МАТЕМАТИКА 3

Драган Ђорић

79 задатака са решењима

За студенте генерације 2015

Драган С. Ђорић

МАТЕМАТИКА
3

ЗБИРКА
РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Глава 2
Диференцијалне једначине вишег реда

Факултет организационих наука
Београд, 2009.

2 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА

2.1 Једначине којима се може снизити ред

$$\boxed{F(x, y', y'', y''') = 0}$$

Избором одговарајуће смене решити дату једначину.

119. $y'' + y' \, tan\, x = sin\, 2x.$

Решење: Дата једначина не садржи тражену функцију y, па се сменом $z(x) = y'$ своди на линеарну једначину

$$z' + z \, tan\, x = sin\, 2x$$

чије је решење $z = -2\, cos^2 x + C\, cos\, x$ $(C \in R)$. Из једначине $y' = -2\, cos^2 x + C\, cos\, x$ добијамо да је

$$y = -x - \frac{1}{2}\, sin\, 2x + C\, sin\, x + D, \quad D \in R.$$

120. $y''\, cos\, x + y'\, sin\, x = 1 + cos^2 x.$

Решење: Сменом $z(x) = y'$ дата једначина се своди на линеарну једначину

$$z' + z\, tan\, x = \frac{1 + cos^2 x}{cos\, x}$$

чије је решење $z = x\, cos\, x + sin\, x + A\, cos\, x$, $A \in R$. Према томе,

$$\begin{aligned} y &= \int (x\, cos\, x + sin\, x + A\, cos\, x) dx \\ &= \int d(x\, sin\, x) + A\, sin\, x \\ &= x\, sin\, x + A\, sin\, x + B, \end{aligned}$$

где је $B \in R$.

121. $ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$ $(a \in R)$.

Решење: За $a = 0$ једначина нема решења. За $a \neq 0$, сменом $z = y'$, добијамо једначину $az' = \sqrt{1 + z^2}$ чије је решење $z(x) = sh(x/a + C)$ $(C \in R)$. Према томе,

$$y(x) = \int z(x) dx + D = a \cdot ch\left(\frac{x}{a} + C\right) + D, \quad D \in R.$$

122. $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$.

Решење: Сменом $z(x) = y''$ добијамо једначину $z' = \sqrt{1+z^2}$ чије је решење $arcsh\, z = x + C$ $(C \in R)$, односно $z = sh\,(x + C)$, па је

$$y' = ch\,(x + C) + D, \quad y = sh\,(x + C) + Dx + E, \quad D, E \in R.$$

123. $y''\, sin^3 x + y'\, sin^2 x\, cos\, x = sin\, x$.

Решење: Сменом $z(x) = y'$ добијамо линеарну једначину $z' + cot\, x \cdot z = \dfrac{1}{sin^2 x}$ чије је решење

$$z(x) = \frac{1}{sin\, x}\left(ln\left|tan\,\frac{x}{2}\right| + A\right), \quad A \in R.$$

Како је

$$\int \frac{ln\left|tan\,\frac{x}{2}\right|}{sin\, x}dx = \int ln\left|tan\,\frac{x}{2}\right| d\left(ln\left|tan\,\frac{x}{2}\right|\right) = \frac{1}{2}\, ln^2\left|tan\,\frac{x}{2}\right|,$$

то је

$$y(x) = \frac{1}{2}\, ln^2\left|tan\,\frac{x}{2}\right| + A\, ln\left|tan\,\frac{x}{2}\right| + B, \quad B \in R.$$

124. $x^2 y''' = ln\, x$.

Решење: Једначина је дефинисана за $x > 0$. Интеграцијом леве и десне стране једнакости $y''' = ln\, x/x$ добијамо да је

$$y'' = -\frac{ln\, x}{x} - \frac{1}{x} + C, \quad C \in R,$$

одакле следи да је

$$y' = -\frac{1}{2}\, ln^2 x - ln\, x + Cx + D, \quad y = -\frac{x}{2}\, ln^2 x + \frac{C}{2}x^2 + Dx + E, \quad D, E \in R.$$

125. $y'' x\, ln\, x + y'(ln\, x + 1) = 0$.

Решење: Сменом $z(x) = y'$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$\frac{dz}{z} = -\frac{ln\, x + 1}{x\, ln\, x}dx$$

из које следи да је

$$ln|z| = -\int \frac{dx}{x} - \frac{dx}{x\, ln\, x} = -\, ln\,|x\, ln\, x| + A, \quad A \in R,$$

односно $z = \dfrac{B}{x\, ln\, x}$ $(B \in R)$. Према томе,

$$y(x) = B\int \frac{dx}{x\, ln\, x} = B\, ln\,|\, ln\, x| + C,\ C \in R.$$

126. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$.

Решење: Сменом $z(x) = y'$ добијамо линеарну једначину

$$z' - \frac{x}{1 - x^2}z = \frac{2}{1 - x^2}$$

чије је решење

$$z(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\,arcsin\,x + A), \quad A \in R.$$

Решавањем једначине $y' = z$ налазимо да је

$$y(x) = arcsin^2\,x + A\,arcsin\,x + B, \quad B \in R.$$

127. $(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2} = y''$.

Решење: Сменом $z(x) = y'$ добијамо једначину $z' = (1+z^2)^{3/2}$. Како је, након смене $z = tan\,t$,

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \int cos\,tdt = sin\,t = \frac{z}{\sqrt{1+t^2}},$$

то је $z/\sqrt{1+z^2} = x + A$ $(A \in R)$, односно $z = \pm\dfrac{x+A}{\sqrt{1-(x+A)^2}}$. Решавањем једначине $y' = z$ налазимо да је $y + B = \pm\sqrt{1-(x+A)^2}$ $(B \in R)$ или

$$(x+A)^2 + (y+B)^2 = 1.$$

Према томе, интегралне криве дате једначине су јединичне кружнице.

128. $(x+a)y'' + xy'^2 = y'$.

Решење: Сменом $z = y'$ добијамо Бернулијеву једначину

$$z' - \frac{1}{x+a}z = -\frac{x}{x+a}z^2$$

која се сменом $u = z^{-1}$ своди на линеарну једначину $u' + \dfrac{1}{x+a}u = \dfrac{x}{x+a}$ чије је решење

$$u = \frac{C_1}{x+a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{x+a}, \quad C_1 \in R.$$

Према томе, $y' = 2\cdot\dfrac{x+a}{x^2+C}$ $(C \in R)$. Ако је $C > 0$, онда је $C = D_1^2$, па је

$$y(x) = ln(x^2 + D_1^2) + \frac{2a}{D_1}\,arctan\,\frac{x}{D_1} + D_2, \quad D_1 \neq 0,\ D_2 \in R.$$

Ако је $C < 0$, онда је $C = -E_1^2$, па је

$$y(x) = ln\,|x^2 - E_1^2| - \frac{a}{E_1}\,ln\left|\frac{x+E_1}{x-E_1}\right| + E_2, \quad E_1 \neq 0,\ E_2 \in R.$$

Ако је $C = 0$, онда је $y(x) = 2\,ln\,|x| - 2a/x + A$ $(A \in R)$.

$$\boxed{F(y, y', y'', y''', y^{iv}) = 0}$$

129. $y''y^3 + 1 = 0$.

