МАТЕМАТИКА 3

1. Колоквијум, 2004 - Група 8

1. Решити једначину

$$\left(a - \frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \left(b - \frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0, \;\; a, b, c \in R.$$

Решење: Како је

$$\left(a - \frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \left(b - \frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = adx + bdy - \frac{c}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

опште решење дате једначине је

$$ax + by - c\sqrt{x^2+y^2} = A, \;\; A \in R.$$

2. Решити једначину $yy'' = 2yy' \ln y - y' = 0$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ добијамо једначину

$$z(yz' - 2y\ln y - z) = 0.$$

Ако је $z = 0$, тада је $y = A > 0$. Ако је $z \neq 0$, онда имамо линеарну једначину

$$z' - \frac{1}{y} = 2\ln y$$

чије је опште решење $z = y(C + \ln^2 y)$, $C \in R$. Нова диференцијална једначина $y' = y(C + \ln^2 y)$ раздваја променљиве, па је

$$\int \frac{dy}{y(C + \ln^2 y)} = x + D.$$

Разликовањем случајева $C > 0$, $C < 0$ и $C = 0$ добијамо

$$\int \frac{d(\ln y)}{C + \ln^2 y} = \begin{cases} -1/\ln y, & \text{за } C = 0 \\ \frac{1}{B}\arctan\frac{\ln y}{B}, & \text{за } C = B^2 \\ \frac{1}{2F}\ln\left|\frac{\ln y - F}{\ln y + F}\right|, & \text{за } C = -F^2 \end{cases}$$

Према томе, решења су следеће фамилије функција:

1) $y = A > 0$

2) $\ln y = -\dfrac{1}{x+D}$, $D \in R$

3) $\ln y = B\tan(Bx + E)$, $B \in R$, $E \in R$

4) $\ln y = F\dfrac{1 + Ge^{2Fx}}{1 - Ge^{2Fx}}$, $F \in R$, $G \in r$.

3. Матричном методом решити систем

$$x' = x + y, \quad y' = -5x - y + \sin 2t.$$

Решење: Ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

матрични запис система је $dX/dt = AX + F$.

Из $|A - \lambda I| = \lambda^2 + 4 = 0$ добијамо $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$.

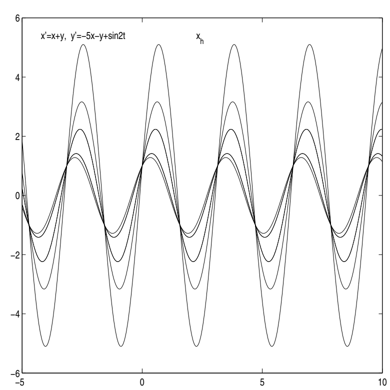
Систем $(A - 2iI)B = 0$, где је $B' = (a\ b)$, је еквивалентан са $(1-2i)a + b = 0$. Једно решење тог система је $a = 1$, $b = 2i - 1$, па је

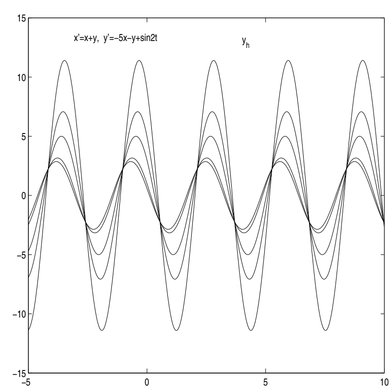
$$X_{kom} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i - 1 \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Фундаментална матрица система је

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t - \cos 2t & 2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$$

и она одређује опште решење хомогеног система. На следеће две слике су дати графици неколико функција x, односно y.





Партикуларно решење датог нехомогеног система може да се одреди методом неодређених коефицијената или методом варијације константи.

