c = 0$, односно $X_1(t) = (0\ 1\ 1)^T e^t$. Слично, за $\lambda = 2$ партикуларно решење $X_2$ добијамо из једначине $(A - 2I)B = 0$, а партикуларно решење $X_3$ из једначине $(A - 3I)B = 0$. Како су $\{(\alpha\ \alpha\ \alpha), \alpha \in R\}$ и $\{(\beta\ 0\ \beta), \beta \in R\}$ скупови решења ових једначина, за $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ је

$$X_2(t) = (1\ 1\ 1)^T e^{2t}, \quad X_3(t) = (1\ 0\ 1)^T e^{3t}.$$

Пошто су $X_1$, $X_2$ и $X_3$ независна партикуларна решења датог система, $F(t) = (X_1\ X_2\ X_3)$ је фундаментална матрица система, а опште решење је $X(t) = F(t) \cdot C$, односно

$$x(t) = C_2e^{2t} + C_3e^{3t}, \quad y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}, \quad z(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$

где је $C = (C_1\ C_2\ C_3)^T$ и $C_1, C_2, C_3 \in R$.

**234.** Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y + z \\ y' &= -x + 5y - z \\ z' &= x - y + 3z\ . \end{aligned}$$

Решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда је

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = p(\lambda).$$

Како је број 2 нула полинома $p(\lambda)$, дељењем $p(\lambda)$ са $\lambda - 2$ добијамо полином $\lambda^2 - 9\lambda + 18$, што значи да су сопствене вредности матрице $A$ бројеви: 2,3 и 6. За $\lambda = 2$ сопствени вектор $(1, 0, -1)^T$ налазимо из система

$$a - b + c = 0, \quad -a + 2b - c = 0, \quad a - b + c = 0,$$

за $\lambda = 3$ сопствени вектор $(1, 1, 1)^T$ налазимо из система

$$b - c = 0, \quad a - 2b + c = 0, \quad a - b = 0,$$

а за $\lambda = 6$ сопствени вектор $(1, -2, 1)^T$ налазимо из система

$$3a + b - c = 0, \quad a + b + c = 0, \quad a - b - 3c = 0.$$

Према томе, независна партикуларна решења су

$$X_1(t) = (1\ 0\ -1)^T e^{2t}, \quad X_2(t) = (1\ 1\ 1)^T e^{3t}, \quad X_3(t) = (1\ -2\ 1)^T e^{6t},$$

а опште решење је

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}, \quad y(t) = C_2e^{3t} - 2C_2e^{6t}, \quad z(t) = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t},$$

где је $C_1, C_2, C_3 \in R$.

**235.** Решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 12x - 4y - 12z \\ z' &= -4x + y + 5z\ . \end{aligned}$$

Решење: Из система следи да је

$$x'' = -4x + y + 5z, \quad x''' = -16x + 5y + 17z.$$

Из прве једнакости и прве једначине система добијамо да је

$$y = -\frac{1}{4}(5x' + x'' - 6x), \quad z = \frac{1}{4}(x' + x'' + 2x), \tag{$*$}$$

па заменом у другој једнакости добијамо линеарну једначину са константним коефицијентима

$$x''' - 3x'' + 2x' = 0. \tag{$**$}$$

Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине је $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, па је $\lambda \in \{0, 1, 2\}$, а опште решење једначине $(**)$ је

$$x(t) = C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in R.$$

Из једнакости (∗) и једнакости

$$x' = C_1e^t + 2C_3e^{2t}, \quad x'' = C_2e^t + 4C_3e^{2t}$$

следи да је

$$y = \frac{3}{2}C_1 - 2C_3e^{2t}, \quad z = \frac{1}{2}C_1 + C_2e^t + 2C_3e^{2t}.$$

Према томе,

$$x(t) = 2D_1 + D_2e^t + D_3e^{2t}, \quad y(t) = 3D_1 - 2C_3e^{2t}, \quad z(t) = D_1 + D_2e^t + 2D_3e^{2t},$$

где је $D_1, D_2, D_3 \in R$.

Друго решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$ следи да је $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

За $\lambda = 0$ из система $AB = 0$, где је $B = (a\ b\ c)^T$, добијамо да је $a = 2\alpha$, $b = 3\alpha$ и $c = \alpha$ ($\alpha \in R$), па за $\lambda = 1$ имамо партикуларно решење $X_1(t) = (2,\ 3,\ 1)^T$.

Слично, за $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$ из система $(A - I)B = 0$ и $(A - 2I)B = 0$ добијамо, на пример, партикуларна решења

$$X_2(t) = (1,\ 0,\ 1)^Te^t, \quad X_3(t) = (1,\ -2,\ 2)^Te^{2t}.$$

Према томе, опште решење је

$$X(t) = (X_1(t)\ X_2(t)\ X_3(t))(D_1\ D_2\ D_3)^T = D_1X_1(t) + D_2X_2(t) + D_3X_3(t).$$

## Двоструки реалан корени

**236.** Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 3y + 3z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= -x - y + 2z\ . \end{aligned}$$

Решење: Карактеристични полином матрице $A$ датог система је $\lambda(\lambda - 1)^2$. За $\lambda = 0$ имамо партикуларно решење $X_1 = (3\ -1\ 1)^T$, а за $\lambda = 1$ имамо партикуларна решења $X_2$ и $X_3$ која су облика $(M_1 + M_2t)e^t$, при чему за $M_1 = (a_1\ b_1\ c_1)^T$ и $M_2 = (a_2\ b_2\ c_2)^T$ узимамо два независна решења система

$$(A - I)M_2 = 0, \quad (A - I)M_1 = M_2,$$

из којег следи да је $c_1 = a_1 + b_1$ и $a_2 = b_2 = c_2 = 0$. За $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$ добијамо $X_2 = (0\ 1\ 1)^Te^t$, а за $a_1 = 1$ и $b_1 = 0$ добијамо $X_3 = (1\ 0\ 1)^Te^t$. Опште решење је $(x\ y\ z)^T = (X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T$, односно

$$x(t) = 3C_1 + C_3e^t, \quad y(t) = -C_1 + C_2e^t, \quad z(t) = C_1 + (C_2 + C_3)e^t.$$

