МАТЕМАТИКА 3

Драган Ђорић

35 задатака са решењима

За студенте генерације 2015

Драган С. Ђорић

МАТЕМАТИКА
3

ЗБИРКА
РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Глава 3
Нелинеарни системи диференцијалних једначина

Факултет организационих наука
Београд, 2009.

3 СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

3.1 Нелинеарни системи

Интеграбилне комбинације

198. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{z-y}.$$

Решење: Из датог система следе једнакости

$$d(x+y+z) = 0, \quad \frac{zdx + xdz}{y(z-x)} = \frac{dy}{x-z}$$

из којих добијамо прве интеграле система

$$\varphi(x,y,z) = C_1, \quad \psi(x,y,z) = C_2, \quad C_1, C_2 \in R,$$

где је

$$\varphi = x + y + z, \quad \psi = xz + \frac{1}{2}y^2.$$

Како је

$$\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y \neq 0$$

на области дефинисаности датог система, то су добијеним првим интегралима дефинисане функције y и z у зависности од независне променљиве x и реалних параметара C_1 и C_2.

Напомена 1: На исти начин се проверава да су добијеним првим интегралима дефинисане функције x и y у зависности од независне променљиве z, односно функције x и z у зависности од независне променљиве y. Према томе, у овом примеру можемо изабрати било коју променљиву за независну.

Напомена 2: Уместо провере *Jacobiana*, довољно је било да покажемо како се из првих интеграла система добијају функције y и z. Ако z заменимо са $C_1 - y - x$ у другом првом интегралу, онда једнакост

$$C_1 x - xy - x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C_2$$

имплицитно дефинише функцију y, а $z = C_1 - y - x$.

199. Решити систем диференцијалних једначина

$$y' = \frac{x-z}{z-y}, \quad z' = \frac{y-x}{z-y}.$$

Решење: Из симетричног облика система

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$$

следе једнакости $d(x+y+z) = 0$ $xdx + ydy + zdz = 0$

из којих добијамо прве интеграле система

$$x + y + z = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2, \quad C_1, C_2 \in R. \tag{$*$}$$

Слично као у претходном задатку можемо проверити да ове једнакости дефинишу y и z као функције независне промењливе x и реалних параметара C_1 и C_2.

Напомена: Иако једнакости $(*)$ дефинишу и функције x и y у зависности од промењливе z, то у овом примеру не можемо користити, јер су датим системом већ одређене улоге промењливих.

200. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{z^2-y^2} = \frac{dy}{x^2-z^2} = \frac{dz}{y^2-x^2}.$$

Решење: Из једнакости

$$dx + dy + dz = 0, \quad x^2dx + y^2dy + z^2dz = 0$$

добијамо независне прве интеграле

$$x + y + z = A, \quad x^3 + y^3 + z^3 = B, \quad A, B \in R$$

који дефинишу решење система.

Напомена: На сличан начин се решава и систем

$$\frac{dx}{z^n-y^n} = \frac{dy}{x^n-z^n} = \frac{dz}{y^n-x^n}, \quad n \in N.$$

Да ли се нешто мења ако уместо n ставимо $\alpha \in R$?

201. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax-bz}{cz-ay}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{by-cx}{cz-ay},$$

где су a, b и c реални бројеви.

Решење: Из симетричног облика система

$$\frac{dx}{cz-ay} = \frac{dy}{ax-bz} = \frac{dz}{by-cx}$$

следе једнакости

$$cdy + adz + bdx = 0, \quad ydy + zdz + xdx = 0$$

на основу којих добијамо прве интеграле

$$\varphi(x,y,z)=A,\quad \psi(x,y,z)=B,\quad A,B\in R,$$

где је

$$\varphi(x,y,z)=cy+az+bx,\quad \psi(x,y,z)=y^2+z^2+x^2.$$

Како је

$$\begin{vmatrix}\varphi'_y & \varphi'_z\\ \psi'_y & \psi'_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y & 2z\\ c & a\end{vmatrix}=2(ay-cz)\neq 0$$

на области дефинисаности система, то су добијени први интеграли независни, што значи да одређују опште решење датог система.