Решење: Сменом $z(y) = y'$ добијамо једначину $zdz = -dy/y^3$ чије је решење $z^2 = 1/y^2 + A$ $(A \in R)$. Решавањем једначине $y' = \pm\dfrac{\sqrt{1+Ay^2}}{y}$ налазимо да је

$$\pm\frac{1}{A}\sqrt{1+Ay^2} = x + B, \quad A \neq 0,\ B \in R,$$

односно $Ay^2 = (Ax + C)^2 - 1, \quad C \in R$.

130. $yy'' = y'' + 2y'^2$.

Решење: Сменом $z(y) = y'$ добијамо да је $z(2z - (y-1)z') = 0$, односно $z = 0$ или $2z = (y-1)z'$. У првом случају је $y = A$ $(A \in R)$, а у другом случају из једначине $\dfrac{dz}{2z} = \dfrac{dy}{y-1}$, за $y \neq 1$, добијамо да је $z = B(y-1)^2$ $(B \geq 0)$. Решавањем једначине $y' = B(y-1)^2$ налазимо опште решење

$$(x + C)(y - 1) = D, \quad C \in R,\ D \leq 0.$$

Решење $y = A$ је сингуларно и садржи решење $y = 1$.

131. $2yy'' = y'^2$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ имамо $y'' = zz'$, па се дата једначина своди на једначину

$$2yzz' = z^2.$$

Према томе, $z = 0$ или $2yz' = z$. Из $z = 0$ следи да је $y = A$ $(A \in R)$, а из једначине $2yz' = z$ добијамо да је $z = B\sqrt{y}$ $(B \in R)$, па је $y' = B\sqrt{y}$, односно

$$y = (Cx + D)^2, \quad C, D \in R. \tag{$*$}$$

Напомена: Решења $y = A$ за $A < 0$ нису обухваћена фамилијом решења $(*)$.

132. $yy'' = y' + y'^2$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ дата једначина се своди на линеарну једначину

$$z' - \frac{1}{y}z = \frac{1}{y}$$

чије је опште решење $z = Cy - 1$ $(C \in R)$. Решавањем једначине $y' = Cy - 1$ добијамо да је $Cy = 1 + De^{Cx},\ D \in R$.

133. $y'' = 1 + y'^2$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ дата једначина се своди на Бернулијеву једначину $z' - z = z^{-1}$, а ова сменом $u(y) = z^2$ на једначину $u' = 2(u+1)$ чије је решење $u = Ae^{2y} - 1$ $(A > 0)$. Према томе, $z = \pm\sqrt{Ae^{2y} - 1}$, односно

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{Ae^{2y} - 1}} = dx.$$

Сменом $e^{2y} - 1 = t^2$ лако интегралимо обе стране претходне једнакости и добијамо да је $\pm\, arctan\, t = x + D$ $(D \in R)$, односно $t^2 = tan^2(x + D)$, односно $e^{2y} = B/\,cos^2(x + D)$ $(B > 0)$, односно

$$y = C - ln|\,cos(x + D)|, \quad C, D \in R.$$

134. $yy'' = y'^2 - y'^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = -1.$

Решење: Сменом $z(y) = y'$ добијамо Бернулијеву једначину

$$z' - \frac{1}{y}z = -\frac{1}{y}z^2 \tag{$*$}$$

која се сменом $u(y) = z^{-1}$ своди на линеарну једначину чије је решење $u = C/y + 1$. Решавањем једначине $y' = y/(C + y)$ добијамо опште решење

$$C\,ln\,|y| + y = x + D, \quad D \in R.$$

Из датих почетних услова следи да је $D = 0$ и $C = -2$, па је $ln\,y^2 = y - x$ тражено Кошијево решење.

Напомена: Једначина $(*)$ може да се напише и у облику једначине која раздваја променљиве $\dfrac{dz}{z - z^2} = \dfrac{dy}{y}$ из које добијамо да је $\dfrac{z}{1 - z} = Cy$.

135. $yy'' = 1 + y'^2.$

Решење: Сменом $z(y) = y'$ добијамо Бернулијеву једначину $z' - \dfrac{1}{y}z = \dfrac{1}{y}z^{-1}$ која се сменом $u(z) = z^2$ своди на линеарну једначину $u' - 2u/y = 2/y$ из које следи

$$u = Ay^2 - 1 = \frac{1}{B^2}\left(y^2 - B^2\right).$$

Решавањем једначине $y' = \pm\dfrac{1}{B}\sqrt{y^2 - B^2}$ добијамо да је

$$ln\left|\frac{y + \sqrt{y^2 - B^2}}{B}\right| = \pm\frac{x + C}{B},$$

односно $y = B \cdot ch\dfrac{x + C}{B}$ $(B, C \in R)$.

136. $2yy'' = 1 + y'^2.$

Решење: Сменом $y' = z(y)$ дата једначина се своди на Бернулијеву која се сменом $u(y) = z^2$ своди на линеарну

$$u' - \frac{1}{y}u = \frac{1}{y}$$

чије је опште решење $u = Cy - 1$ $(C \in R)$. Решавањем једначине $y' = \pm\sqrt{Cy - 1}$ добијамо да је

$$\pm\sqrt{Cy - 1} = \frac{C}{2}x + \frac{D}{2},\ D \in R,$$

па је $y = \dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{4C}(Cx + D)^2$.

137. $yy'' = y^2\,ln\,y + y'^2.$

Решење: Приметимо да је $y > 0$. Сменом $y' = z(y)$ дата једначина се своди на Бернулијеву једначину

$$z' - \frac{1}{y}z = z^{-1}y\,ln\,y,$$

а ова сменом $u(y) = z^2$ на линеарну једначину $u' - \dfrac{2}{y}u = 2y\,ln\,y$. Према томе,

$$u = y^2\left(C_1 + 2\int \frac{ln\,y}{y}dy\right) = y^2(C_1 + ln^2\,y),$$

односно $y' = \pm y\sqrt{C_1 + ln^2\,y}$, односно $\dfrac{d(ln\,y)}{\pm\sqrt{C_1 + ln^2\,y}} = dx$, па је, редом,

$$\pm arcsh\frac{ln\,y}{\sqrt{C_1}} = x + D_1, \quad \pm\,ln(ln\,y + \sqrt{C_1 + ln^2\,y}) = x + D_2,\ D_1, D_2 \in R,$$

$$\sqrt{C_1 + ln^2\,y} = D_3e^x - ln\,y,\ D_3 > 0.$$

Квадрирањем леве и десне стране последње једнакости добијамо да је

$$ln\,y = \frac{D_3}{2}e^x + \frac{C_2}{2D_3}e^{-x},\ C_2 \in R,$$

односно $ln\,y = Ce^{-x} + De^x,\ C \in R,\ D > 0$.

138. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

Решење: Сменом $z(y) = y'$ добијамо Бернулијеву, а затим сменом $u(y) = z^2$ добијамо линеарну једначину

$$u' - \frac{3}{y}u = 4y$$

чије је опште решење $u = y^3C - 4y^2$, $C \in R$. Према томе, $y' = \pm y\sqrt{Cy-4}$, односно

$$\frac{dy}{\pm y\sqrt{Cy-4}} = dx. \qquad (*)$$

Ако је $Cy - 4 = t^2$, онда је $y = (t^2+4)/C$, па интеграцијом леве и десне стране једнакости $(*)$ добијамо да је $\pm\,arctan(t/2) = x + D$ $(D \in R)$, односно $Cy = 4 + 4\,tan^2(x+D)$ или $y\,cos^2(x+D) = E$ $(E \in R)$.

139. $y^{iv} = y''$.

Решење: Ако је $z = y''$, онда је $z'' = z$. Сменом $z' = u(z)$, при чему је $z'' = uu'$, имамо једначину $uu' = z$ чије је решење $u^2 = z^2 + C^2$. Из једначине $z' = \sqrt{z^2 + C^2}$ добијамо да је $z = Csh\,(x+D)$ $(D \in R)$, па је

$$y' = C \cdot ch\,(x+D) + E, \quad y = C \cdot sh\,(x+D) + Ex + F, \quad E, F \in R.$$

Напомена: Из једначине $z'' = z$ следи да је $2z'z'' = 2zz'$, односно $d\left(z'^2\right) = d\left(z^2\right)$, па је $z'^2 = z^2 + C$ $(C \in R)$

140. $y'' = y'^3 + y'$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ добијамо једначину $\dfrac{dz}{z^2+1} = dy$ чије је решење $z = tan(y + A)$. Из једначине $y' = tan(y+A)$, односно $cot(y+A)dy = dx$, имамо

$$ln\,sin(y+A) = x + B, \quad sin(y+A) = Ce^x.$$

Према томе, опште решење је $y = arcsin\,Be^x + C,\ B, C \in R$.

141. $yy'' = 2y'^2 - 2y'$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ имамо једначину првог реда чије је решење $z = A^2y^2 + 1$. Решавањем једначине $\dfrac{dy}{1 + A^2y^2} = dx$ добијамо $arctan\, Ay = Ax + B$, па је опште решење

$$Ay = tan(Ax + B), \quad A, B \in R.$$

142. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ добијамо Бернулијеву једначину

$$z' + z = 2e^{-y}z^{-1}$$

чије је решење $z^2 = Ce^{-2y} + 4e^{-y}$. Из једначине

$$y' = \pm\frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y + D}} = dx$$

добијамо опште решење $e^y = (x + A)^2 + B,\ A, B \in R$.

143. $yy'' + y'^2 = y^2$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ добијамо једначину

$$yzz' + z^2 = y^2. \tag{$*$}$$

Ако леву и десну страну ове једначине помножимо са y, онда и на једној и на другој страни имамо потпуне диференцијале, па је $2z^2y^2 = y^4 + A^2$, односно

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^4 + A^2}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{2}}.$$

Из ове једначине добијамо $arcsh\, \dfrac{y^2}{A} = \pm\sqrt{2}x + B$, па је опште решење

$$y^2 = Csh\,(\sqrt{2}x + B), \quad B, C \in R.$$

Напомена: Једначина $(*)$ је Бернулијева, па може да се реши на други начин.

144. $yy'' - y'^2 = y^4,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Решење: Сменом $y' = z(y)$ добијамо Бернулијеву једначину

$$z' - \frac{1}{y}z = y^4z^{-2}$$

чије је решење $z = \pm y\sqrt{y^2 + C}$. Како је $z = 0$ за $x = 0$ и $y = 1$, имамо једначину $y' = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$ чије је решење $arccos\, \dfrac{1}{y} = \pm x + D$. За $x = 0$ и $y = 1$ је $D = 0$, па је тражено партикуларно решење $arccos\, \dfrac{1}{y} = \pm x$, односно $y = \dfrac{1}{cos\, x}$.

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0, \quad F \text{ - хомогена функција}}$$

145. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

Решење: За $y' \neq 0$ из дате једначине следи да је

$$x\frac{y}{y'}\frac{y''}{y'} - x = \frac{y}{y'}.$$

Ако је $y'/y = z$, онда је $y''/y' = z'/z + z$, па из претходне једначине добијамо једначину $xz' = z$ чије је решење $z(x) = Ax$ ($A \in R$). Решавањем једначине $y'/y = Cx$ налазимо да је

$$y(x) = Ce^{Dx^2}, \quad C, D \in R.$$

Опште решење садржи и решење које се добија за $y' = 0$.

146. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

Решење: Сменом $y'/y = z(x)$, за $y' \neq 0$, добијамо линеарну једначину

$$z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$$

чије је решење $z = A/x^2 + 1/x$ ($A \in R$). Решавањем једначине $y'/y = z$ налазимо да је

$$y = Cxe^{-D/x}, \quad C, D \in R.$$

147. $\sqrt{a^2 + x^2}\left(yy'' - y'^2\right) = yy'$.

Решење: Сменом $z = y'/y$ добијамо једначину $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ чије је решење

$$z(x) = C\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right), \quad C \neq 0.$$

Из једначине $dy/y = z(x)dx$ имамо опште решење

$$ln\,|y| = \frac{C}{2}\left(x^2 + x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2\,ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})\right) + D, \quad D \in R.$$

148. $x^2yy'' + xyy' + y^2 = x^2y'^2$.

Решење: Ако је $z(x) = \dfrac{y'}{y}$, онда је $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{z'}{z} + z$, па из дате једначине добијамо линеарну једначину

$$z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2}$$

чије је решење $z(x) = \dfrac{C}{x} - \dfrac{ln\,|x|}{x}$. Из једначине $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{C}{x} - \dfrac{ln\,|x|}{x}\right)dx$ имамо да је

$$ln\,|y| = C\,ln\,|x| - \frac{1}{2}\,ln\,x \cdot ln\,|x| = ln\,|x|^{C - ln\sqrt{|x|}},$$

па је опште решење $y = D|x|^{C - ln\sqrt{|x|}}$.

149. $xyy'' - 2xy'^2 = 2yy'$.

Решење: Сменом $z(x) = y'/y$ добијамо Бернулијеву једначину

$$z' - \frac{2}{x}z = z^2$$

која се сменом $u = z^{-1}$ своди на линеарну једначину чије је решење $u(x) = C/x^2 - x/3$ ($C \in R$). Из једначине

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3x^2}{x^3 - 3C}dx$$

следи да је опште решење $y(x^3 - 3C) = D$ ($D \in R$).

150. $xyy'' + xy'^2 = 3yy'$.

Решење: Сменом $z = \dfrac{y'}{y}$, при чему је $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{z'}{z} + z$, добијамо Бернулијеву једначину

$$z' - \frac{3}{x}z = -2z^2$$

која се сменом $u = z^{-1}$ своди на линеарну $u' + 3u/x = 2$ чије је опште решење $u = C/x^3 + x/2$. Према томе, $z = \dfrac{2x^3}{2C + x^4}$, па из једначине $y' = zy$ налазимо опште решење дате једначине $y^2 = Dx^4 + E$.

