

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ

1992.

1. Матричним методом решити систем

$$x' = 3x + y, \quad y' = y - x + 1.$$

2. Одредити оно решење парцијалне једначине

$$e^x z'_x + \sin^2 x z'_y = \cos^2 x$$

које за $x = 0$ постаје $z = 3y$.

3. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y'' + 2y' + 2y = te^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

1992.

4. Матричним методом решити систем

$$x' = x - 5y - e^{2t}, \quad y' = x + 3y.$$

5. Одредити оно решење парцијалне једначине

$$xu'_x + 2yu'_y + (z + yx^3)u'_z = 0$$

које за $x = 1$ постаје $u = z/y + 1/4$.

6. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y'' + 2y' + y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

1993.

7. Решити систем

$$x' = 2x + 3y + \sin t, \quad y' = -x + 6y.$$

8. Одредити оно решење парцијалне једначине

$$xyz'_x + (y^2 + 1)z'_y = ye^z$$

које за $x = 1$ постаје $z = y^2 + 1$.

9. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y'' + y' - 6y = \cos 3t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

1994.

10. Одредити решење једначине

$$(x + y^3)z'_x + yzz'_y = \sqrt{z^2 + 1}$$

које за $y = 1$ постаје $z^2 - 2x = 0$.

11. Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y - 2e^t \\ y' &= -x - y \end{aligned}$$

12. Применом *Laplace*-ове трансформације решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ y' &= 2x - 2y \end{aligned}$$

ако је $x(0) = y(0) = 1$.

1994.

13. Одредити решење једначине

$$xyu'_x + \sqrt{y^2 - 1}u'_y + (x^2 - z)yu'_z = 0$$

које за $x = 1$ постаје $u = y^2 + 3z$.

14. Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned}x' &= x + 4y + 42e^{-t} \\ y' &= -x - 3y\end{aligned}$$

15. Применом *Laplace*-ове трансформације решити систем

$$\begin{aligned}x' &= x - y \\ y' &= 5x - y - 5e^t\end{aligned}$$

ако је $x(0) = y(0) = 1$.

1995.

16. Одредити решење једначине

$$xu'_x + (xz + y)u'_y + zu'_z = 0$$

које задовољава услов: $u(1, y, z) = y^2$.

17. (1) Одредити диференцијабилну функцију f такву да је $u = x^2 - y^2$, где је $f(z) = u + iv$ и $z = x + iy$.

(2) Израчунати $\int_{C^+} \frac{dz}{(z^2 - 1)(z + 1)}$, где је C круг $|z| = 2$.

18. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити решење система

$$\begin{aligned}x' &= 2x - 5 \\ y' &= -2x + y + 18t\end{aligned}$$

ако је $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

1995.

19. Одредити решење једначине

$$(yz + x)z'_x + yz'_y = z$$

које које за $y = 1$ постаје $x^2 = 2$.

20. (1) Одредити диференцијабилну функцију f такву да је $v = 2xy$, где је $f(z) = u + iv$ и $z = x + iy$.

(2) Израчунати $\int_{C^+} \frac{dz}{(z^2 - 1)(z - 1)}$, где је C круг $|z| = 2$.

21. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити решење система

$$\begin{aligned}x' &= x + 2y + 16e^t \\ y' &= 2x - 2y\end{aligned}$$

ако је $x(0) = -10$, $y(0) = -7$.

1996.

22. Одредити решење једначине

$$xz'_x - 2yz'_y = x^2 + y^2$$

које задовољава услов: $z(x, 1) = x^2$.

23. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити решење система

$$\begin{aligned}x' &= x - 2y + te^t \\ y' &= x - y\end{aligned}$$

које задовољава услов: $x(0) = -1$, $y(0) = 1$.

24. Одредити екстремум функционала J ако је

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2yx + y^2) dx,$$

а $y(0) = e^2 - 1$ и $y(1) = 1$.

1996.

25. Одредити решење једначине

$$2xu'_x - zu'_z + (x^2 - z^2)u'_y = 0$$

које задовољава услов: $u(1, y, z) = y + z^2$.

26. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити решење система

$$\begin{aligned}x' &= x - 5y + e^{2t} \\ y' &= x - y + 1\end{aligned}$$

које задовољава услов: $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

27. Одредити екстремум функционала J ако је

$$J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + 4ye^x - y^2) dx,$$

а $y(0) = 5$ и $y(\pi/2) = 0$.

1997.

28. Одредити решење једначине

$$-zz'_x + yz'_y = y \sin y - z$$

које задовољава услов: $z(x, \pi/2) = 2x$.

29. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити решење система

$$\begin{aligned}x' - y' - 2x + 2y &= \sin t \\ x'' + 2y' + y &= 0\end{aligned}$$

које задовољава услов: $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$.

30. Одредити слабе екстремуме функционала J ако је

$$J[y] = \int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx,$$

а $y(0) = 1$ и $y(1) = e$.

31. Одредити скуп тачака у којима је функција $f : z \mapsto \sin \bar{z}$

(1) диференцијабилна (2) аналитичка.

1997.

32. Одредити решење једначине

$$xu'_x + zu'_y + (xe^x - z)u'_z = 0$$

које задовољава услов: $u(0, y, z) = y + z$.

33. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити решење једначине

$$y'' - 3y' + 2y = 4t + 12e^{-t}$$

које задовољава услов: $y(0) = 0$, $y'(0) = A$ ($A \in \mathbb{R}$).

34. Одредити слабе екстремуме функционала J ако је

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2ye^{2x} + y^2) dx,$$

а $y(0) = 1/3$ и $y(1) = e^2/3$.

35. Израчунати $\int_C \frac{\cos z dz}{z(z+3i)^2}$ ако је C контура која не садржи тачке 0 и $-3i$.

1998.

36. Матричним методом решити систем

$$x' = 2x + y, \quad y' = x + 3y - z, \quad z' = -x + 2y + 3z.$$

37. (1) Нека је $z = x + iy$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Функција f је аналитичка за $x \neq 0$, при чему је

$$v(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{x}.$$

Одредити $u(x, y)$.

- (2) Израчунати $\int_C \frac{z dz}{(3z^2 - 10iz - 3)^2}$ ако је $C = \{z : |z|^2 = \pi\}$.

38. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t), \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

1998.

39. Матричним методом решити систем

$$x' = x - y - z, \quad y' = x + y, \quad z' = 3x + z.$$

40. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''' - y'' = te^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1$$

41. (1) Нека је $z = x + iy$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Функција f је аналитичка за $x \neq 0$ и $u(x, y) = \ln(|z|^2)$. Одредити $v(x, y)$.

- (2) Израчунати $\int_C \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz$ ако је $C = \{z : |z|^2 = 2\}$ и $n \in \mathbb{N}$.