Напомена: Типична грешка студената је да из једнакости

$$\frac{d(bx+cy)}{-a(by-cx)}=\frac{dz}{by-cx},\quad \frac{d(bx+az)}{-c(ax-bz)}=\frac{dy}{ax-bz},\quad \frac{d(cy+az)}{-b(cz-ay)}=\frac{dx}{cz-ay}$$

закључе да су

$$-\frac{1}{a}(bx+cy)-z=C_1,\quad -\frac{1}{c}(bx+az)-y=C_2,\quad -\frac{1}{b}(cy+az)-x=C_3$$

независни први интеграли. Међутим, $aC_1=bC_2=cC_3=-A$.

202. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt}=x^2y+tx,\quad \frac{dy}{dt}=xy^2-ty.$$

Решење: Ако је $x=0$, онда је $y(t)=Ae^{-t^2/2}$ $(A\in R)$, а ако је $y=0$, онда је $x(t)=Be^{-t^2/2}$, $B\in R$. За $xy\neq 0$ из симетричног облика система

$$\frac{dx}{x^2y+tx}=\frac{dy}{xy^2-ty}=\frac{dt}{1},$$

добијамо да је

$$\frac{d(xy)}{2(xy)^2}=\frac{dt}{1},\quad \frac{d(x/y)}{x/y}=2tdt,$$

одакле следи да је

$$\frac{1}{xy}+2t=C,\quad \frac{x}{y}e^{-t^2}=D,\quad C,D\in R.$$

Ако су φ и ψ функције дефинисане једнакостима

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{xy}+2t,\quad \psi(x,y)=\frac{x}{y}e^{-t^2},$$

онда је $J[\varphi,\psi]=\dfrac{2e^{-t^2}}{xy^3}\neq 0$ за $xy\neq 0$, па је системом

$$\varphi(x,y)=C,\quad \psi(x,y)=D,\quad C,D\in R$$

дефинисано опште решење датог система.

Напомена: Други први интеграл може да се добије и из прве једнакости система ако y заменимо са $\dfrac{1}{C_1-2t}$ (видети Елиминација променљиве).

203. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = x^2y - tx, \quad \frac{dy}{dt} = xy^2 + ty.$$

Решење: Из симетричног облика система добијамо једнакости

$$\frac{ydx + xdy}{2x^2y^2} = dt, \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = -2tdt,$$

односно

$$\frac{d(xy)}{(xy)^2} = 2t, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{y}{x} = -2tdt,$$

на основу којих имамо прве интеграле

$$\frac{1}{xy} + 2t = C_1, \quad \frac{x}{y}e^{t^2} = C_2, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како су ови први интеграли независини (проверити!), они одређују решење система.

204. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}.$$

Решење: Из датог система следи да је

$$ydy + zdz = 0, \quad \frac{d(y-z)}{z^2 - y^2} = \frac{dx}{x(y+z)}.$$

Интеграљењем ових једнакости добијамо прве интеграле система $\varphi(x,y,z) = C_1$ и $\psi(x,y,z) = C_2$, где је

$$\varphi(x,y,z) = y^2 + z^2, \quad \psi(x,y,z) = x(y-z).$$

Ако је x независна променљива, онда је $J[\varphi,\psi] = -2x(y+z) \neq 0$ за x, y и z из области дефинисаности система, па је једнакостима

$$y^2 + z^2 = C_1, \quad x(y+z) = C_2, \quad C_1 \in R,\ C_2 \in R$$

дефинисано опште решење датог система.

205. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - yx}{x(z-y)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y^2 - xz}{x(z-y)}.$$

Решење: Из симетричног облика система

$$\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}$$

добијамо да је

$$d(x - y + z) = 0, \quad \frac{ydz - zdy}{y^2(y-z)} = \frac{dx}{x(z-y)}.$$

Из прве једнакости следи

$$x - y + z = C_1, \quad C_1 \in R$$

а из друге једнакости следи да је $d\left(\frac{z}{y}\right) + \frac{dx}{x} = 0$, односно

$$\frac{z}{y} + ln\,|x| = C_2, \quad C_2 \in R.$$

Како је $\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} = \frac{1}{y^2}(z-y) \neq 0,\ z \neq y$, где је

$$\varphi(x,y,z) = x - y + z, \quad \psi(x,y,z) = \frac{z}{y} + ln\,|x|,$$

то је једнакостима

$$x - y + z = C_1, \quad \frac{z}{y} + ln\,|x| = C_2$$

дефинисано опште решење система.