Друго решење: Сменом $z = yy'$, при чему је $z' = y'^2 + yy''$, добијамо једначину $xz' = 3z$ чије је решење $z = Cx^3$. Из једначине $yy' = Cx^3$ имамо да је $y^2 = Dx^4 + E$.

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}$$

Одредити опште решење за дату једначину и дато партикуларно решење.

151. $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0, \quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решење: Ако је $y_2 = \dfrac{\sin x}{x}u(x)$, онда из дате једначине следи

$$\sin x \cdot u'' + 2\cos x \cdot u' = 0.$$

Сменом $u' = z$ добијамо једначину $z' \sin x + 2z \cos x = 0$ чије је решење $z(x) = C/\sin^2 x$. За $C = 1$ је $u(x) = \int z(x)dx = \cot x + D$. За $D = 0$ имамо $y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$, па је опште решење

$$y(x) = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

152. $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0, \quad y_1 = x$.

Решење: Ако је $y_2 = y_1 \int z(x)dx$, онда је

$$y_2' = \int zdx + xz, \quad y_2'' = 2z + xz',$$

па из дате једначине имамо $xz' + z = 0$, односно $xz = C$. За $z = \dfrac{1}{x}$ добијамо друго партикуларно решење $y_2 = x\ln|x|$, па је опште решење

$$y(x) = C_1x + C_2x\ln|x|, \quad C_1, C_2 \in R.$$

153. $sin^2 x \cdot y'' - 2y = 0, \quad y_1 = cot\, x.$

Решење: Опште решење је $y(x) = u(x)y_1$, односно $y(x) = u(x)\, cot\, x$, где се $u(x)$ одређује заменом $y(x)$ у датој једначини. Како је

$$y'(x) = u'\, cot\, x - \frac{u}{sin^2 x}, \quad y'' = u''\, cot\, x - \frac{2u'}{sin^2 x} + \frac{2u\, cos\, x}{sin^3 x},$$

добијамо једначину

$$cos\, x\, sin\, x u'' - 2u' = 0.$$

Ова једначина се сменом $u' = z$ своди на једначину првог реда чије је решење $z = C_1\, tan^2 x$. Према томе, $u(x) = C_1(tan\, x - x) + C_2$, а опште решење је

$$y(x) = C_1(1 - x\, cot\, x) + C_2\, cot\, x, \quad C_1, C_2 \in R.$$

154. $x(1-x)^2 y'' + (1-x^2)y' + (1+x)y = 0, \quad y_1 = x - 1.$

Решење: Ако је $y(x) = u(x)y_1$ опште решење, онда из дате једначине следи да је

$$xu'' + u' = 0.$$

Решење ове једначине је $u(x) = C_1\, ln\, |x| + C_2$, па је опште решење дате једначине

$$y(x) = C_1(x-1)\, ln\, x + C_2(x-1), \quad C_1, C_2 \in R.$$

155. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0, \quad y_1 = 1 + \dfrac{1}{x}.$

Решење: Ако је $y(x) = u(x)y_1$, онда је

$$y' = -\frac{u}{x^2} + \left((1 + \frac{1}{x}\right) u', \quad y'' = \frac{2}{x^3}u - \frac{2}{x^2}u' + \left(1 + \frac{1}{x}\right) u'',$$

па из дате једначине следи

$$x(x+1)u'' - 2u' = 0.$$

Сменом $u' = z(x)$ имамо једначину $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{2dx}{x(x+1)}$ чије је решење $z = C_1 \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$. Према томе,

$$u(x) = C_1\left((x+1) - 2\, ln\, |x+1| - \frac{1}{x+1}\right) + C_2,$$

а опште решење је

$$y(x) = C_1\left(\frac{(x+1)^2}{x} - 2\frac{x+1}{x}\, ln\, |x+1| - \frac{1}{x}\right) + C_2\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

156. $(e^x + 1)\, y'' = y, \quad y_1 = 1 + e^{-x}.$

Решење: Ако је $y(x) = u(x)y_1$, онда је

$$y' = -e^{-x}u + (e^{-x}+1)u', \quad y'' = e^{-x}u - 2e^{-x}u' + (e^{-x}+1)u''.$$

Из дате једначине добијамо нову једначину

$$(e^x + 1)\, u'' - 2u' = 0$$

чије је решење

$$u(x) = C_1\left(ln(e^x+1) + \frac{1}{e^x+1}\right) + C_2.$$

Према томе, опште решење је

$$y(x) = C_1\left((e^{-x}+1)\,ln(e^x+1) + \frac{e^{-x}+1}{e^x+1}\right) + C_2(e^{-x}+1).$$

157. $(x-1)y'' + (4x-5)y' + (4x-6)y = 0, \quad y_1 = e^{-2x}.$

Решење: Ако је $y(x) = u(x)y_1$, онда је

$$y' = -2e^{-2x}u + e^{-2x}u', \quad y'' = e^{-2x}u'' - 4e^{-2x}u' + 4e^{-2x}u,$$

па из дате једначине добијамо

$$(x-1)u'' - u' = 0.$$

Решење ове једначине је $u(x) = \dfrac{x^2}{2} - x$, па је опште решење

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2\left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{-2x}.$$

158. $sin^2 x \cdot y'' - sin\,x\,cos\,x \cdot y' + y = 0, \quad y_1 = sin\,x$

Решење: Ако $y(x) = u(x)\,sin\,x$ заменимо у дату једначину, добијамо нову једначину

$$sin\,x \cdot u'' + cos\,xu' = 0.$$

Сменом $u' = z(x)$ имамо једначину $z'\,sin\,x + z\,cos\,x = 0$ чије је решење $z = \dfrac{C_1}{sin\,x}$. Према томе,

$$u(x) = C_1\,ln\left|tan\,\frac{x}{2}\right| + C_2,$$

а опште решење је

$$y(x) = C_1\,ln\left|tan\,\frac{x}{2}\right|\,sin\,x + C_2\,sin\,x.$$

159. $xy'' + \dfrac{ln\,x-1}{ln\,x}y' + \dfrac{1}{x\,ln^2 x}y = 0, \quad y_1 = ln\,x.$

Решење: Заменом $y(x) = u(x)\,ln\,x$ у дату једначину, добијамо нову једначину

$$x\,ln\,xu'' + (ln\,x+1)u' = 0$$

чије је решење

$$u(x) = C_1\,ln\,|\,ln\,x| + C_2.$$

Према томе, опште решење је

$$y(x) = C_1\,ln\,x\,ln\,|\,ln\,x| + C_2\,ln\,x.$$

2.2 Линеарне једначине са константним коефицијентима

Хомогене

Одредити опште решење дате једначине.

