

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ

1992.

1. Одредити партикуларно решење једначине

$$y' = -\frac{x^2 + y^2 + y}{2xy + x + e^y}$$

које задовољава услов $y(0) = 0$.

2. Одредити опште решење једначине

$$y''' - 2y'' + 5y' = 2e^t + 3t - 1.$$

3. Решити систем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+u} = \frac{du}{xy}.$$

1992.

4. Одредити партикуларно решење једначине

$$(2x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

које задовољава услов $y(1) = 1$.

5. Одредити опште решење једначине

$$y''' - y'' + y' + y = \sin x + 3xe^x.$$

6. Решити систем

$$\frac{dx}{x^2z} = \frac{dy}{y^2z} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{x+y}.$$

1992.

7. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - 3y'' + 2y' = 2xe^x.$$

8. Дат је систем диференцијалних једначина

$$u' = -v + 8t, \quad v' = 5u - v.$$

- (1) Одредити фундаменталну матрицу система.
(2) Одредити опште решење система.

9. Одредити решење система диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{z-y}$$

које задовољава услов $x(1) = \sqrt{2}$, $z(1) = 1$.

1992.

10. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - 2y'' + y' = xe^{2x}.$$

11. Дат је систем диференцијалних једначина

$$u' = 2u - 4v + 2, \quad v' = 5u - 2v - 8t.$$

- (1) Одредити фундаменталну матрицу система.
(2) Одредити опште решење система.

12. Одредити решење система диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{z-y} = \frac{dz}{y+z}$$

које задовољава услов $x(1) = 1$, $z(1) = \sqrt{2}$.

1993.

13. Решити диференцијалну једначину

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}.$$

14. Решити диференцијалну једначину

$$u''' + u''^2 = 0.$$

15. Одредити партикуларно решење система

$$\begin{aligned}x' + y' &= 3x + 16te^t \\ x' - y' &= -x + 4y + 16te^t\end{aligned}$$

које задовољава услове $x(0) = 0$ и $y(0) = 1$.

1993.

16. Решити диференцијалну једначину

$$z' + \frac{x}{1+x^2}z = -x\sqrt{z}.$$

17. Решити диференцијалну једначину

$$u''' - u''^2 = 0.$$

18. Одредити партикуларно решење система

$$\begin{aligned}y' - x' &= 3x - 5y + t \\ x' + y' &= x + 3y\end{aligned}$$

које задовољава услове $x(0) = 1$ и $y(0) = 0$.

1994.

19. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y' = \frac{y+2}{x+1} + \tan \frac{y-2x}{x+1}.$$

20. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'' + 6y' + 9y = 6xe^{3x} + 18$$

које задовољава услове $y(0) = 2$ и $y'(0) = 0$.

21. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz-x} = \frac{dz}{z^2}.$$

1994.

22. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$(y' + 1) \ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}.$$

23. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x} + 27x$$

које задовољава услове $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$.

24. Решити систем диференцијалних једначина

$$-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}.$$

1994.

25. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$\frac{2x^3 + 5y}{y^3} y' = \frac{3x^2 + y^2}{y^2}.$$

26. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'' - 4y' - 5y = -3xe^{-x} + 3e^{2x}$$

које задовољава услове $y(0) = 2$ и $y'(0) = 3$.

27. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y - xy^2} = \frac{dz}{xy}.$$

1994.

28. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$\frac{2y - x^3}{x^3} y' = \frac{3y^2 + 2x}{x^4}.$$

29. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x} + 5x^2 + x - 2$$

које задовољава услове $y(0) = 0$ и $y'(0) = 3$.

30. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x\sqrt{y}} = \frac{dy}{-2(xy + 2y\sqrt{y})} = \frac{dz}{x}.$$

1995.

31. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$(2y - x + 1)dx + (2x - 4y + 1)dy = 0$$

које задовољава услов $y(2) = 1$.

32. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + y'(y' + 2e^{-y/2}\sqrt{y'}) = 0.$$

33. Решити систем диференцијалних једначина

$$x' = y + t, \quad y' = -x.$$

1995.

34. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$(4x - 2y + 1)dx + (y - 2x - 3)dy = 0$$

које задовољава услов $y(1) = 2$.

35. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - y' = 2e^{x/2}\sqrt{y'}.$$

36. Решити систем диференцијалних једначина

$$x' = 3x - 2y + e^t, \quad y' = 2x - y.$$

1996.

37. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' - y' &= 2x + t - 1 \\ y' + x &= y.\end{aligned}$$

38. Одредити опште решење једначине

$$y' = \frac{(x + y + 1)e^x - e^y}{(x + y + 1)e^y - e^x}.$$

39. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{dz}{(x^2 - z)y}.$$

1996.

40. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' + y' &= -2y \\ y' + 2x' + 5x &= t + 2.\end{aligned}$$

41. Одредити партикуларно решење једначине

$$yy'' = (y')^2 - (y')^3$$

које задовољава услове $y(1) = 1$ и $y'(1) = -1$.

42. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x + y - xy^2} = \frac{dy}{x^2y - x - y} = \frac{dz}{y^2 - x^2}.$$

1997.

43. Одредити решење једначине

$$(1 + x^2)y' - 4\sqrt{y(1 + x^2)} \arctan x = 2xy$$

које задовољава услов $y(0) = 0$.

44. Одредити опште решење једначине

$$y'' - 2y' + y = -2x^2 + 4e^x + 2 \sin x.$$

45. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = x^2y + tx, \quad \frac{dy}{dt} = xy^2 - ty.$$

1997.

46. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(y-t)}{t(x-y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y(t-x)}{t(x-y)}.$$

47. Одредити опште решење једначине

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

48. Одредити решење једначине

$$(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$$

које задовољава услов: $y(2) = 1/2$.

1998.

49. Одредити решење једначине

$$y' = \frac{y}{x^2 \ln y - x}$$

које задовољава услов: $y(1/2) = 1$.

50. (1) Доказати да су решења $y_1(x)$ и $y_2(x)$ једначине

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

где су $p(x)$ и $q(x)$ непрекидне функције, линеарно независна на (a, b) ако и само ако је $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ за $x \in (a, b)$.

- (2) Испитати да ли је $y(x) = C_1x + C + 2/x^3$ опште решење једначине $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$ за $x \in (0, +\infty)$.

51. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}.$$

1998.

52. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-3z}{5z-2y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{3y-5x}{5z-2y}.$$

53. Решити једначину

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{dy}{x} = \frac{ydx}{x^2}.$$

54. (1) Методом варијације константи извести опште решење једначине $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.

(2) Решити једначину $y'' + y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$.

1999.

55. Решити једначину $yy'' = 1 + y'^2$.

56. (1) Ако су парцијални изводи функција $P : R^2 \rightarrow R$ и $Q : R^2 \rightarrow R$ непрекидни, доказати да је израз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ тотални диференцијал ако и само ако је $P'_y = Q'_x$.

(2) Решити једначину $y'(e^y + x + \sin x) + e^x + y + y \cos x = 0$.

57. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dy}{z+u} = \frac{dz}{u+y} = \frac{du}{y+z} = \frac{dx}{x}.$$

1999.

58. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(y-t)}{t(x+t)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + xy}{t(x+t)}.$$

59. Решити једначину $y'(y^2 - x^2 - 2xy) + y^2 - x^2 + 2xy = 0$.

60. (1) Доказати да је $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$ опште решење једначине

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

где су y_1 и y_2 два линеарно независна решења одговарајуће хомогене једначине, y_p партикуларно решење дате једначине, а C_1 и C_2 произвољне реалне константе.

- (2) Решити једначину $y'' + y = \pi \cos x$.

2000.