Напомена: Уместо провере да је $J[\varphi,\psi] \neq 0$, довољно је било да из претходних једнакости изразимо y и z као функције од x, C_1 и C_2.

206. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(y-t)}{t(x-y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y(t-x)}{t(x-y)}.$$

Решење: Ако дати систем напишемо у симетричном облику

$$\frac{dx}{x(y-t)} = \frac{dy}{y(t-x)} = \frac{dt}{t(x-y)},$$

лако се уочава да је $dx + dy + dt = 0$ и $ytdx + xtdy + xydt = 0$, па су први интеграли система $x + y + t = C_1$ и $xyz = C_2$. Обзиром да је

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yt & xt \end{vmatrix} = t(x-y) \neq 0$$

у области у којој је систем задат, први интеграли су независни и одређују решење система.

207. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{y+xz} = \frac{dy}{x+yz} = \frac{dz}{z^2-1}.$$

Решење: Из датог система следе једнакости

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)(z+1)} = \frac{dz}{(z-1)(z+1)}, \quad \frac{d(x-y)}{(x-y)(z-1)} = \frac{dz}{(z-1)(z+1)}$$

из којих добијамо два прва интеграла система

$$\frac{x+y}{z-1} = C_1, \quad \frac{x-y}{z+1} = C_2, \quad C_1 \in R,\ C_2 \in R.$$

Да ли су ови први интеграли независни? Наравно, јер из претходних једнакости имамо опште решење система

$$x(z, D_1, D_2) = (D_1 + D_2)z - D_1 + D_2,$$
$$y(z, D_1, D_2) = (D_1 - D_2)z - D_1 - D_2.$$

208. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$$

Решење: Из једнакости

$$xdx + ydy + zdz = 0, \quad \frac{ydz + zdy}{yz(y^2 - z^2)} = \frac{dx}{x(y^2 - z^2)}$$

добијамо прве интеграле система

$$\varphi(x, y, z) = C_1, \quad \psi(x, y, z) = C_2, \quad C_1, C_2 \in R,$$

где је

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2, \quad \psi = \frac{zy}{x}.$$

Како је

$$\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ z/x & y/x \end{vmatrix} = \frac{2}{x}(y^2 - z^2) \neq 0,$$

за $y^2 \neq z^2$, добијени први интеграли одређују опште решење система, односно дефинишу функције y и z у зависности од независне промењиве x и реалних константи C_1 и C_2.

209. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}.$$

Решење: Из једнакости

$$\frac{xdx + ydy}{z^2(y^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}, \quad \frac{ydx + xdy}{xy(y^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}$$

добијамо независне (проверити!) прве интеграле

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \quad xyz = C_2, \quad C_1, C_2 \in R$$

који одређују решење система.

210. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x + y - xy^2} = \frac{dy}{x^2y - x - y} = \frac{dz}{y^2 - x^2}.$$

Решење: Из једнакости $xdx + ydy + dz = 0$ добијамо један први интеграл

$$x^2 + y^2 + 2z = C_1, \quad C_1 \in R,$$

а из једнакости

$$\frac{ydx + xdy}{(y^2 - x^2)(1 - xy)} = \frac{dz}{y^2 - x^2},$$

односно $d(xy)/(1 - xy) = dz$ добијамо други први интеграл

$$(1 - xy)e^z = C_2, \quad C_2 \in R.$$

Ови први интеграли су независни јер је

$$\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -ye^z & -xe^z \end{vmatrix} = 2e^z(y^2 - x^2) \neq 0,$$

што значи да одређују опште решење датог система, односно дефинишу функције x и y у зависности од промењиве z и реалних константи C_1 и C_2.

211. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(y - t)}{t(x + t)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + xy}{t(x + t)}.$$

Решење: Из симетричног облика система

$$\frac{dx}{x(y - t)} = \frac{dy}{t^2 + xy} = \frac{dt}{t(x + t)}$$

следе једнакости

$$d(x + t - y) = 0, \quad d\left(\frac{y}{t}\right) = -\frac{dx}{x}$$

из којих добијамо прве интеграле система

$$x + t - y = C_1, \quad xe^{y/t} = C_2, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Пошто је

$$\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} = e^{y/t}\frac{x + t}{t} \neq 0,$$

где је $\varphi = x + t - y$ и $\psi = xe^{y/t}$, добијени први интеграли су независни.

212. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{y(x + y)} = -\frac{dy}{x(x + y)} = \frac{dz}{(x - y)(2x + 2y + z)}.$$

Решење: Из једнакости

$$xdx + ydy = 0, \quad \frac{d(x + y + z)}{x + y + z} = -\frac{d(x + y)}{x + y}$$

добијамо прве интеграле система

$$\varphi(x, y, z) = C_1, \quad \psi(x, y, z) = C_2, \quad C_1, C_2 \in R,$$

где је $\varphi = x^2 + y^2$ и $\psi = (x + y)(x + y + z)$. Пошто је

$$\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} = 2y(x + y) \neq 0,$$

добијени први интеграли одређују опште решење датог система.

213. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2+y^2-yz} = \frac{dy}{xz-x^2-y^2} = \frac{dz}{(x-y)z}.$$

Решење: Из једнакости

$$dx+dy-dz=0, \quad \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \frac{dz}{z}$$

добијамо прве интеграле

$$x+y-z=C_1, \quad \frac{x^2+y^2}{z^2}=C_2, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како су ти први интеграли независни (зашто?), они одређују решење система.

214. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2-y^2+yz} = \frac{dy}{xz+x^2-y^2} = \frac{dz}{(x-y)z}.$$

Решење: Из једнакости

$$dx-dy+dz=0, \quad \frac{xdx-ydy}{x^2-y^2} = \frac{dz}{z}$$

добијамо прве интеграле

$$x-y+z=C_1, \quad \frac{x^2-y^2}{z^2}=C_2, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како су ти први интеграли независни (проверити!), они одређују решење система.

215. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{z^2+xy} = \frac{dz}{z(x+z)}.$$

Решење: Најпре, из једнакости

$$\frac{zdy-ydz}{z^2} = -\frac{dx}{x}$$

добијамо $d\left(\frac{y}{z}\right) = -\frac{dx}{x}$, а затим из ове и једнакости $d(x-y+z)=0$ налазимо прве интеграле

$$x-y+z=C_1, \quad xe^{y/z}=C_2, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како су ти први интеграли независни (проверити!), они одређују решење система.

216. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{z(x+y)^3}.$$

Решење: Из једнакости

$$\frac{dx+dy}{(x+y)^2}=\frac{dz}{z(x+y)^3},\quad \frac{dx+dy}{(x+y)^2}=\frac{dx-dy}{(x-y)^2}$$

добијамо прве интеграле

$$(x+y)^2-2\,ln\,|z|=C_1,\quad \frac{y}{x^2-y^2}=C_2.$$

Како су ови први интеграли независни (зашто?), они одређују решење система.

Елиминација променљиве

217. Решити систем диференцијалних једначина $\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dy}{xy}=-\dfrac{dz}{xz}$.

Решење: Из једначине $dy/y=-dz/z$ следи да је $yz=C_1$, $(C_1\in R)$. Ако у једнакости $\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dy}{xy}$ заменимо yz са C_1, добијамо једначину $xdx=C_1dy/y$ чије је опште решење $y=C_2e^{x^2/(2C_1)}$, $C_2\in R$. Према томе, опште решење датог система је

$$y(x,C_1,C_2)=C_2e^{x^2/(2C_1)},\quad z(x,C_1,C_2)=\frac{C_1}{C_2}e^{-x^2/(2C_1)}.$$

Напомена: Први интеграли система су $yz=C_1$ и $ye^{-x^2/(2yz)}=C_2$.

218. Решити систем диференцијалних једначина $\dfrac{dx}{xy^3}=\dfrac{dy}{x^2z^2}=\dfrac{dz}{y^3z}$.

Решење: Из једначине $dx/x=dz/z$ имамо један први интеграл $x/z=C_1$ $(C_1\in R)$. Ако у једнакости $\dfrac{dy}{x^2z}=\dfrac{dz}{y^3}$ заменимо x са C_1z, добијамо једначину $y^3dy=C_1^2z^3dz$ из које налазимо други први интеграл

$$y^4-x^2z^2=C_2,\quad C_2\in R.$$

Добијени први интеграли одређују опште решење датог система, јер су њима дефинисане, на пример, функције x и y у зависности од независне променљиве z и реалних константи C_1 и C_2.