160. $y^{iv} + y = 0.$

Решење: Карактеристични полином је $k^4 + 1$. Како је

$$k^4 + 1 = k^4 + 2k^2 + 1 - 2k^2 = (k^2+1)^2 - 2k^2 = (k^2 + 1 - \sqrt{2}k)(k^2 + 1 + \sqrt{2}k),$$

нуле карактеристичне једначине су

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

па је опште решење

$$y = e^{\sqrt{2}x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) +$$
$$e^{-\sqrt{2}x/2}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

161. $y'' + y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1/2.$

Решење: Нуле карактеристичне једначине $k^2 + k + 1 = 0$ су конјуговано комплексни бројеви $-1/2 + \sqrt{3}i/2$ и $-1/2 - \sqrt{3}i/2$, па је опште решење

$$y(x) = C_1 e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

За дате почетне услове треба одредити константе C_1 и C_2. Како је

$$y'(x) = e^{-x/2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - \frac{1}{2}C_1\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \left(\frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_1\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

добијамо да је $C_1 = 2$, $\frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}$, односно $C_1 = 2$ и $C_2 = \sqrt{3}$. Према томе, тражено партикуларно решење је

$$y(x) = e^{-x/2}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

162. $y^{v} - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0.$

Решење: Карактеристична једначина је $p(k) = 0$, где је

$$p(k) = k^5 - 5k^4 + 12k^3 - 16k^2 + 12k - 4.$$

Број 1 је решење ове једначине, а дељењем полинома p са $k-1$ добијамо полином q, где је $q(k) = k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 8k + 4$. Како је

$$q(k) = (k^2 - 2k)^2 + 4(k^2 - 2k) + 4 = (k^2 - 2k + 2)^2,$$

то су конјуговано комплексни бројеви $1+i$ и $1-i$ нуле другог реда. Опште решење је

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^x \cos x + C_3 e^x \sin x + C_4 x e^x \cos x + C_5 x e^x d \sin x$$

или $y(x) = (C_1 + (C_2 + C_4x)\,cos\,x + (C_3 + C_5x)\,sin\,x)\,e^x$.

Метода неодређених коефицијената

Методом неодређених коефицијената решити дату једначину.

163. $y'' - y' + y = x^2$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = e^{x/2}\left(C_1\,cos\,\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ C_1, C_2 \in R$$

а партикуларно решење y_p је облика $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Заменом y_p у датој једначини налазимо да је $A = 1$, $B = 2$ и $C = 0$. Према томе,

$$y = e^{x/2}\left(C_1\,cos\,\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}x + x^2 + 2x\right).$$

164. $y''' - 3y' - 2y = sin\,x + cos\,x$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = (C_1 + C_2x)\,e^{-x} + C_3e^{2x},\ C_1, C_2, C_3 \in R$$

а партикуларно решење y_p је облика $y_p = A\,sin\,x + B\,cos\,x$. Заменом y_p у датој једначини и изједначавањем коефицијената уз $cos\,x$, односно уз $sin\,x$, добијамо систем $-2A+4B = 1$, $-4A-2B = 1$ из којег налазимо да је $A = -3/10$ и $B = 1/10$. Према томе,

$$y = (C_1 + C_2x)\,e^{-x} + C_3e^{2x} - \frac{3}{10}\,sin\,x + \frac{1}{10}\,cos\,x.$$

165. $y'' + y' + y = x^2\,cos\,x$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = e^{-x/2}\left(C_1\,cos\,\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_2\,sin\,\frac{\sqrt{3}x}{2}\right), \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како број i није корен карактеристичног полинома, партикуларно решење је облика

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)\,cos\,x + (dx^2 + ex + f)\,sin\,x.$$

Заменом y_p у једначини налазимо да је $a = 0$, $b = 2$, $c = -$, $d = 1$, $e = -4$ и $f = 6$. Према томе,

$$y(x) = y_h(x) + (2x - 6)\,cos\,x + (x^2 - 4x + 6)\,sin\,x.$$

166. $y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како је број 2 корен карактеристичног полинома, то је партикуларно решење $y_p = Axe^{2x}$. Заменом y_p у једначини налазимо да је $A = -3/2$, па је

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} - \frac{3}{2}xe^{2x}.$$

167. $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како је број 3 двоструки корен карактеристичног полинома, то је партикуларно решење $y_p = Ax^2e^{3x}$. Заменом y_p у једначини налазимо да је $A = 2$, па је

$$y(x) = e^{3x}\left(C_1 + C_2x + 2x^2\right).$$

168. $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = (C_1 + C_2x)e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како је број -1 двоструки корен карактеристичног полинома, партикуларно решење је облика $y_p = x^2(Ax+B)e^{-x}$. Заменом y_p у једначини налазимо да је $A = 1/6$ и $B = 0$. Према томе,

$$y(x) = \left(C_1 + C_2x + \frac{x^3}{6}\right)e^{-x}.$$

169. $y''' - y'' = xe^{x}$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3e^{x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in R.$$

Како је број 1 корен карактеристичног полинома, партикуларно решење је облика $y_p = x(Ax + B)e^{x}$. Заменом y_p у једначини налазимо да је $A = 1/2$ и $B = -2$. Према томе,

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{x} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)e^{x}.$$

170. $y'' - 2y' = x^3 + 2x - 1$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 + C_2e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како је број 0 корен карактеристичног полинома, то је партикуларно решење

$$y_p = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D).$$

Заменом y_p у једначини налазимо да је

$$-8Ax^3 + (12A - 6B)x^2 + (6B - 4C)x + (2C - 2D) = x^3 + 2x - 1,$$

одакле следи да је $A = -1/8$, $B = -1/4$, $C = -7/8$ и $D = -3/8$. Према томе,

$$y(x) = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x.$$

171. $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + 1)$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како је број 1 двоструки корен карактеристичног полинома, партикуларно решење је облика $y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^x$. Заменом y_p у једначини налазимо да је

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 1,$$

што значи да је $A = 1/12$, $B = 0$ и $C = 1/2$. Према томе,

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}\right).$$

172. $y'' + y = x\,sin\,x$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1\,cos\,x + C_2\,sin\,x, \quad C_1, C_2 \in R,$$

а партикуларно решење y_p је облика $y_p = x((Ax + B)\,cos\,x + (Cx + D)\,sin\,x)$ јер је број i нула карактеристичног полинома дате једначине. Заменом y_p у једначини и изједначавањем коефицијената уз $cos\,x$, $x\,cos\,x$, $sin\,x$ и $x\,sin\,x$ добијамо да је $A = -1/4$, $B = 0$, $C = 0$ и $D = 1/4$. Према томе, опште решење је

$$y(x) = C_1\,cos\,x + C_2\,sin\,x - \frac{x^2}{4}\,cos\,x + \frac{x}{4}\,sin\,x.$$

173. $y'' + y = (3x + 2)\,sin\,2x + (x^2 + x + 2)\,cos\,2x$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1\,cos\,x + C_2\,sin\,x, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како број $2i$ није решење карактеристичног полинома, партикуларно решење је

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)\,cos\,2x + (Dx^2 + Ex + F)\,sin\,2x.$$

Заменом у једначини и изједначавањем коефицијената уз $cos\,2x$ и $sin\,2x$ добијамо

$$-3Dx^2 + (-3E - 8A)x - 4B + 2D - 3F = 3x + 2,$$

$$-3Ax^2 + (-3B + 8D)x + 2A - 3C + 4E = x^2 + x + 2,$$

одакле следи да је $A = B = -1/3$, $C = -28/27$, $D = 0$, $E = -1/9$ и $F = -2/9$. Према томе, опште решење је $y(x) = y_h + y_p$, где је

