МАТЕМАТИКА 3

Драган Ђорић

118 задатака са решењима

За студенте генерације 2015

Драган С. Ђорић

МАТЕМАТИКА
3

ЗБИРКА
РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

Глава 1
Диференцијалне једначине првог реда

Факултет организационих наука

Београд, 2009.

1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

1.1 Једначине које раздвајају промењиве

У задацима 1. – 8. решити дате диференцијалне једначине.

1. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$

Решење: Како је $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$, дата једначина је еквивалентна једначини

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$

из које интеграцијом добијамо опште решење

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \quad (C \in R^+).$$

Напомена: За почетни услов $y(a) = b$ добијамо партикуларно решење

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}.$$

2. $x^2(y^3+1)dx + y^2(x^3+1)dy = 0.$

Решење: Ако је $(x^3+1)(y^3+1) \neq 0$, онда из дате једначине следи да је

$$\frac{x^2dx}{x^3+1} + \frac{y^2dy}{y^3+1} = 0.$$

Интеграцијом обе стране ове једначине добијамо да је

$$\frac{1}{3}\,ln\,|x^3+1| + \frac{1}{3}\,ln\,|y^3+1| = C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$\big|(x^3+1)(y^3+1)\big| = C_2 \quad (C_2 \in R^+),$$

односно

$$(x^3+1)(y^3+1) = C_3 \quad (C_3 \in R \setminus \{0\}). \tag{$*$}$$

Како су $x = -1$ и $y = -1$ решења дате једначине то је, за те вредности,

$$(x^3+1)(y^3+1) = 0. \tag{$**$}$$

Из $(*)$ и $(**)$ следи да је опште решење дате једначине

$$(x^3+1)(y^3+1) = C \quad (C \in R).$$

Напомена: Кошијево решење које задовољава услов $y(a) = b$ имамо за $C = (a^3+1)(b^3+1)$.

3. $y(1-x^2)dy = x(1-y^2)dx.$

Решење: За $(1-x^2)(1-y^2) \neq 0$ из дате једначине добијамо да је

$$\frac{ydy}{1-y^2} = \frac{xdx}{1-x^2}.$$

Интеграцијом леве и десне стране ове једначине имамо да је

$$-\frac{1}{2}\, ln\,|1-y^2| = -\frac{1}{2}\, ln\,|1-x^2| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$|1-y^2| = C_2|1-x^2|, \quad (C_2 \in R^+),$$

односно

$$1-y^2 = C_3(1-x^2) \quad (C_3 \in R \setminus \{0\}).$$

Како су $y=-1$ и $y=1$ такође решења дате једначине, то је опште решење

$$1-y^2 = C(1-x^2) \quad (C \in R).$$

Решења су такође и $x=-1$ и $x=1$ и могу се добити из општег решења за $C=+\infty$ јер је $1-x^2 = (1-y^2)/C$.

Напомена: Дата једначина и једначине

$$y' = \frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)}, \quad x' = \frac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)}$$

нису еквивалентне, јер $x=-1$ и $x=1$ нису решења прве, а $y=-1$ и $y=1$ нису решења друге једначине.

4. $tan\, ydx - x\, ln\, xdy = 0.$

Решење: Ако је $x\, ln\, x\, tan\, y \neq 0$, онда из дате једначине следи да је

$$\frac{dx}{x\, ln\, x} - \frac{dy}{tan\, y} = 0.$$

Интеграцијом добијамо да је

$$ln\,|\, ln\, x| - ln\,|\, sin\, y| = C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$|\, ln\, x| = C_2|\, sin\, y| \quad (C_2 \in R^+),$$

односно

$$ln\, x = C_3\, sin\, y \quad (C_3 \in R \setminus \{0\}).$$

Ако је $x\, ln\, x\, tan\, y = 0$, онда је $x=0$ или $x=1$ или $y=k\pi$, где је $k \in Z$. Пошто је $x=1$ решење дате једначине, то је опште решење

$$ln\, x = C\, sin\, y \quad (C \in R).$$

Решења су такође и $x=0$ и $y=k\pi$, при чему $x=1$ може да се добије из општег решења за $C=-\infty$, а решења $y=k\pi$ могу да се добију из општег за $C=+\infty$. Према томе, једначина нема сингуларних решења.

Напомена: Партикуларно решење које задовољава услов $y(a)=b$ $(a>0)$ добијамо за $C = ln\, a/\, sin\, b$. На пример, за $y(e)=\pi/2$ је $C=1$, а партикуларно решење $y = arcsin(ln\, x)$.

5. $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0.$

Решење: За $(1-x^2)(1-y^2) \neq 0$ из дате једначине следи да је

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

па је општи интеграл

$$arcsin\, x + arcsin\, y = C \quad (C \in [-\pi, \pi]). \qquad (*)$$

Решења $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ и $y = 1$ су сингуларна, јер не могу да се добију из општег решења ни за једну вредност константе C.

Напомена: Применом функције sin на леву и десну страну једнакости $(*)$, добијамо опште решење у облику $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = D \quad (D \in [-1, 1])$. Слично, из једнакости $arcsin\, y = C - arcsin\, x$ добијамо да је $y = \sqrt{1-x^2}\, sin\, C - x\, cos\, C$, односно $(y + x\, cos\, C)^2 = (1-x^2)\, sin^2\, C$, односно

$$x^2 + y^2 + 2axy = 1 - a^2 \quad (a = cos\, C).$$

6. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0.$

Решење: Како је $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$, из дате једначине следи да је

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0,$$

одакле добијамо опште решење

$$arctan\, x + arctan\, y = C \quad (C \in (-\pi, \pi)),$$

односно $x + y = D(1 - xy)$ $(D \in R)$ или $y = \dfrac{D-x}{1+Dx}$.