**237.** Решити дати систем свођењем на диференцијалну једначину вишег реда

$$x' = 2x + 4y, \quad y' = -y + z, \quad z' = x + 2z.$$

Решење: Из друге једначине је $z = y' + y$ и $z' = y'' + y'$, а из треће једначине имамо да је $x = y'' - y' - 2y$. Заменом израза за $z$ и $x$ из друге једначине добијамо да је $y'' = x + y + z$, па је

$$y''' = x' + y' + z' = 3(x + y + z) = 3y''.$$

Опште решење једначине $y''' - y'' = 0$ је $y(t) = A + Bt + Ce^{3t}$ $(A, B, C \in R)$, а из израза за $x$ и $z$ добијамо да је

$$x(t) = -2A - B(1 + 2t) + 4Ce^{3t}, \quad z(t) = A + B(1 + t) + 4Ce^{3t}.$$

**238.** Решити систем

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= \phantom{x} - y + 2z\ . \end{aligned}$$

Решење: Карактеристични полином матрице $A$ датог система је $(2-\lambda)(1-\lambda)^2$. За $\lambda = 2$ из система $(A - 2I)(a\ b\ c)^T = 0$ добијамо да је $b = 0$ и $a = c$, па за $a = 1$ имамо партикуларно решење $X_1 = (1\ 0\ 1)^T e^{2t}$. За $\lambda = 1$ из система

$$(A - I)(a_2\ b_2\ c_2)^T = 0, \quad (A - I)(a_1\ b_1\ c_1)^T = (a_2\ b_2\ c_2)^T$$

добијамо да је $a_1 = c_1 + b_2$, $b_1 = c_1 - a_2$ и $b_2 = c_2 = a_2$. За $c_1 = 1$ и $b_2 = 0$ имамо партикуларно решење $X_2$, а за $c_1 = 0$ и $b_2 = 1$ партикуларно решење $X_3$, где је

$$X_2(t) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \right) e^t, \quad X_3(t) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \right) e^t.$$

Опште решење је $X = (X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T$, односно

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_2(1 + t)e^t + C_3 e^{2t}, \\ y(t) &= C_1 e^t + C_2(t - 1)e^t, \\ z(t) &= C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t} \end{aligned}$$

**239.** Решити систем

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + z \\ y' &= x - y + z \\ z' &= x + y - z\ . \end{aligned}$$

Решење: Карактеристични полином матрице $A$ датог система је $(\lambda-1)(\lambda+2)^2$. За $\lambda = 1$ из система $(A - I)(a\ b\ c)^T = 0$ добијамо да је $c = a = b$, па за $a = 1$ имамо партикуларно решење $X_1 = (1\ 1\ 1)^T e^t$. За $\lambda = -2$ из система

$$(A + 2I)(a_2\ b_2\ c_2)^T = 0, \quad (A + 2I)(a_1\ b_1\ c_1)^T = (a_2\ b_2\ c_2)^T$$

добијамо да је $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ и $c_1 = -a_1 - b_1$. За $a_1 = 1$ и $b_1 = 0$ имамо партикуларно решење $X_2$, а за $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$ партикуларно решење $X_3$, где је

$$X_2(t) = (1\ 0\ -1)^T e^{-2t}, \quad X_3(t) = (0\ 1\ -1)^T e^{-2t}.$$

Опште решење је $X = (X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T$, односно

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}, \quad y(t) = C_1 e^t + C_3 e^{-2t}, \quad z(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-2t} - C_3 e^{-2t}.$$

**240.** Решити систем
$$\begin{aligned} x' &= x - 3y + 4z \\ y' &= 4x - 7y + 8z \\ z' &= 6x - 7y + 7z\,. \end{aligned}$$

Решење: Карактеристични полином матрице $A$ датог система је $(\lambda-3)(\lambda+1)^2$. За $\lambda=3$ из система $(A-3I)(a\ b\ c)^T=0$ добијамо да је $2a=b=c$, па за $a=1$ имамо партикуларно решење $X_1=(1\ 2\ 2)^T e^{3t}$. За $\lambda=-1$ из система
$$(A+I)(a_2\ b_2\ c_2)^T=0, \quad (A+I)(a_1\ b_1\ c_1)^T=(a_2\ b_2\ c_2)^T$$
добијамо да је $b_2=2a_2=2c_2$, $a_1=c_1-a_2$ и $b_1=2c_1-a_2$. За $a_2=0$ и $c_1=1$ имамо партикуларно решење $X_2$, а за $a_2=1$ и $c_1=0$ партикуларно решење $X_3$, где је
$$X_2(t)=(1\ 2\ 1)^T e^{-t}, \quad X_3(t)=(t-1\ 2t-1\ t)^T e^{-t}.$$
Опште решење је $(x\ y\ z)^T=(X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T$.

**241.** Решити систем
$$\begin{aligned} x' &= 8x - y - 5z \\ y' &= -2x + 3y + z \\ z' &= 4x - y - z\,. \end{aligned}$$

Решење: Карактеристични полином матрице $A$ датог система је $(\lambda-2)(\lambda-4)^2$. За $\lambda=2$ из система $(A-2I)(a\ b\ c)^T=0$ добијамо да је $a=b=c$, па за $a=1$ имамо партикуларно решење $X_1=(1\ 1\ 1)^T e^{3t}$. За $\lambda=4$ из система
$$(A-4I)(a_2\ b_2\ c_2)^T=0, \quad (A-4I)(a_1\ b_1\ c_1)^T=(a_2\ b_2\ c_2)^T$$
добијамо да је $b_1=-1-a_1$, $c_1=a_1$, $b_2=-a_2$ и $c_2=a_2$. За $a_1=1$ и $a_2=0$ имамо партикуларно решење $X_2$, а за $a_1=0$ и $a_2=1$ партикуларно решење $X_3$, где је
$$X_2(t)=\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}t\right)e^{4t}, \quad X_3(t)=\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}t\right)e^{t}.$$
Опште решење је $(x\ y\ z)^T=(X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T$.