Метода неодређених коефицијената

Како је

$$X_p = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} c_1 + d_1 t \\ c_2 + d_2 t \end{pmatrix} \cos 2t,$$

заменом у дати систем добија се алгебарски систем за непознате коефицијенте:

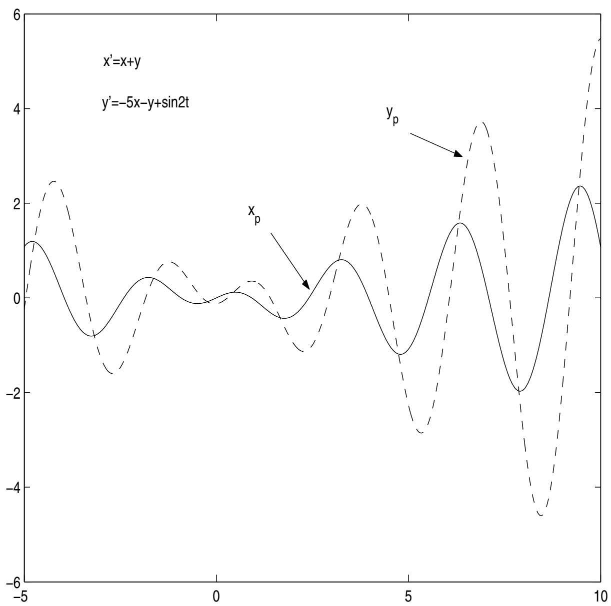
$$b_1 - 2c_1 = a_1 + a_2,\ -2d_1 = b_1 + b_2,\ 2a_1 + d_1 = c_1 + c_2,\ 2b_1 = d_1 + d_2,$$

$$b_2 - 2c_2 = -5a_1 - a_2 + 1,\ -2d_2 = -5b_1 - b_2,\ 2a_2 + d_2 = -5c_1 - c_2,\ 2b_2 = -5d_1 - d_2.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$X_p = \begin{pmatrix} 1/16 \\ -1/16 - t/2 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} -t/4 \\ -1/8 + t/4 \end{pmatrix} \cos 2t.$$

На слици су дати графици функција x_p и y_p.



Метода варијације константи

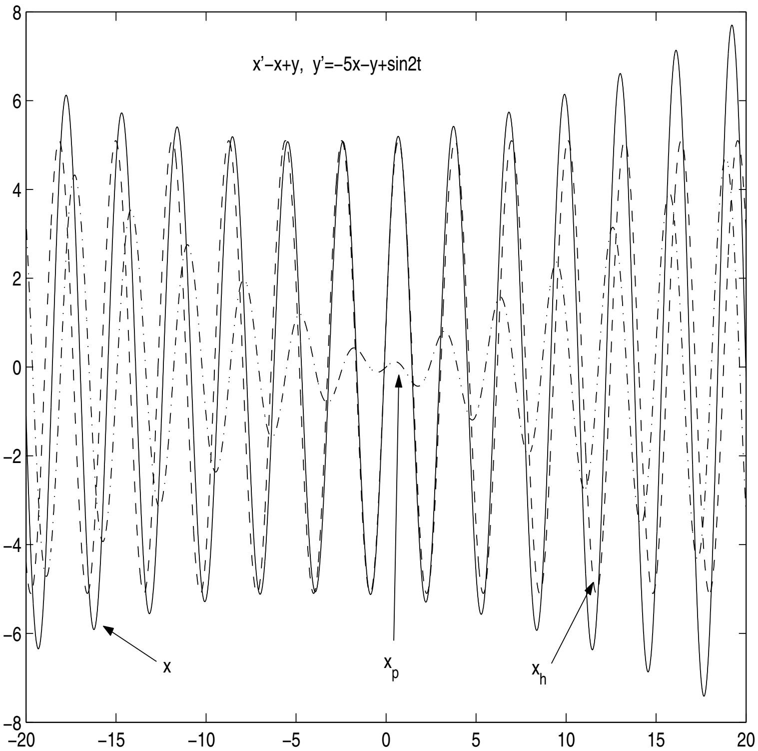
Партикуларно решење датог нехомогеног система је облика $X_p = \Phi \cdot C(t)$, где је

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t) F(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin^2 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

односно

$$C(t) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4t + \sin 4t \\ -\cos 4t \end{pmatrix}$$

Опште решење датог нехомогеног система је $X(t) = \Phi(t) D + X_p(t)$. На следећој слици се види да је $x = x_h + x_p$.



Драган Ђорић