Напомена: Други први интеграл може да се добије и из једнакости

$$2y^3dy-xz^2dx-zx^2dz=0.$$

219. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{z-x^2}=\frac{dz}{y}.$$

Решење: Из једначине $dx/x=dz$ следи да је $x=Ce^z$ $(C\in R)$, па заменом x са Ce^z у једнакости $(z-x^2)dz=ydy$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$ydy=(z-C^2e^{2z})dz.$$

Решавањем ове једначине налазимо једнакост

$$y^2 = z^2 - C^2e^{2z} + D, \quad D \in R$$

којом је дефинисана функција $y:\ z \to y(z, C, D)$. Према томе, ако је z независна променљива, онда су функције x и y одређене једнакостима

$$x = Ce^z, \quad y^2 = z^2 - C^2e^{2z} + D.$$

Напомена: Елиминацијом константе C из последње једнакости добијамо прве интеграле система

$$xe^{-z} = C, \quad y^2 - z^2 + x^2 = D.$$

220. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}.$$

Решење: Из једнакости $d(x+z) = 0$ имамо један први интеграл

$$x + z = C_1, \quad C_1 \in R. \tag{$*$}$$

Ако у једнакости

$$\frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$$

заменимо $x+z$ са C_1, добијамо једначину $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{C_1+y}$ која се сменом $u = y-x$ своди на једначину $udu = (C_1+x)dx$. Из решења ове једначине

$$u^2 = 2C_1x + x^2 + C_2, \quad C_2 \in R$$

добијамо други први интеграл система

$$y^2 - 2xy - 2x^2 - 2xz = C_2. \tag{$**$}$$

Како једнакост $(*)$ дефинише функцију z у зависности од x и C_1, а једнакост $(**)$ дефинише функцију y у зависности од x, z, C_1 и C_2, то добијени први интеграли одређују опште решење датог система.

Напомена: Једначина $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{C_1+y}$ може да се запише и у облику једначине са тоталним диференцијалом.

221. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}.$$

Решење: Из симетричног облика система

$$\frac{dx}{(y-x)z} = \frac{dy}{(z-1)(y-x)} = \frac{dz}{z}$$

имамо једнакост

$$-\frac{d(y-x)}{y-x} = \frac{dz}{z}$$

из које добијамо један први интеграл $(y-x)z = C_1$ $(C_1 \in R)$. Ако у једнакости

$$\frac{d(y-x)}{y-x} = -\frac{dx}{(y-x)z}$$

заменимо $(y-x)z$ са C_1, добијамо једначину

$$\frac{d(y-x)}{y-x} = -\frac{dx}{C_1}$$

из које налазимо други први интеграл $y - x = C_2 e^{-x/C_1}$ $(C_2 \in R)$. Добијени први интеграли одређују опште решење система

$$y(x, C_1, C_2) = x + C_2 e^{-x/C_1}, \quad z(x, C_1, C_2) = \frac{C_1}{C_2} e^{x/C_1}.$$

222. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2+z^2} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{2xz}.$$

Решење: Решавањем једначине (хомогене) $\dfrac{dx}{x^2+z^2} = \dfrac{dz}{2xz}$, добијамо један први интеграл система

$$z - \frac{x^2}{z} = C_1, \quad C_1 \in R, \tag{$*$}$$

а из једнакости $\dfrac{dx+dz}{(x+z)^2} = \dfrac{dy}{x+z}$ добијамо други први интеграл система

$$(x+z)e^{-y} = C_2, \quad C_2 \in R. \tag{$**$}$$

Једнакост $(*)$ дефинише функцију $z: \ x \to z(x, C_1)$, а једнакост $(**)$ дефинише функцију $y: \ x \to y(x, C_1, C_2)$. Према томе, добијени први интеграли одређују опште решење датог система.

223. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x-2y+t} = \frac{dy}{t-x} = \frac{dt}{t}.$$

Решење: Из једнакости

$$\frac{d(x-y)}{2(x-y)} = \frac{dt}{t}$$

добијамо први интеграл система $(x-y)/t^2 = C_1$ $(C_1 \in R)$. Ако у једнакости $\dfrac{dy}{t-x} = \dfrac{dt}{t}$ заменимо x са $y + C_1 t^2$, добијамо линеарну једначину по y

$$y' + \frac{1}{t}y = 1 - C_1 t$$

чије је решење

$$y = -\frac{1}{3}C_1 t^2 + \frac{1}{2}t + C_2\frac{1}{t}, \quad C_2 \in R. \tag{$*$}$$

Према томе, опште решење датог система је

$$x(t, C_1, C_2) = \frac{2}{3}C_1 t^2 + \frac{1}{2}t + C_2\frac{1}{t},$$
$$y(t, C_1, C_2) = -\frac{1}{3}C_1 t^2 + \frac{1}{2}t + C_2\frac{1}{t}.$$

Напомена: Елиминацијом константе C_1 из једнакости $*$ може да се добије други први интеграл система.

224. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(y^3 - 2x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3 - x^3)} = \frac{dz}{3z(x^3 - y^3)}.$$

Решење: Из једнакости

$$\frac{x^2dx + y^2dy}{2(y^6 - x^6)} = \frac{dz}{3z(x^3 - y^3)}$$

следи да је

$$\frac{d(x^3 + y^3)}{2(x^3 + y^3)(y^3 - x^3)} = \frac{dz}{z(x^3 - y^3)},$$

одакле добијамо један први интеграл система

$$(x^3 + y^3)z^2 = C_1, \quad C_1 \in R. \tag{$*$}$$

Решавањем хомогене једначине $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^4 - x^3y}{y^3x - 2x^4}$ добијамо други први интеграл система

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2y^2} = C_2, \quad C_2 \in R. \tag{$**$}$$

Једнакост $(**)$ дефинише функцију $y: \ x \to y(x, C_1)$, а једнакост $(*)$ дефинише функцију $z: \ x \to z(x, C_1, C_2)$. Према томе, добијеним првим интегралима је одређено опште решење датог система.

225. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

Решење: Из једначине $dy/y = dz/z$ добијамо да је $y = C_1z$ $(C_1 \in R)$, па заменом y са C_1z у једнакости

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dz}{2xz}$$

добијамо Бернулијеву једначину по x

$$\frac{dx}{dz} - \frac{1}{2z}x = -\frac{1 + C_1^2}{2}zx^{-1}.$$

Сменом $u = x^2$ налазимо решење ове једначине

$$x^2 = C_2z - (C_1^2 + 1)z^2, \quad C_2 \in R$$

којим је дефинисана, на пример, функција x независне промењиве z. Према томе, опште решење је одређено једнакостима

$$y = C_1 z, \quad x^2 = C_2 z - (C_1^2 + 1) z^2.$$

Напомена: Елиминацијом константе C_1 из друге једнакости добијамо прве интеграле система

$$\frac{y}{z} = C_1, \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2$$

који су, као што смо видели, независни.

Друго решење: Нека је $z/x = D_1$ један први интеграл. Из прве једнакости система добијамо хомогену диференцијалну једначину

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2(1 + D_1^2)}.$$

Решавањем ове једначине налазимо други први интеграл

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = D_2.$$

Треће решење: Други први интеграл можемо да добијемо и из једнакости

$$\frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x(x^2 - y^2 - z^2) + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dy}{xy}.$$

226. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{dz}{(x^2 - z)y}.$$

Решење: Решавањем диференцијалне једначине која раздваја промењиве

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

добијамо један први интеграл

$$ln\,|x| - \sqrt{y^2 - 1} = C_1, \quad C_1 \in R,$$

а решавањем линеарне (по z) диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{x^2 - z} \qquad (*)$$

добијамо други први интеграл

$$3zx - x^3 = C_2, \quad C_2 \in R).$$

Како добијени први интеграли дефинишу функције y и z у зависности од x и C_1, односно x и C_2, они одређују опште решење датог система.

Напомена: Једначина $(*)$ се једноставније решава ако се напише у облику $(x^2 - z)dx = xdz$, односно $x^2 dx = d(zx)$.

227. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Решење: Један први интеграл је $\dfrac{y}{z} = C$. Ако у једнаккости $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2} = \dfrac{dz}{z}$ заменимо y са Cz, добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$x' - \frac{1}{z}x = (C^2+1)z$$

чије је решење

$$x = Dz + (C^2+1)z^2, \quad D \in R.$$

Враћањем y/z уместо C налазимо други први интеграл

$$\frac{x-y^2-z^2}{z} = D.$$

Добијени први интеграли су независни и одређују решење система.