**242.** Решити систем
$$x'=y+z, \quad y'=x+y-z, \quad z'=y+z.$$

Решење: Карактеристични полином матрице $A$ датог система је $\lambda(\lambda-1)^2$. За $\lambda=0$ имамо партикуларно решење $X_1=(2\ -1\ 1)^T$, а за $\lambda=1$ имамо партикуларна решења $X_2$ и $X_3$ која су облика $(M_1+M_2t)e^t$, при чему за $M_1=(a_1\ b_1\ c_1)^T$ и $M_2=(a_2\ b_2\ c_2)^T$ узимамо два независна решења система
$$(A-I)M_2=0, \quad (A-I)M_1=M_2,$$
односно
$$-a_2+b_2+c_2=0,\ a_2-c_2=0,\ b_2=0,\ -a_1+b_1+c_1=a_2,\ a_1-c_1=b_2,\ b_1=c_2. \quad (*)$$

За $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$ добијамо $X_2 = (1\ 0\ 1)^T e^t$, а за $c_1 = 0$ и $c_2 = 1$ добијамо $X_3 = (t\ 1\ t)^T e^t$. Према томе, опште решење је

$$x(t) = 2C_1 + C_2 e^t, \quad y = -C_1 + C_3 e^t, \quad z = C_1 + C_2 e^t + C_3 t e^t, \quad C1, C_2, C_3 \in R.$$

Напомена: Систем (∗) можемо добити из датог система за

$$x = (a_1 + a_2 t)e^t, \quad y = (b_1 + b_2 t)e^t, \quad z = (c_1 + c_2 t)e^t.$$

**243.** Решити систем

$$x' = x - z, \quad y' = -6x + 2y + 6z, \quad z' = -4x - y - 4z.$$

Решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда је $|A - \lambda I| = \lambda^2(\lambda + 1)$. За $\lambda = -1$ имамо $X_1 = (1\ -2\ 2)^T e^{-t}$. За $\lambda = 0$ из система $AM_2 = 0$, $AM_1 = M_2$, односно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

узимамо два линеарно независна решења помоћу којих добијамо партикуларна решења $X_2$ и $X_3$. На пример,

$$X_2 = (1\ 0\ 1)^T, \quad X_3 = (t + 1\ 3\ t)^T.$$

Опште решење је $(x\ y\ z)^T = (X_1\ X_2\ X_3) \cdot (C_1\ C_2\ C_3)^T$, где су $C_1, C_2, C_3$ реалне константе.

Друго решење: Из прве једначине је $z = x - x'$ и $z' = x' - x''$, па из треће једначине следи да је $y = 3x' + x''$ и $y' = 3x'' + x'''$. Заменом израза за $y'$, $y$ и $z$ из друге једначине добијамо да је $x''' + x'' = 0$, одакле налазимо $x(t)$, а затим из прве једначине ситема добијамо $z(t)$, а из треће $y(t)$.

Треће решење: Из датог система следи да је $2x' - y' - 2z' = 0$, односно $2x - y - 2z = D_1$ $(D_1 \in R)$. Ако у трећој једначини система уместо $y$ ставимо $2(x - z) - D_1$ добијамо да је $z' = 2(x - z) + D_1$. Из ове једнакости и прве једначине система следи да је $(x - z)' + (x - z) = -D_1$, односно $x - z = D_2 e^{-t} - D_1$. Како је $x - z = z'$, то је $x = -D_2 e^{-t} - D_1 t + D_3$, а $z$ и $y$ налазимо као у претходном решењу.

**244.** Решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 4x - y - z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= x - y + 2z\ . \end{aligned}$$

Решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда је $|A - \lambda I| = (2 - \lambda)(\lambda - 3)^2$. За $\lambda = 2$ из система $(A - 2I)(a\ b\ c)^T = 0$ добијамо да је $a = b = c \in R$, па је на пример, $X_1 = (1\ 1\ 1)^T e^{2t}$. За $\lambda = 3$ из система $(A - 3I)M_2 = 0$, $(A - 3I)M_1 = M_2$, добијамо да је $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ и $a_1 = b_1 + c_1$. За $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$ и $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$ налазимо партикуларна решења

$$X_2 = (1\ 1\ 0)^T e^{3t}, \quad X_3 = (1\ 0\ 1)^T e^{3t}.$$

Опште решење је $(x\ y\ z)^T = (X_1\ X_2\ X_3) \cdot (C_1\ C_2\ C_3)^T$.

**245.** Решити систем

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z \\ y' &= 3x + 2y + 3z \\ z' &= x - y \end{aligned}$$

Решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда је $|A - \lambda I| = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$. За $\lambda = -1$ из система $(A-2I)(a\ b\ c)^T = 0$ добијамо, на пример, $X_1 = (-1\ 0\ 1)^T e^{-t}$. За $\lambda = 2$ из система $(A-2I)M_2 = 0$, $(A-2I)M_1 = M_2$, где је $M_1 = (a_1\ b_1\ c_1)$ и $M_2 = (a_2\ b_2\ c_2)$, добијамо $X_2$ за $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, односно $X_3$ за $c_1 = -$ и $c2 = 1$,

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1-t \\ -2-3t \\ t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Према томе, опште решење је

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1e^{-t} - (C_2+C_3)e^{2t} - C_3te^{2t} \\ y(t) &= -(3C_2+2C_3)e^{2t} - 3C_3te^{2t} \\ z(t) &= C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3te^{2t}. \end{aligned}$$

## Троструки реалан корен

**246.** Решити систем

$$x' = 4x - y, \quad y' = 3x + y - z, \quad z' = x + z.$$

Решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда је $|A-\lambda I| = (\lambda-2)^3$. Пошто је 2 троструки корен карактеристичног полинома, партикуларна решења су облика $(M_1 + M_2t + M_3t^2)e^{2t}$, где је $M_i = (a_i\ b_i\ c_i)^T$ $(i = 1,2,3)$. Три независна партикуларна решења добијамо узимањем три линеарно независна решења система

$$(A-2I)M_3 = 0, \quad (A-2I)M_2 = 2M_3, \quad (A-2I)M_1 = M_2.$$

Скуп решења овог система је тропараметарска фамилија уређених деветорки, где су, на пример, $a_1$, $a_2$ и $a_3$ слободни параметри. За $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$ добијамо $X_1$, за $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = 1$ добијамо $X_2$, а за $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$ добијамо $X_3$. Према томе,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} t \\ -1+2t \\ -1+2t \end{pmatrix} e^{2t}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t+t^2 \\ 2-2t+t^2 \end{pmatrix} e^{2t},$$

а опште решење је $(x\ y\ z)^T = (X_1\ X_2\ X_3)\cdot(C_1\ C_2\ C_3)^T$, где су $C_1, C_2, C_3$ реалне константе.

**247.** Решити систем

$$x' = 2x - z, \quad y' = x - y, \quad z' = 3x - y - z.$$

Решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда је $|A - \lambda I| = \lambda^3$. Пошто је 0 троструки корен карактеристичног полинома, партикуларна решења су облика $M_1 + M_2 t + M_3 t^2$, где је $M_i = (a_i\ b_i\ c_i)^T$ $(i = 1, 2, 3)$. Три независна партикуларна решења добијамо узимањем три линеарно независна решења система

$$A \cdot M_3 = 0, \quad A \cdot M_2 = 2M_3, \quad A \cdot M_1 = M_2.$$

Ако је, на пример,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} t \\ -1+t \\ -1+2t \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2-2t+t^2 \\ -2t+2t^2 \end{pmatrix},$$

онда је опште решење $(x\ y\ z)^T = (X_1\ X_2\ X_3) \cdot (C_1\ C_2\ C_3)^T$, где су $C_1, C_2, C_3$ реалне константе.