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27}\right)cos\,2x + \left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right)sin\,2x.$$

174. $y'' + 4y = 3\,sin\,2x$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1\,cos\,2x + C_2\,sin\,2x, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Како је број $2i$ решење карактеристичног полинома, партикуларно решење је

$$y_p(x) = x(A\,cos\,2x + B\,sin\,2x).$$

Заменом y_p у једначини и изједначавањем коефицијената уз $\cos 2x$ и $\sin 2x$ добијамо да је $A = -3/4$ $B = 0$. Према томе, опште решење је

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{3}{4} x \cos 2x.$$

175. $y'' + 2ay' + a^2 y = xe^x \ (a \in R)$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1 e^{-ax} + C_2 x e^{-ax},$$

а партикуларно решење је

$$y_p = \begin{cases} (Ax+B)e^x, & a \neq -1 \\ x^2(Ax+B)e^x, & a = 1. \end{cases}$$

За $a \neq -1$ је

$$y_p' = Ae^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x}, \quad y_p'' = 4Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x},$$

па заменом у датој једначини добијамо

$$A = \frac{1}{(1+a)^2}, \quad B = -\frac{2}{(1+a)^3}, \quad y_p(x) = \left(\frac{1}{1+a} x - \frac{2}{(1+a)^3}\right) e^x.$$

За $a = -1$ је

$$y_p' = (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x,$$

$$x_p'' = (6Ax + 2B)e^x + (6Ax^2 + 4Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x.$$

Из једначине $y'' - 2y' + y = xe^x$ следи да је $A = 1/6$ и $B = 0$, па је $y_p = \frac{1}{6} x^3 e^x$.

У оба случаја је опште решење $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Принцип суперпозиције

176. $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$, а партикуларно решење y_p је $y_{p_1} + y_{p_2}$, где је y_{p_1} партикуларно решење једначине $L[y] = \sin x$, а y_{p_2} партикуларно решење једначине $L[y] = e^{-x}$ ($L[y] = y'' - 2y' + y$). Како бројеви i и -1 нису нуле карактеристичног полинома, то је

$$y_{p_1} = A \cos x + B \sin x, \quad y_{p_2} = Ce^{-x}.$$

Заменом y_{p_1} и y_{p_2} у једначине $L[y] = \sin x$ и $L[y] = e^{-x}$ добијамо да је $A = 0$, $B = 1/2$ и $C = 1/4$. Према томе, опште решење је

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} e^{-x}.$$

Напомена: Партикуларно решење y_p може да се тражи и директно у облику $y_p = A \sin x + B \cos x + Ce^{-x}$.

177. $y'' + 4y = x^2 + 8 \cos 2x$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Пошто је $2i$ нула карактеристичног полинома $\lambda^2 + 4$, партикуларно решење је облика

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2 + x\,(D \sin 2x + E \cos 2x)\,,$$

при чему је

$$y''(x) = 2C - 4Dx \sin 2x - 4Ex \cos 2x + 4D \cos 2x - 4E \sin 2x.$$

Заменом израза за $y_p(x)$ и $y''(x)$ у датој једначини добијамо да је

$$2C + 4A + 4Bx + 4Cx^2 - 4E \sin 2x + 4D \cos 2x = x^2 + 8 \cos 2x,$$

одакле следи да је $A = -1/8$, $B = 0$, $C = 1/4$, $D = 2$ и $E = 0$. Према томе,

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2 + 2x \sin 2x.$$

178. $y^v - y^{iv} + y''' - y'' = 1 + e^x + \sin 2x.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x,$$

а партикуларно решење је облика

$$y_p = Ax^2 + Bxe^x + C \cos 2x + D \sin 2x.$$

Заменом y_p у једначини налазимо да је $A = -1/2$, $B = 1/2$, $C = -1/30$ и $D = -1/60$. Према томе, опште решење дате једначине је $y = y_h + y_p$, односно

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{30}x \cos x - \frac{1}{60} \sin 2x.$$

179. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin^2 x.$

Решење: Опште решење хомогене једначине

$$y_h(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in R,$$

а партикуларно решење је облика

$$y_p(x) = e^{2x}(A + B \cos 2x + C \sin 2x).$$

Како је

$$y_p' = 2e^{2x}(A + (B + C) \cos 2x + (C - B) \sin 2x)$$
$$y_p'' = 4e^{2x}(A + 2C \cos 2x - 2B \sin 2x)$$

заменом у једначини налазимо $A = 1/2$, $B = -1/6$ и $C = 0$. Према томе,

$$y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x\right).$$

180. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos^2 x.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x,$$

а партикуларно решење је

$$y_p(x) = Ae^x + xe^x(B\,cos\,2x + C\,sin\,2x).$$

Након израчунавања y_p' и y_p'' и замене у датој једначини, добијамо да је $A = 1/6$, $B = 0$ и $C = 1/8$. Према томе, опште решење

$$y(x) = C_1e^x\,cos\,2x + C_2e^x\,sin\,2x + \frac{1}{8}e^x(1 + x\,sin\,2x).$$

181. $y'' - 2y' + 10y = e^x\,sin^3\,x.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1e^x\,cos\,3x + C_2e^x\,sin\,3x$$

јер је $1 + 3i$ корен карактеристичне једначине. Како је

$$sin^3\,x = \frac{3}{4}\,sin\,x - \frac{1}{4}\,sin\,3x,$$

партикуларно решење y_p је облика $y_{p_1} + y_{p_2}$, где је

$$y_{p_1} = e^x(A\,cos\,x + B\,sin\,x), \quad y_{p_2} = xe^x(C\,cos\,3x + D\,sin\,3x).$$

Заменом y_{p_1} у једначини $y'' - 2y' + 10y = \frac{3}{4}e^x\,sin\,x$, односно y_{p_2} у једначини $y'' - 2y' + 10y = -\frac{1}{4}e^x\,sin\,3x$ добијамо да је $A = 0$, $B = 3/32$, $C = 1/24$ и $D = 0$. Према томе, опште решење је

$$y(x) = C_1e^x\,cos\,3x + C_2e^x\,sin\,3x + \frac{3}{32}e^x\,sin\,x + \frac{1}{24}xe^x\,sin\,x.$$

182. $y''' + 4y' = cos^4\,x.$

Решење: Опште решење је

$$y(x) = C_1 + C_2\,cos\,2x + C_3\,sin\,2x + y_p(x), \quad C_1, C_2, C_3 \in R.$$

Како је

$$cos^4\,x = \frac{1}{4}(1 + cos\,2x)^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\,cos\,2x + \frac{1}{8}\,cos\,4x,$$

партикуларно решење је облика $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p+3}$, где је

$$y_{p_1} = Ax, \quad y_{p_2} = x(B\,sin\,2x + C\,cos\,2x), \quad y_{p_3} = D\,sin\,4x + E\,cos\,4x.$$

Одређивањем константи добијамо да је

$$y_{p_1} = \frac{3}{32}x, \quad y_{p_2} = -\frac{1}{16}x\,cos\,2x, \quad y_{p_3} = -\frac{1}{384}\,sin\,4x.$$

Метода варијације константи

Методом варијације константи решити дату једначину.

183. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 + C_2 e^x$, а опште решење дате једначине добијамо методом варијације константи. Из система

$$C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0, \quad C_2'(x)e^x = \frac{1}{e^x+1}$$

следи да је

$$C_1'(x) = -\frac{1}{e^x+1}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{e^x(e^x+1)},$$

па је

$$C_1(x) = -x + ln(1+e^x) + D_1, \quad C_2(x) = -e^{-x} - x + ln(1+e^x) + D_2,$$

а опште решење је

$$y(x) = A + Be^x + (e^x+1)\, ln(1+e^{-x}), \quad A, B \in R.$$

184. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x+3}.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in R,$$

а опште решење дате једначине добијамо методом варијације константи. Из система

$$C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)xe^{2x} = 0, \quad 2C_1'(x)e^{2x} + (1+2x)C_2'(x)e^{2x} = \frac{e^{2x}}{x+3}$$

следи да је

$$C_1'(x) = -\frac{x}{x+3}, \quad C_2' = \frac{1}{x+3},$$

па је

$$C_1(x) = -x + ln\,|x+3|^3 + A, \quad C_2(x) = ln\,|x+3| + B,\ A, B \in R.$$

Опште решење је $y(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)xe^{2x}$.

185. $y'' + 4y = \dfrac{1}{cos^2 x}.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Из система

$$cos\, 2x \cdot C_1'(x) + sin\, 2x \cdot C_2^p(x) = 0, \quad -2\, sin\, 2x \cdot C_1'(x) + 2\, cos\, 2x \cdot C_2'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$$

добијамо

$$C_1'(x) = -\,tan\, x, \quad C_1(x) = ln\,|\,cos\, x| + D_1,$$

$$C_2'(x) = 1 - \frac{1}{2\,cos^2 x}, \quad C_2(x) = x - \frac{1}{2}\, tan\, x + D_2.$$

Према томе, опште решење дате једначине је

$$y(x) = D_1\, cos\, 2x + D_2\, sin\, 2x + cos\, 2x\, ln\,|\,cos\, x| + x\, sin\, 2x - sin^2 x.$$

186. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{sin\, x}$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} \, cos\, 2x + C_2 e^{-x} \, sin\, 2x.$$

Из система

$$e^{-x} \, cos\, x \cdot C_1'(x) + e^{-x} \, sin\, x \cdot C_2'(x) = 0$$

$$-(cos\, x + sin\, x e^{-x}) C_1'(x) + (cos\, x - sin\, x) e^{-x} C_2'(x) = \frac{e^{-x}}{sin\, x}$$

добијамо

$$C_1'(x) = -1, \quad C_1(x) = -x + D_1, \quad C_2'(x) = cot\, x, \quad C_2(x) = ln\, |\, sin\, x| + D_2.$$

Према томе, опште решење дате једначине је

$$y(x) = (D_1 - x) e^{-x} \, cos\, x + (D_2 + ln\, |\, sin\, x|) e^{-x} \, sin\, x.$$

187. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^n}, \ n \in N.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је $y_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$. Из система

$$e^{3x} C_1'(x) + x e^{3x} C_2'(x) = 0, \quad 3e^{3x} C_1'(x) + (1 + 3x) e^{3x} C_2'(x) = \frac{e^{3x}}{x^n}$$

добијамо

$$C_1'(x) = -\frac{1}{x^{n-1}}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{x^n}.$$

Опште решење дате једначине је

$$y(x) = C_1(x) e^{3x} + C_(x) x e^{3x},$$

при чему је:

- $C_1(x) = -x + D_1$ и $C_2(x) = ln\, |x| + D_2$ за $n = 1$,
- $C_1(x) = -\, ln\, |x| + D_1$ и $C_2(x) = -\dfrac{1}{x} + D_2$ за $n = 2$,
- $C_1(x) = \dfrac{1}{(n-2) x^{n-2}} + D_1$ и $C_2(x) = -\dfrac{1}{(n-1) x^{n-1}} + D_2$ за $n > 2$.

188. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_1, C_2 \in R,$$

а опште решење дате једначине добијамо методом варијације константи. Из система

$$C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0, \quad C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^x (x+1) = \frac{e^x}{(1-x)^2}$$

следи да је

$$C_1'(x) = -\frac{x}{(1-x)^2}, \quad C_2' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

па је

$$C_1(x) = -\,ln\,|1-x| - \frac{1}{1-x} + A, \quad C_2(x) = \frac{1}{1-x} + B,\ A, B \in R.$$

Према томе,

$$y(x) = \left(A + Bx - ln\,|1-x| - \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x}\right) e^x.$$

189. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\, ln\, x.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in R,$$

а опште решење дате једначине добијамо методом варијације константи. Из система

$$C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0, \quad -2C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-2x}(1-2x) = e^{-2x}\, ln\, x$$

следи да је

$$C_1'(x) = -x\, ln\, x, \quad C_2' = ln\, x,$$

па је

$$C_1(x) = -\frac{x^2}{2}\, ln\, x + \frac{x^2}{4} + A, \quad C_2(x) = x\, ln\, x - x + B,\ A, B \in R.$$

Према томе,

$$y(x) = e^{-2x}\left(A + Bx + \frac{1}{2}x^2\, ln\, x - \frac{3}{4}x^2\right).$$

190. $y'' + y = sin\, 2x \cdot sin\, x.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y = A\, cos\, x + B\, sin\, x, \quad A, B \in R,$$

а опште решење нехомогене је облика $y = A(x)\, cos\, x + B(x)\, sin\, x$, где су A и B функције чије изводе одређујемо из система

$$\begin{aligned} A'(x)\, cos\, x + B'(x)\, sin\, x &= 0 \\ -A'(x)\, sin\, x + B'(x)\, cos\, x &= 2\, sin^2 x\, cos\, x \end{aligned}$$

Решавањем овог система добијамо да је

$$A'(x) = -2\, sin^3 x\, cos\, x, \quad B'(x) = \frac{1}{2}\, sin^2 2x,$$

па је

$$A(x) = -\frac{1}{2}\, sin^4 x + C, \quad B(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\, sin\, 4x + D,\ C, D \in R.$$

Према томе, опште решење је

$$y = C\, cos\, x + D\, sin\, x - \frac{1}{2}\, sin^4 x\, cos\, x + \frac{1}{4}x\, sin\, x - \frac{1}{16}\, sin\, 4x\, sin\, x.$$

191. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{4-x^2}}.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in R,$$

а систем за $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ је

$$\begin{aligned} e^{-2x}C_1'(x) + xe^{-2x}C_2'(x) &= 0 \\ -2e^{-2x}C_1'(x) + (1-2x)e^{-2x}C_2'(x) &= \frac{e^{-2x}}{\sqrt{4-x^2}}, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} C_1'(x) + xC_2'(x) &= 0 \\ -C_1'(x) + (1-2x)C_2'(x) &= \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$C_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad C_2' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}},$$