Напомена: Други први интеграл може да се добије и из једнакости

$$\frac{dx - 2ydy - 2zdz}{x-y^2-z^2} = \frac{dz}{z}.$$

Три непознате функције у систему

228. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{ty} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+x} = \frac{dt}{t}.$$

Решење: Из датог система следе једнакости

$$dy = dt, \quad \frac{d(ty)}{2ty} = \frac{dx}{ty}, \quad \frac{d(z+x-ty)}{z+x-ty} = \frac{dt}{t},$$

из којих добијамо прве интеграле система

$$\frac{y}{t} = C, \quad ty - 2x = D, \quad \frac{z+x-ty}{t} = E, \quad C, D, E \in R.$$

Ако је t независна променљива, онда из прве једнакости имамо функцију y, из друге добијамо функцију x, а из треће функцију z. Према томе, добијени први интеграли дефинишу опште решење система.

Напомена: Уколико не уочимо да из једнакости

$$\alpha = C, \quad \beta = D, \quad \gamma = E,$$

где је

$$\alpha = \frac{y}{t}, \quad \beta = ty - 2x, \quad \gamma = \frac{z+x-ty}{t}$$

можемо да добијемо x, y и z у функцији од t, C, D и E, онда из једнакости

$$\begin{vmatrix} \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z \\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z \\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/t \\ 2 & -t & 0 \\ 1/t & -1 & 1/t \end{vmatrix} = -\frac{2}{t^2}$$

можемо да закључимо да су добијени први интеграли независни.

229. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z+u} = \frac{dz}{y+u} = \frac{du}{y+z}.$$

Решење: Из једнакости

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d(y-z)}{y-z}, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{d(y-u)}{y-u}, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{d(z-u)}{z-u}$$

добијамо прве интеграле система

$$x(y-z) = C_1, \quad x(y-u) = C_2, \quad x(z-u) = C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in R.$$

Међутим, ови први интеграли нису независни јер је $C_3 = C_2 - C_1$. Дакле, уместо трећег првог интеграла треба наћи нови који са прва два чини скуп независних првих интеграла система. Из једнакости

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(y+z+u)}{2(y+z+u)}$$

имамо први интеграл $\dfrac{y+z+u}{x^2} = C_4,\ C_4 \in R$. Једнакости

$$x(y-z) = C_1, \quad x(y-u) = C_2, \quad \frac{y+z+u}{x^2} = C_4$$

дефинишу опште решење система, јер из њих добијамо да је

$$3y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x} + C_3x^2,$$

односно

$$y = (D_1 + D_2)\frac{1}{x} + D_3x^2, \quad z = (D_2 - 2D_1)\frac{1}{x} + D_3x^2, \quad u = (D_1 - 2D_2)\frac{1}{x} + D_3x^2,$$

где су D_1, D_2 и D_3 произвољне реалне константе.

230. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}.$$

Решење: Из датог система следе једнакости

$$d(x+z) = 0, \quad d(y+u) = 0, \quad \frac{d(x-z)}{y-u} = \frac{d(y-u)}{z-x}$$

из којих добијамо прве интеграле система

$$\alpha(x,y,z,u) = A, \quad \beta(x,y,z,u) = B, \quad \gamma(x,y,z,u) = C, \quad A, B, C \in R,$$

где је

$$\alpha(x,y,z) = x+z, \quad \beta(x,y,z) = y+u, \quad \gamma(x,y,z) = (x-z)^2 + (y-u)^2.$$

Како је

$$\begin{vmatrix} \alpha'_y & \alpha'_z & \alpha'_u \\ \beta'_y & \beta'_z & \beta'_u \\ \gamma'_y & \gamma'_z & \gamma'_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2(y-u) & -2(x-z) & -2(y-u) \end{vmatrix} = 4(y-u) \neq 0$$

за $y \neq u$, то добијени први интеграли дефинишу опште решење датог система.

Напомена: Провера независности добијених првих интеграла није неопходна ако уочимо да из њих можемо да изразимо y, z и u у функцији од x, A, B и C.