## Једноструки комплексни корени

**248.** Матричном методом решити систем

$$x' = 4x - 3y, \quad y' = 3x + 4y.$$

Решење: Из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$, где је $A$ матрица система, следи да је $\lambda \in \{4 + 3i, 4 - 3i\}$. За $\lambda = 4 + 3i$ из система $(A - (4 + 3i)I)B = 0$, $B = (a\ b)^T$, односно

$$3ia + 3b = 0, \quad 3a - 3ib = 0$$

добијамо комплексно решење $X_{kom}(t) = (1\ \ -i)^T e^{(4+3i)t}$. Ако је $X_1(t) = Re(X_{kom})$ и $X_2(t) = Im(X_{kom})$, онда су $X_1$ и $X_2$ независна партикуларна решења датог система, па је опште решење $(X_1\ X_2) \cdot C$, $C = (C_1\ C_2)^T$, $C_1, C_2 \in R$ односно

$$x = (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)e^{4t}, \quad y = (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)e^{4t}.$$

**249.** Решити систем

$$x' = x - y - z, \quad y' = x + y, \quad z' = 3x + z.$$

Решење: Из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$, где је $A$ матрица система, следи да је $\lambda \in \{1, 1 + 2i, 1 - 2i\}$.

За $\lambda = 1$ из система $(A - I)B = 0$, где је $B = (a\ b\ c)^T$, добијамо да је $a = 0$ и $b = -c = \alpha$ $(\alpha \in R)$. Узимајући $\alpha = 1$ имамо партикуларно решење $X_1$.

За $\lambda = 1 + 2i$ из система $(A - (1 + 2i)I)B = 0$ добијамо да је $a = 2\beta$, $b = -\beta i$ и $c = -3\beta$ и $(\beta \in R)$. Узимајући $\beta = 1$ можмо добити партикуларна решења $X_2$ и $X_3$, при чему је

$$X_2(t) = Re\left((2\ \ -i\ \ -3i)^T e^{(1+2i)t}\right),$$

$$X_3(t) = Im\left((2\ \ -i\ \ -3i)^T e^{(1+2i)t}\right).$$

Према томе,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \ X_2(t) = \begin{pmatrix} 2\,sin\,2t \\ -cos2t \\ -3\,cos\,2t \end{pmatrix} e^t, \ X_3(t) = \begin{pmatrix} 2\,cos\,2t \\ sin\,2t \\ 3\,sin\,2t \end{pmatrix} e^t.$$

Како су $X_1$, $X_2$ и $X_3$ линеарно независна партикуларна решења, то је опште решење $X(t) = (X_1(t)\ X_2(t)\ X_3(t)) \cdot C$, односно

$$\begin{aligned} x(t) &= (2C_2\,sin\,2t + 2C_3\,cos\,2t)e^t \\ y(t) &= (C_1 - C_2\,cos\,2t + C_3\,sin\,2t)e^t \\ z(t) &= (-C_1 - 3C_2\,cos\,2t + 3C_3\,sin\,2t)e^t, \end{aligned}$$

где је $C = (C_1\ C_2\ C_3)^T$, $C_1, C_2, C_3 \in R$.

**250.** Одредити опште решење система

$$x' = -y + z, \quad y' = z, \quad z' = -x + z$$

и партикуларно за које је $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

Решење: Ако је $A$ матрица система, онда из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$ следи да је $\lambda \in \{1, i, -i\}$. За $\lambda = 1$ из система $(A - I)B = 0$, где је $B = (a\ b\ c)^T$ добијамо да је $a = 0$, $b = c = \alpha$ $(\alpha \in R)$, па за $\alpha = 1$ имамо партикуларно решење $X_1(t) = (0,\ 1,\ 1)^T e^t$.

За $\lambda = i$ из система $(A - iI)B = 0$ добијамо да је $a = (1-i)\alpha$, $b = -i\alpha$ и $c = \alpha$ $(\alpha \in R)$, па за $\alpha = 1$ имамо партикуларна решења $X_2$ и $X_3$, где је

$$X_2(t) = Re(X_{kom}(t)), \quad X_3(t) = Im(X_{kom}(t)), \quad X_{kom}(t) = (1-i,\ -i,\ 1)e^{it}.$$

Према томе, опште решење је

$$\begin{aligned} x(t) &= C_2(cos\,t + sin\,t) + C_3(sin\,t - cos\,t) \\ y(t) &= C_1 e^t + C_2\,sin\,t - C_3\,cos\,t \\ z(t) &= C_1 e^t + C_2\,cos\,t + C_3\,sin\,t. \end{aligned}$$

Из датих почетних услова имамо систем

$$C_1 - C_2 = 1, \quad -C_2 + C_3 = 2, \quad C_1 + C_3 = 3$$

из којег следи да је $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ и $C_3 = 0$, што значи да је тражено партикуларно решење

$$x(t) = cos\,t + sin\,t, \quad y(t) = 2e^t + sin\,t, \quad z(t) = 2e^t + cos\,t.$$

**251.** Решити систем

$$x' = 2x - y + 2z, \quad y' = x + 2z, \quad z' = -2x + y - z.$$

Решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда је $|A - \lambda I| = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$. За $\lambda = 1$ имамо $X_1 = (0\ 2\ 1)^T e^t$, а за $\lambda = i$ имамо комплексно партикуларно решење

$$X_{kom} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} cos\,t - sin\,t \\ cos\,t - sin\,t \\ -\,cos\,t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\,t + sin\,t \\ cos\,t + sin\,t \\ -\,sin\,t \end{pmatrix} \cdot i.$$

Ако је $X_2 = Re(X_{kom})$ и $X_3 = Im(X_{kom})$, онда су $X_1$, $X_2$ и $X_3$ независна партикуларна решења, па је опште решење

$$\begin{aligned} x &= (C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t,\\ y &= 2C_1e^t + (C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t,\\ z &= C_1e^t - C_2\cos t - C_3\sin t. \end{aligned}$$

Друго решење: Свођењем на једначину вишег реда добијамо да је $y''' - y'' + y' - y = 0$. Опште решење ове једначине је

$$y(t) = D_1e^t + D_2\cos t + D_3\sin t, \quad D_1, D_2, D_3 \in R,$$

а из једнакости $2x = y - y''$ и $4z = y'' + 2y' - y$ налазимо $x(t)$ и $z(t)$.