што значи да је

$$C_1(x) = \sqrt{4-x^2} + D_1, \quad C_2(x) = arcsin\,\frac{x}{2} + D_2, \quad D_1, D_2 \in R.$$

Према томе, опште решење је

$$y(x) = D_1e^{-2x} + D_2xe^{-2x} + e^{-2x}\sqrt{4-x^2} + xe^{-2x}\,arcsin\,\frac{x}{2}.$$

192. $y''' - y'' = \dfrac{x+2}{x^3}.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је $y_h(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x$. Из система

$$C_1'(x) + xC_2'(x) + e^xC_3'(x) = 0, \quad C_2'(x) + e^xC_3'(x) = 0, \quad e^xC_3'(x) = \frac{x+2}{x^3}$$

добијамо, најпре,

$$C_3(x) = \int e^{-x}\frac{x+1}{x^3}dx = \int e^{-x}\frac{x^2+x}{x^4}dx = -\int d\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right) = -\frac{e^{-x}}{x^2} + D_3,$$

а затим и

$$C_2(x) = \frac{x+1}{x^2} + D_2, \quad C_1(x) = ln\,|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + D_1.$$

Према томе, опште решење дате једначине је

$$y(x) = D_1 + D_2x + D_3e^x + ln\,|x| + 1.$$

193. $y''' + y' = \dfrac{1}{cos\,x}.$

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 + C_2\,cos\,x + C_3\,sin\,x, \quad C_1, C_2, C_3 \in R,$$

а решење нехомогене добијамо методом варијације константи. Решавањем система

$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)\,cos\,x + C_3'(x)\,sin\,x &= 0 \\ -C_2'(x)\,sin\,x + C_3'(x)\,cos\,x &= 0 \\ -C_2'(x)\,cos\,x - C_3'(x)\,sin\,x &= \frac{1}{cos\,x} \end{aligned}$$

добијамо да је

$$C_1'(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad C_2'(x) = -1, \quad C_3'(x) = -tanx.$$

Интеграцијом левих и десних страна ових једнакости налазимо да је

$$C_1(x) = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + A, \quad C_2(x) = -x + B, \quad C_3(x) = \ln|\cos x| + C,$$

где је $A, B, C \in R$. Према томе, опште решење је

$$y(x) = A + B\cos x + C\sin x + \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\cos x|.$$

194. $y''' - y' = \dfrac{1}{ch\, x}$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Из система

$$\begin{aligned} C_1'(x) + e^x C_2'(x) + e^{-x} C_3'(x) &= 0 \\ e^x C_2'(x) - e^{-x} C_3'(x) &= 0 \\ e^x C_2'(x) + e^{-x} C_3'(x) &= f(x), \end{aligned}$$

где је $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$, добијамо

$$C_1'(x) = -f, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2} e^{-x} f, \quad C_3'(x) = \frac{1}{2} e^x f.$$

Интеграцијом ових једнакости налазимо да је

$$C_1 = -2\arctan e^x + D_1, \quad C_2 = x - \ln\sqrt{e^{2x}+1} + D_2, \quad C_3 = \ln\sqrt{e^{2x}+1} + D_3.$$

Опште решење је

$$y(x) = D_1 + D_2 e^x + D_3 e^{-x} + x e^x - sh\, x \ln\left(e^{2x}+1\right) - 2\arctan e^x.$$

195. $y''' + y' = \tan x$.

Решење: Опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x, \quad C_1, C_2, C_3 \in R,$$

а решење нехомогене добијамо методом варијације константи. Решавањем система

$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x &= 0 \\ -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x &= 0 \\ -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x &= \tan x \end{aligned}$$

добијамо да је

$$C_1'(x) = \tan x, \quad C_2'(x) = -\sin x, \quad C_3'(x) = \cos x - \frac{1}{\cos x}.$$

Интеграцијом левих и десних страна ових једнакости налазимо да је

$$C_1(x) = -\ln|\cos x| + D_1, \quad C_2(x) = \cos x + D_2,$$

$$C_3(x) = sin\,x - ln\left|\frac{1+sin\,x}{cos\,x}\right| + D_3,\ \ D_1, D_2, D_3 \in R,$$

а опште решење је $y(x) = C_1(x) + C_2(x)\,cos\,x + C_3(x)\,sin\,x$.

196. $y'' - y' - 2y = e^{2x}\,cos^2\,x.$

Решење: Опште решење хомогене једначине $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$. Из система

$$C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{2x} = 0, \quad -C_1'(x)e^{-x} + 2C_2'(x)e^{2x} = e^{2x}\,cos^2\,x$$

добијамо

$$C_2'(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\,cos\,2x, \quad C_1'(x) = -\frac{1}{6}e^{3x}\frac{1}{6}e^{3x}\,cos\,2x,$$

односно

$$C_2(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}\,sin\,2x + D_2,$$

$$C_1(x) = -\frac{1}{18}e^{3x} - \frac{1}{26}e^{3x}\,cos\,2x - \frac{1}{39}e^{3x}\,sin\,2x + D_1.$$

Опште решење је

$$y(x) = D_1e^{-x} + D_2e^{2x} + \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{26}e^{2x}\,cos\,2x + \frac{3}{52}e^{2x}\,sin\,2x.$$

Напомена: Једначина може да се реши и методом неодређених коефицијената.

197. $y'' + 4y = x^2 + 8\,cos\,2x.$

Решење: Опште решење је $y(x) = C_1(x)\,cos\,2x + C_2(x)\,sin\,2x$, где је

$$C_1'(x)\,cos\,2x + C_2'(x)\,sin\,2x = 0, \quad -2C_1'(x)\,sin\,2x + 2C_2'(x)\,cos\,2x = x^2 + 8\,cos\,2x.$$

Из овог система налазимо да је

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}(x^2\,sin\,2x + 8\,sin\,2x\,sin\,2x\,cos\,2x), \quad C_2'(x) = \frac{1}{2}(x^2\,cos\,2x + 8\,cos^2\,2x),$$

а интеграцијом левих и десних страна ових једнакости имамо да је

$$\begin{aligned} C_1(x) =& \ -\frac{1}{4}x\,sin\,2x - \frac{1}{8}\,cos\,2x + \frac{1}{4}x^2\,cos\,2x - sin^2\,2x + D_1, \\ C_2(x) =& \ \frac{1}{4}x\,cos\,2x - \frac{1}{8}\,sin\,2x + \frac{1}{4}x^2\,sin\,2x + 2x + \frac{1}{2}\,sin\,4x + D_2. \end{aligned}$$

Према томе, $y(x) = D_1\,cos\,2x + D_2\,sin\,2x + y_p(x)$ $(D_1, D_2 \in R)$, где је

$$\begin{aligned} y_p(x) =& \ -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2 - sin^2\,2x\,cos\,2x + 2x\,sin\,2x + \frac{1}{2}\,sin\,4x\,sin\,2x \\ =& \ = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2 + 2x\,sin\,2x. \end{aligned}$$

Напомена: За разлику од претходних једначина које нису могле да се реше методом неодређених коефицијената, ова једначина може (видети зад. 177.). Штавише, решавање методом неодређених коефицијената је, у овом случају, једноставније.