231. Решити систем диференцијалних једначина

$$x' = \frac{x-y}{z-u}, \quad y' = \frac{x-y}{z-u}, \quad z' = x - y + 1.$$

Решење: Из симетричног облика система

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x-y} = \frac{dz}{(x-y+1)(z-u)} = \frac{du}{z-u}$$

следе једнакости

$$dx = dy, \quad \frac{d(x+y)}{2(x-y)} = \frac{d(z-u)}{(x-y)(z-u)}, \quad \frac{dz}{(x-y+1)(z-u)} = \frac{du}{z-u}.$$

Из прве две једнакости добијамо прве интеграле система

$$x - y = A, \quad x + y = ln(z-u)^2 + B, \quad A, B \in R, \tag{$*$}$$

а из треће једнакости следи да је $dz = (A+1)du$, односно

$$z = (A+1)u + C, \quad C \in R). \tag{$**$}$$

Из једнакости $(*)$ и $(**)$ добијамо опште решење датог система

$$\begin{aligned} x(u, A, B, C) =& ln(Au + C) + \frac{1}{2}(A+B), \\ y(u, A, B, C) =& ln(Au + C) + \frac{1}{2}(B-A), \\ z(u, a, B, C) =& (A+1)u + C. \end{aligned}$$

232. Решити систем диференцијалних једначина

$$x' = y - z, \quad y' = x^2 + y, \quad z' = x^2 + z.$$

Решење: Из симетричног облика система

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{x^2+y} = \frac{dz}{x^2+z} = dt$$

следи једнакост $\dfrac{d(y-z)}{y-z} = dt$ из које добијамо један први интеграл

$$\frac{y-z}{e^t} = C_1, \quad C_1 \in R.$$

Ако у једнакости $dx = (y-z)dt$ заменимо $y-z$ са C_1e^t, добијамо једначину $dx = C_1e^t dt$ из које налазимо да је

$$x = C_1e^t + C_2, \quad C_2 \in R. \tag{$*$}$$

Најзад, ако у једнакости $dy = (x^2+y)dt$ заменимо x са $C_1e^t+C_2$, добијамо линеарну једначину

$$\frac{dy}{t} - y = C_1^2e^{2t} + C_2^2 + 2C_1C_2e^t$$

из које налазимо да је

$$y = C_1^2 e^{2t} + (C_3 + 2C_1C_2t)e^t - C_2^2, \quad C_3 \in R. \qquad (**)$$

Једнакости $(*)$ и $(**)$ дефинишу функције x и y у зависности од t, а из првог интеграла имамо да је $z = y - C_1e^t$.

3.2 Хомогени линеарни системи са константним коефицијентима

Реални и различити корени

233. Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= x - y + 2z\ . \end{aligned}$$

Решење: Ако је $X(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))^T$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, тада дати систем можемо да напишемо у облику

$$\frac{dX(t)}{dt} = A \cdot X(t),$$

а партикуларно решење

$$x(t) = ae^{\lambda t}, \quad y(t) = be^{\lambda t}, \quad z(t) = ce^{\lambda t}$$

у облику $X(t) = B \cdot e^{\lambda t}$, где је $B = (a\ b\ c)^T$. Из система добијамо услов $\lambda B = A \cdot B$, што значи да је λ сопствена вредност, а B сопствени вектор матрице A. Решавањем карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$ добијамо да је $\lambda \in \{1, 2, 3\}$.

За $\lambda = 1$ налазимо партикуларно решење X_1 из ситема $(A - I)B = 0$. Како је $\{(0\ \alpha\ \alpha), \alpha \in R\}$ скуп решења овог система, за $\alpha = 1$ имамо $a = 0$ и $b = c = 0$, односно $X_1(t) = (0\ 1\ 1)^T e^t$. Слично, за $\lambda = 2$ партикуларно решење X_2 добијамо из једначине $(A - 2I)B = 0$, а партикуларно решење X_3 из једначине $(A - 3I)B = 0$. Како су $\{(\alpha\ \alpha\ \alpha), \alpha \in R\}$ и $\{(\beta\ 0\ \beta), \beta \in R\}$ скупови решења ових једначина, за $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ је

$$X_2(t) = (1\ 1\ 1)^T e^{2t}, \quad X_3(t) = (1\ 0\ 1)^T e^{3t}.$$

Пошто су X_1, X_2 и X_3 независна партикуларна решења датог система, $F(t) = (X_1\ X_2\ X_3)$ је фундаментална матрица система, а опште решење је $X(t) = F(t) \cdot C$, односно

$$x(t) = C_2e^{2t} + C_3e^{3t}, \quad y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}, \quad z(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$

где је $C = (C_1\ C_2\ C_3)^T$ и $C_1, C_2, C_3 \in R$.