**252.** Решити систем

$$x' = 2x + y, \quad y' = x + 3y - z, \quad z' = -x + 2y + 3z.$$

Решење: Ако је $A$ матрица датог система, онда је $|A-\lambda I| = (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+10)$. За $\lambda = 2$ из система $(A - 2I)(a\ b\ c)^T = 0$ имамо да је $a = c$ и $b = 0$, па је $X_1 = (1\ 0\ 1)^T e^{2t}$. За $\lambda = 3 + i$ из система $(A - (3+i)I)(a\ b\ c)^T = 0$, односно

$$-(1+i)a + b = 0 \quad a - bi - c = 0, \quad -a + 2b - ic = 0$$

имамо да је $a = 1 - i$, $b = -2$, $c = a + i$, па за $c = 1$ добијамо комплексно партикуларно решење

$$X_{kom} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3+i)t} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -2\cos t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot e^{3t} \cdot i.$$

Ако је $X_2 = Re(X_{kom})$ и $X_3 = Im(X_{kom})$, онда је опште решење

$$(x\ y\ z)^T = (X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T,$$

односно

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{2t} + (-C_2 + C_3)e^{3t}\cos t + (C_2 + C_3)e^{3t}\sin t,\\ y(t) &= -2C_2e^{3t}\sin t - 2C_3e^{3t}\cos t,\\ z(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^{3t}\sin t + C_3e^{3t}\cos t \end{aligned}$$

**253.** Решити систем

$$\begin{aligned} 6x' &= x + 7y - 5z\\ 2y' &= -x - y + z\\ 3z' &= x - 2y + z\ . \end{aligned}$$

Решење: Дати систем је облика $dX/dt = AX$, где је

$$A = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/6 & -5/6 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad X- = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Како је

$$|A - \lambda I| = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1-6\lambda & 7 & -5 \\ 1 & 1+2\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 1-3\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + \lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 1),$$

то је $|A-\lambda I|=0$ ако је $\lambda\in\{0,-i,i\}$. За $\lambda=0$ из система $A\cdot(a\ b\ c)^T=0$, односно

$$a+7b-5c=0,\quad a+b-c=0,\quad a-2b+c=0$$

добијамо $X_1=(1\ 2\ 3)^T$. За $\lambda=i$ из система $(A-iI)(a\ b\ c)^T=0$ добијамо $X_{kom}(t)=(2,i-1,-i-1)^Te^{it}$, па је

$$X_2(t)=Re(X_{kom})=\begin{pmatrix}2\,cos\,t\\-cos\,t-sin\,t\\-cos\,t+sin\,t\end{pmatrix},\quad X_3(t)=Im(X_{kom})=\begin{pmatrix}2\,sin\,t\\cos\,t-sin\,t\\-cos\,t-sin\,t\end{pmatrix}.$$

Опште решење је $(x\ y\ z)^T=(X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T$.

**254.** Решити систем $x''=2x-3y,\ y''=x-2y$.

Решење: Ако је $A=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$ и $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, дати систем може да се запише у облику

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2}=A\cdot X. \qquad (*)$$

Претпоставимо да је

$$x(t)=ae^{\lambda t},\quad y(t)=be^{\lambda t},\quad B=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Како је $\dfrac{d^2X(t)}{dt^2}=\lambda^2Be^{\lambda t}$, из једначине $(*)$ добијамо да је $A\cdot B=\lambda^2B$, односно $(A-\lambda^2I)B=0$. Ако ову једнакост посматрамо као једначину по $B$, онда је услов $|A-\lambda^2I|=0$ потребан и довољан за постојање нетривијалних решења. Из тог услова следи да је $\lambda\in\{-1,1,i,-i\}$.

За $\lambda=1$ и $\lambda=-1$ из система $(A-I)B=0$ добијамо да је $a=3\alpha$ и $b=\alpha$ $(\alpha\in R)$, па је, на пример,

$$X_1(t)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^t,\quad X_2(t)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-t}.$$

За $\lambda=i$ и $\lambda=-i$ из система $(A+I)B=0$ добијамо да је $a=\alpha$ и $b=\alpha$ $(\alpha\in R)$, па је, на пример,

$$X_3(t)=\begin{pmatrix}sin\,t\\sin\,t\end{pmatrix},\quad X_4(t)=\begin{pmatrix}cos\,t\\cos\,t\end{pmatrix}.$$

Како су $X_1$, $X_2$, $X_3$ и $X_4$ независна партикуларна решења датог система, то је

$$x(t)=3C_1e^t+3e^{-t}+C_3\,sin\,t+C_4\,cos\,t$$
$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\,sin\,t+C_4\,cos\,t,$$

где су $C_1,C_2,C_3,C_4$ реалне константе.

Напомена: Друго решење добијамо ако систем напишемо у нормалном облику

$$x'=u,\quad y'=v,\quad u'=2x-3y,\quad v'=x-2y,$$

где је $z=x'$ и $u=y'$, односно $dX/dt=AX$, где је

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\2&-3&0&0\\1&-2&0&0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\u\\v\end{pmatrix}.$$

Сопствене вредности матрице $A$ су $-1$, $1$, $-i$ и $i$

## Двоструки комплексни корени

**255.** Решити систем

$$x' = -2x - 2y, \quad y' = 4x + 2y, \quad z' = -2x - 2z - 2u, \quad u' = 4x + 4y + 4z + 2u.$$

Решење: Ако је $A$ матрица система, онда је $|A - \lambda I| = (\lambda^2 + 4)^2$. Како је $2i$ двоструки корен карактеристичног полинома, постоје два независна комплексна партикуларна решења облика $(M_1 + M_2 t)e^{2it}$, где је

$$M_1 = (a_1\ b_1\ c_1\ d_1)^T, \quad M_2 = (a_2\ b_2\ c_2\ d_2)^T.$$

Матрице $M_1$ и $M_2$ се одређују из система

$$(A - 2iI)M_2 = 0, \quad (A - 2iI)M_1 = M_2$$

који има две слободне променљиве, на пример, $d_1$ и $d_2$. За $d_1 = 1$ и $d_2 = 0$ добијамо

$$X_{kom} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i/2 - 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(cos\,2t + sin\,2t)/2 \\ cos\,2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (cos\,2t - sin\,2t)/2 \\ sin\,2t \end{pmatrix} \cdot i,$$

а за $d_1 = 0$ и $d_2 = 1$ добијамо

$$X^*_{kom} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ i/1 + 1/2 \\ (1-2i)/4 + (i-1)t/2 \\ t \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} -\,cos\,2t/2 \\ (cos\,2t - sin\,2t)/2 \\ (1/4 - t/2)\,cos\,2t + (1/2 - t/2)\,sin\,2t \\ t\,cos\,2t \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} -\,sin\,2t/2 \\ (cos\,2t + sin\,2t)/2 \\ (-1/2 + t/2)\,cos\,2t + (1/4 + t/2)\,sin\,2t \\ t\,sin\,2t \end{pmatrix} \cdot i.$$

Ако је $X_1 = Re(X_{kom})$, $X_2 = Im(X_{kom})$, $X_3 = Re(X^*_{kom})$, $X_4 = Im(X^*_{kom})$, онда је опште решење $(x\ y\ z\ u)^T = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4$, где су $C_1, C_2, C_3, C_4$ реалне константе.