61. Решити једначину $y + e^y y' = y'(x + ye^y)$.
62. Решити једначину $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \sin^3 x$.
63. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}.$$

64. Доказати да је свако решење система $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ облика

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + \cdots C_n X_n(t),$$

где су X_1, X_2, \dots, X_n линеарно независна решења.

2000.

65. Решити једначину $(\sqrt{y^2 + x^2} + x)y' = y$.
66. Решити једначину $y''' - y' = \frac{1}{ch x}$.
67. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$x' = x + y + 2z, \quad y' = 3x + 2y + 3z, \quad z' = x - y.$$

68. Одредити опште решење једначине $y' + a(x)y = b(x)$.

2000.

69. Решити једначину $2(x\sqrt{y} - y \cos^2 x)dx = x \cos^2 x dy$.
70. Решити једначину $y''' + 4y' = \cos^4 x$.

71. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{z^2+xy} = \frac{dz}{z(x+z)}.$$

72. Методом варијације константи одредити опште решење једначине

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

ако је $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$ опште решење одговарајуће хомогене једначине.

2000.

73. Решити једначину $y' + \frac{\cot y}{x} + \frac{\ln x}{\sin y} = 0$.

74. Решити једначину $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \ln x$.

75. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$x' = x - y + 2z, \quad y' = 3x + 2y - 3z, \quad z' = 2x + y - z.$$

76. Нека је дата једначина $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, при чему је $P'_y \neq Q'_x$. Ако постоји функција $\lambda(y)$ таква да је

$$\lambda(y)P(x, y)dx + \lambda(y)Q(x, y)dy = 0$$

једначина са тоталним диференцијалом, доказати да је тада

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{Q'_x - P'_y}{P}.$$

2001.

77. Решити једначину $\left(y \sin \frac{y}{x} - x \cos \frac{y}{x}\right) xdy = \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}\right) ydx$.

78. Методом неодређених коефицијената решити једначину

$$y'' + 2ay' + a^2y = xe^x,$$

где је $a \in \mathbb{R}$.

79. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2 + y^2 - yz} = \frac{dy}{xz - x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x-y)z}.$$

80. Доказати да је свако решење система $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ облика

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + \cdots C_n X_n(t),$$

где су X_1, X_2, \dots, X_n линеарно независна решења.

2001.

81. Користећи интеграциони фактор $\lambda(y)$ решити једначину

$$(2x - 1 + \ln y)y' = 2y.$$

82. Решити једначину $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

83. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$x' + y' = y - x + \tan^2 t + \tan t - 1, \quad x' - y' = x + y + \tan^2 t - \tan t - 1.$$

84. Одредити опште решење једначине $y' + a(x)y = b(x)$.

2001.

85. Користећи погодну смену решити једначину

$$y' \cos y - \cos x \sin^2 y = \sin y.$$

86. Методом неодређених коефицијената решити једначину

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos^2 x.$$

87. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 + zy} = \frac{dy}{x^2 - y^2 + zx} = \frac{dz}{z(x - y)}.$$

88. Методом варијације константи одредити опште решење једначине

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

ако је $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ опште решење одговарајуће хомогене једначине.

2001.

89. Решити једначину $(1 - x - y)dy = (x - y)dx$.

90. Испитати да ли је $y = \sin x$ решење једначине

$$y'' \sin^2 x - y' \sin x \cos x + y,$$

а затим одредити њено опште решење.

91. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$x' + y' = 4y + e^{at}, \quad y' - x' = 2x - 2y + e^{at}, \quad (a > 0)$$

92. Нека је дата једначина $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, при чему је $P'_y \neq Q'_x$.
Ако постоји функција $\lambda(y)$ таква да је

$$\lambda(y)P(x, y)dx + \lambda(y)Q(x, y)dy = 0$$

једначина са тоталним диференцијалом, доказати да је тада

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{Q'_x - P'_y}{P}.$$