Напомена: Исто добијамо и ако у дати систем уврстимо

$$x = (a_1 + a_2 t)e^{2it}, \quad y = (b_1 + b_2 t)e^{2it}, \quad z = (c_1 + c_2 t)e^{2it}, \quad u = (d_1 + d_2 t)e^{2it}.$$

## 3.3 Нехомогени линеарни системи

Свођење на једначину вишег реда

**256.** Свођењем на једначину вишег реда решити систем

$$x' = x - 2y + te^{2t}, \quad y' = 4y + x.$$

Решење: Из датог система добијамо једначину

$$y'' - 5y' + 6y = te^{2t} \qquad (*)$$

чије је опште решење $y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + y_p(t)$, где је $y_p(t) = t(at+b)e^{2t}$. Заменом израза за $y_p(t)$ у једначину $(*)$ налазимо да је $a = -1/2$ и $b = -1$. Према томе,

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \left(\frac{t^2}{2} + t\right)e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Из друге једначине система следи да је

$$x(t) = y^{(}t) - y(t) = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + \left(t^2 + t - 1\right)e^{2t}.$$

**257.** Свођењем на једначину вишег реда решити систем

$$\begin{aligned} x' &= -y + cos\,t - sin\,t \\ y' &= -x + cos\,t + sin\,t. \end{aligned}$$

Решење: Из датог система следи да је $x'' - x = -2\,sin\,t - 2\,cos\,t$. Решење ове једначине је

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t} + sin\,t + cos\,t, \quad A, B \in R,$$

а из прве једначине је $y(t) = -x'(t) + cos\,t - sin\,t = -Ae^t + Be^{-t}$.

**258.** Решити систем

$$y' + z' + y = sin\,2x, \quad y'' + z' + 3y + z = e^{2x}.$$

Решење: Из прве једначине следи да је

$$z' = -y' - y + sin\,2x, \quad z'' = -y'' - y' + 2\,cos\,2x,$$

а из друге следи да је

$$y'' = -z'' - 3y' - z' + 2e^{2x}.$$

Заменом израза за $z'$ и $z''$ у овој једнакости имамо једначину

$$y''' - y'' + y' - y = 2e^{2x} - 2\,cos\,2x - sin\,2x$$

чије је опште решење

$$y(x) = Ae^x + B\,cos\,x + C\,sin\,x + \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{1}{5}\,sin\,2x - \frac{4}{5}\,cos\,2x.$$

Из ове једнакости и прве једначине система налазимо да је

$$z(x) = (C - B)\, cos\, x - (B + C)\, sin\, x - 2Ae^{x} - \frac{3}{5}e^{2x} - \frac{1}{15}\, sin\, 2x - \frac{2}{15}\, cos\, 2x.$$

## Метода неодређених коефицијената

**259.** Методом неодређених коефицијената решити систем

$$x' = x - y, \quad y' = 5x - y + sin\, 2t.$$

Решење: Опште решење је

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\, 2t & sin\, 2t \\ cos\, 2t + 2\, sin\, 2t & sin\, 2t - 2\, cos\, 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + X_p(t), \quad A, B \in R$$

где је

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 t \\ b_1 + b_2 t \end{pmatrix} cos\, 2t + \begin{pmatrix} a_3 + a_4 t \\ b_3 + b_4 t \end{pmatrix} sin\, 2t.$$

Заменом израза за $X_p(t)$ у дати систем добијамо да је $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 == b_2 = 1/4$, $a_3 = b_3 = -1/8$, $a_4 = 0$ и $b_4 = 1/2$. Према томе,

$$x(t) = A\, cos\, 2t + \left(B - \frac{1}{8}\right) sin\, 2t + \frac{1}{4} t\, cos\, 2t,$$

$$y(t) = (A - 2B)\, cos\, 2t + \left(2A + B - \frac{1}{8}\right) sin\, 2t + \frac{1}{4} t\, cos\, 2t + \frac{1}{2} t\, sin\, 2t.$$

**260.** Методом неодређених коефицијената решити систем

$$x' = 3x + 2y + 4e^{2t}$$
$$y' = x + 2y + e^{t} - sin\, t.$$

Решење: Матрични запис датог система је $dX/dt = AX + B$, где је

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} sin\, t,$$

а опште решење је

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & 2e^{4t} \\ -e^{t} & e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + X_p(t),$$

где је

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} sin\, t + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} cos\, t.$$

Заменом израза за $X_p(t)$ у дату једначину налазимо да је $a_1 + a_2 = -1/3$, $b_1 = -2/3$, $b_2 = 2/3$, $a = 0$, $b = -2$, $\alpha = -3/17$, $\beta = 7/17$, $\gamma = -5/17$ и $\delta = 6/17$. Према томе,

$$x(t) = Ae^{t} + 2Be^{4t} - \frac{2}{3} te^{t} - \frac{1}{17}(3\, sin\, t + 5\, cos\, t),$$

$$y(t) = \left(-A - \frac{1}{3}\right) e^{t} + Be^{4t} + \frac{2}{3} te^{t} - 2e^{2t} + \frac{1}{17}(7\, sin\, t + 6\, cos\, t).$$

## Метода варијације константи

**261.** Методом варијације константи решити систем

$$x' = 4x + y + at, \quad y' = -2x + y + be^t, \quad a, b \in R.$$

Решење: Из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$ следи да је $\lambda \in \{2, 3\}$, а једна фундаментална матрица је $F(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -2e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix}$. Како је

$$\frac{dC}{dt} = F^{-1}B = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ 2e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} at \\ be^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ate^{-2t} - be^{-t} \\ 2ate^{-3t} + be^{-2t} \end{pmatrix},$$

имамо да је

$$C_1(t) = \left(\frac{a}{2}t + \frac{a}{4}\right)e^{-2t} + be^{-t} + D_1, \quad D_1 \in R$$

$$C_2(t) = \left(-\frac{2}{3}at - \frac{2}{9}a\right)e^{-3t} - \frac{b}{2}e^{-2t} + D_2, \quad D_2 \in R,$$

а опште решење је $(x\ y)^T = F \cdot (C_1\ C_2)^T$, односно

$$x(t) = D_1e^{2t} + D_2e^{3t} - \frac{1}{6}at + \frac{1}{36}a + \frac{1}{2}be^t,$$

$$y(t) = -2D_1e^{2t} - D_2e^{3t} - \frac{1}{3}at - \frac{5}{18}a - \frac{3}{2}be^t.$$

**262.** Методом варијације константи решити систем

$$x' + y' = y - x + tan^2 t + tan\, t - 1$$
$$x' - y' = x + y + tan^2 t - tan\, t - 1.$$

Решење: Симетричан облик система је

$$x' = y + tan^2 t - 1, \quad y' = -x + tan\, t.$$

Из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$ следи да је $\lambda \in \{-i, i\}$, а једна фундаментална матрица је $F(t) = \begin{pmatrix} cos\, t & sin\, t \\ -sin\, t & cos\, t \end{pmatrix}$. Како је

$$\frac{dC}{dt} = F^{-1}\begin{pmatrix} tan^2 t - 1 \\ tan\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cos\, t \\ \dfrac{sin\, t}{cos^2 t} - sin\, t \end{pmatrix},$$

вектор промењљивих константи је

$$C(t) = \begin{pmatrix} -sin\, t + D_1 \\ \dfrac{1}{cos\, t} + cos\, t + D_2 \end{pmatrix}.$$

Према томе, опште решење је

$$x(t) = D_1\, cos\, t + D_2\, sin\, t + tan\, t, \quad y(t) = -D_1\, sin\, t + D_2\, cos\, t + 2.$$

**263.** Методом варијације константи решити систем
$$x' + y' = 4y + e^{at}, \quad y' - x' = 2x - 2y + e^{at} \quad (a > 0).$$

Решење: Симетричан облик система је
$$x' = -x + 3y, \quad y' = x + y + e^{at}.$$
Из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$ следи да је $\lambda \in \{-2, 2\}$, а једна фундаментална матрица је $F(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -3e^{-2t} \\ e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$. Како је
$$\frac{dC}{dt} = F^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{at} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{(a-2)t} \\ e^{(a+2)t} \end{pmatrix},$$
$C(t)$ добијамо интеграцијом зависно од вредности параметра $a$. Према томе,

- за $a = 2$ опште решење је
$$x(t) = x_h + \frac{3}{4} te^{2t} - \frac{3}{16} e^{2t}$$
$$y(t) = y_h + \frac{3}{4} te^{2t} + \frac{1}{16} e^{2t},$$

- за $a = -2$ опште решење је
$$x(t) = x_h - \frac{3}{4} te^{-2t} - \frac{3}{16} e^{-2t}$$
$$y(t) = y_h + \frac{1}{4} te^{-2t} - \frac{3}{16} e^{-2t},$$

- за $a \notin \{-2, 2\}$ опште решење је
$$x(t) = x_h + \frac{3}{a^2 - 4} e^{at}, \quad y(t) = y_h + \frac{a+1}{a^2 - 4} e^{at},$$

где су $x_h(t)$ и $y_h(t)$ решења хомогеног система,
$$x_h(t) = -3D_1 e^{-2t} + D_2 e^{2t}, \quad y_h(t) = D_1 e^{-2t} + D_2 e^{2t}, \quad D_1, D_2 \in R.$$

**264.** Методом варијације константи решити систем
$$x' = x - y + \frac{1}{cos\, t}, \quad y' = 2x - y.$$

Решење: Опште решење датог система је
$$x(t) = C_1(t)\, cos\, t + C_2(t)\, sin\, t, \quad y(t) = (C_1(t) - C_2(t))\, cos\, t + (C_1(t) + C_2(t))\, sin\, t,$$
при чему је
$$\frac{dC}{dt} = \begin{pmatrix} cos\, t & sin\, t \\ cos\, t + sin\, t & -cos\, t + sin\, t \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1/\,cos\, t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - tan\, t \\ tan\, t + 1 \end{pmatrix}.$$
Према томе,
$$C_1(t) = t + ln\,|\,cos\, t| + D_1, \quad C_2(t) = t - ln\,|\,cos\, t + D_2, \quad D_1, D_2 \in R,$$

па је

$$x(t) = D_1 \cos t + D_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (-\sin t + \cos t) \ln|\cos t|,$$
$$y(t) = (D_1 - D_2) \cos t + (D_1 + D_2) \sin t + 2 \cos t \ln|\cos t| + 2t \sin t.$$

**265.** Методом варијације константи решити систем

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 3y + 4z + at \\ y' &= -6x + 7y + 6z + bt \\ z' &= x - y + z + ct, \end{aligned}$$

где су $a$, $b$ и $c$ реални параметри.

Решење: Сопствене вредности матрице система су 1, 2 и 3, а одговарајућа партикуларна решења су

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Како је

$$\frac{dC}{dt} = F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} at \\ bt \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3a - 2b - 3c)te^{-t} \\ (-a + b + 2c)te^{-2t} \\ (-a + b + c)te^{-3t} \end{pmatrix},$$

то је

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -(t+1)(3a - 2b - 3c)e^{-t} + D_1, \quad D_1 \in R \\ C_2(t) &= \frac{1}{4}(2t+1)(a - b - 2c)e^{-2t} + D_2, \quad D_2 \in R \\ C_3(t) &= \frac{1}{9}(3t+1)(a - b - c)e^{-t} + D_3, \quad D_3 \in R \end{aligned}$$

а опште решење је

$$\begin{aligned} x(t) &= D_1 e^t + D_2 e^{2t} + D_3 e^{3t} - \left(\frac{13}{6}a + \frac{7}{6}b + \frac{5}{3}c\right) t + \frac{69}{36}b + \frac{43}{18}c - \frac{95}{36}a, \\ y(t) &= D_1 e^t + D_3 e^{3t} + (-2a + b + 2c)\, t + \frac{5}{3}b + \frac{8}{3}c - \frac{8}{3}a, \\ z(t) &= D_2 e^{2t} - D_3 e^{3t} + \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b - \frac{2}{3}c\right) t - \frac{5}{36}b - \frac{7}{18}c + \frac{5}{36}a. \end{aligned}$$

**266.** Решити систем $x' = x + y + t - 1, \quad y' = -x + y$.

Решење: Ако је дати систем $dX(t)/dt = AX + B(t)$, онда је $X(t) = F(t) \cdot (C_1(t)\ C_2(t))^T$, где је

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = F^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix} \cdot B(t).$$

Из једнакости

$$C_1'(t) = e^{-t}(t-1) \cos t, \quad C_2'(t) = e^{-t}(t-1) \sin t$$

следи да је

$$C_1(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) e^{-t} \cos t + \frac{1}{2} t e^{-t} \sin t + D_1,$$
$$C_2(t) = -\frac{1}{2} t e^{-t} \cos t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin t - \frac{1}{2} t e^{-t} \sin t + D_2,$$

одакле добијамо опште решење.

Решење свођењем на једначину вишег реда. Елиминацијом промењљиве $x$ из датог система добијамо једначину

$$y'' - 2y' + 2y = 1 - t$$

чије је опште решење

$$y(x) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)e^t - \frac{t}{2}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Из друге једначине система је

$$x(t) = y(t) - y'(t) = (C_1 \sin t - C_2 \cos t)e^t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t.$$

**267.** Решити систем

$$x' = 4x - 3y + a \sin t, \quad y' = 2x - y + b \cos t, \quad a, b \in R.$$

Решење: Сопствене вредности матрице система су 1 и 2, а партикуларна решења хомогеног система су

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T e^t, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}^T e^{2t}.$$

Како је

$$\frac{dC}{dt} = F^{-1}(t) \cdot \begin{pmatrix} a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-2t} \sin t - be^{-2t} \cos t \\ -2ae^{-t} + 3be^{-t} \cos t \end{pmatrix},$$

интеграцијом добијамо да је

$$C_1(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} \left((a - 2b) \cos t + (2a + b) \sin t\right) + D_1, \quad D_1 \in R,$$
$$C_2(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \left((2a - 3b) \cos t + (2a + 3b) \sin t\right) + D_2, \quad D_2 \in R.$$

Опште решење је $(x\ y)^T = F \cdot (C_1\ C_2)^T$, односно

$$x = 3D_1 e^{2t} + D_2 e^t + \left(\frac{2}{5}a - \frac{3}{10}b\right) \cos t + \left(\frac{9}{10}b - \frac{1}{5}a\right) \sin t,$$
$$y = 2D_1 e^{2t} + D_2 e^t + \left(\frac{3}{5}a - \frac{7}{10}b\right) \cos t + \left(\frac{11}{10}b + \frac{1}{5}a\right) \sin t.$$

Решење методом неодређених коефицијената. Пошто је $dX/dt = AX + B$, где је $X = (x\ y)^T$ а

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \sin t$$

и пошто $i$ није корен карактеристичног полинома, то је партикуларно решење истог облика као $F$, односно

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \sin t.$$

Ако $X_p$ заменимо у дати систем, добијамо једнакост

$$\begin{pmatrix} -\alpha \sin t + \gamma \cos t \\ -\beta \sin t + \delta \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4\alpha - 3\beta) \cos t + (4\gamma - 3\delta + a) \sin t \\ (2\alpha - \beta + b) \cos t + (2\gamma - \delta) \sin t \end{pmatrix}$$

из које следи систем

$$-\alpha - 4\gamma + 3\delta = a, \quad -4\alpha + 3\beta + \gamma = 0, \quad -\beta - 2\gamma + \delta = 0, \quad -2\alpha + \beta + \delta = b.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$\alpha = \frac{2}{5}a - \frac{3}{10}b, \quad \beta = \frac{3}{5}a - \frac{7}{10}b, \quad \gamma = -\frac{1}{5}a + \frac{9}{10}b, \quad \delta = \frac{1}{5}a + \frac{11}{10}b.$$

**268.** Решити систем

$$x'' = y + \sin t, \quad y'' = x + \cos t.$$

Решење: Ако је $u = x'$ и $v = y'$, имамо систем $dX/dt = A \cdot X$, где је

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопствене вредности матрице $A$ су $-1$, $1$, $-i$ и $i$, а једна фундаментална матрица овог система је

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t & \cos t & \sin t \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & -\sin t & \cos t \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Решење хомогеног система је $X_h = F \cdot C$, где је $C = (C_1\ C_2\ C_3\ C_4)^T$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in R$, а опште решење $X(t) = F \cdot C(t)$, где је

$$dC(t)/dt = F^{-1} \cdot B(t), \quad B(t) = (0\ 0\ \sin t\ \cos t)^T.$$

Како је

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} e^t(-\cos t - \sin t) \\ e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ \cos 2t + \sin 2t - 1 \\ \sin 2t - \cos 2t - 1 \end{pmatrix}$$

то је бе

$$C_1(t) = -\frac{1}{4}e^t \sin t + D_1, \quad C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} \cos t + D_2,$$

$$C_3 = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{8}\cos 2t + D_3, \quad C_4(t) = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t + D_4,$$

где су $D_1$, $D_2$, $D_3$ и $D_4$ реалне константе, па је

$$x(t) = D_1 e^t + D_2 e^{-t} + D_3 \cos t + D_4 \sin t - \frac{1}{8}\sin t - \frac{3}{8}\cos t - \frac{1}{4}t \cos t - \frac{1}{4}t \sin t,$$

$$y(t) = D_1e^t + D_2e^{-t} - D_3\cos t - D_4\sin t - \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{4}t\cos t + \frac{1}{4}t\sin t.$$

Решење свођењем на једначину вишег реда. Из датог система следи да је

$$x''' = y' + \cos t, \quad x^{iv} - x = \cos t - \sin t.$$

Решење последње једначине је $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, где је

$$x_h(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, \quad x_p(t) = t(A\cos t + B\sin t).$$

Како је $x_p^{iv}(t) - x_p(t) = 4A\sin t - 4B\cos t$, то је $A = B = -1/4$. Према томе,

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t - \frac{1}{4}t\sin t - \frac{1}{4}\cos t,$$

а из једнакости $y = x'' - \sin t$ следи да је

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t + \frac{1}{4}t\cos t + \frac{1}{4}t\sin t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t.$$

Напомена: У оба случаја опште решење је

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t} + C\cos t + D\sin t - \frac{1}{4}t\cos t - \frac{1}{4}t\sin t,$$

$$y(t) = Ae^t + Be^{-t} - C\cos t - D\sin t + \frac{1}{4}t\cos t + \frac{1}{4}t\sin t,$$

где су $A$, $B$, $C$ и $D$ реалне константе.