7. $2y^3y' + x = y^4x.$

Решење: За $y^2 \neq 1$ из дате једначине следи да је $\dfrac{2y^3dy}{y^4-1} = xdx$, па је

$$\frac{1}{2}\, ln\, |y^4 - 1| = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$y^4 = 1 + Ce^{x^2} \quad (C \in R).$$

Решења $y = -1$ и $y = 1$ добијамо из општег решења за $C = 0$.

8. $y' + sin\, \dfrac{x+y}{2} = sin\, \dfrac{x-y}{2}.$

Решење: Дата једначина је еквивалентна једначини

$$y' + 2\, sin\, \frac{y}{2}\, cos\, \frac{x}{2} = 0.$$

За $y \neq 2k\pi$ $(k \in Z)$ из ове једначине следи да је

$$sin^{-1}\, \frac{y}{2} dy + 2\, cos\, \frac{x}{2} dx = 0,$$

одакле интеграцијом добијамо опште решење

$$ln\left|tan\, \frac{y}{4}\right| + 2\, sin\, \frac{x}{2} = C \quad (C \in R).$$

Решења $y = 2k\pi$ не могу да се добију из општег решења ни за једну вредност константе C, што значи да су то сингуларна решења.

Смене променљивих

У задацима 9.−11. погодном сменом свести дату диференцијалну једначину на једначину која раздваја променљиве.

9. $y' = cos(x + y)$.

Решење: Ако је $x + y = z(x)$ из дате једначине следи да је $z' = 1 + cos\, z$. За $z \neq (2k+1)\pi$ интеграцијом добијамо да је $tan\frac{z}{2} = x + C$, па је опште решење

$$y = -x + 2\, arctan(x + C) \quad (C \in R).$$

Решења су такође и $z = (2k+1)\pi$, односно $y = -x + (2k+1)\pi$ и то сингуларна.

10. $y' = \dfrac{2y + x + 1}{2x + 4y + 3}$.

Решење: Сменом $x + 2y = z(x)$ добијамо једначину

$$\frac{2z + 3}{4z + 5}dz = dx \quad (z \neq -5/4),$$

па интеграцијом имамо да је

$$\frac{1}{2}z + \frac{1}{8}\, ln\, |4z + 5| = x + C \ (C \in R).$$

Како је и $z = -5/4$ решење, опште решење дате једначине је

$$4x + 8y + 5 = De^{4x-8y} \ (D \in R).$$

11. $(x - y + 1)dy = (ay - ax + 1)dx \ (a \in R)$.

Решење: Ако је $x - y = u(x)$, онда из дате једначине следи да је

$$\frac{u + 1}{u}du = (1 + a)dx,$$

па је

$$u + ln\, |u| = (a + 1)x + C \quad (C \in R).$$

Према томе, опште решења дате једначине је

$$ln\, |x - y| = ax + y + C \quad (C \in R).$$

1.2 Хомогене једначине

У задацима 12. – 26. одредити опште решење дате једначине.

12. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

Решење: За $x \neq 0$ је $y' = \dfrac{1+y/x}{1-y/x}$, па сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$xu' = \frac{1+u}{1-u} - u,$$

односно

$$\frac{1-u}{1+u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом леве и десне стране ове једначине имамо да је

$$arctan\, u - ln\sqrt{1+u^2} = ln\,|x| + C_1, \quad (C_1 \in R)$$

односно

$$e^{arctan\, x} = C_2|x|\sqrt{1+u^2} \quad (C_2 \in R^+).$$

Како је $u = y/x$, опште решење је

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{arctan\, y/x} \quad (C \in R^+).$$

Напомена: У поларним координатама опште решење је $\varrho = Ce^{\varphi}$, што значи да интегралне криве представљају фамилију логаритамских спирала.

13. $y' = \dfrac{y-x}{y}$.

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$\frac{udu}{u^2-u+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом леве и десне стране имамо да је

$$ln(u^2-u+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctan\, \frac{2u-1}{\sqrt{3}} = -\,ln\, x^2 + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

па је опште решење

$$\sqrt{3}\, ln(x^2-xy+y^2) + 2\, arctan\, \frac{2y-x}{x\sqrt{3}} = C \quad (C \in R).$$

14. $(x-y)y' = x$.

Решење: За $x \neq y$ и $x \neq 0$ сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{u^2-u+1}du.$$

Интеграцијом налазимо да је

$$ln\,|x| = -\,ln\sqrt{u^2-u+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\, arctan\, \frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

па је опште решење дате једначине

$$3\, ln\sqrt{y^2-yx+x^2} = \sqrt{3}\, arctan\, \frac{2y-x}{\sqrt{3}x} + C \quad (C \in R).$$

15. $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Решење: Сменом $y/x = u$ добијамо једначину

$$xu' = -\frac{u^3}{1+u^2} \qquad (*),$$

односно $\dfrac{1+u^2}{u^3}du = -\dfrac{dx}{x}$. Интеграцијом леве и десне стране ове једнакости имамо да је

$$ln\,|xu| = \frac{1}{2u^2} + A \quad (A \in R),$$

односно $xu = Be^{1/2u^2}$ $(B \neq 0)$. Како је и $u = 0$ решење једначине $(*)$, њено опште решење је $xu = Ce^{1/u^2}$ $(C \in R)$, а $y = Ce^{x^2/2y^2}$ опште решење дате једначине.

16. $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0.$

Решење: За $x(y-x) \neq 0$ из дате једначине добијамо да је

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{(y/x)^2}{y/x - 1}.$$

Сменом $y/x = u(x)$ имамо једначину која раздваја променљиве

$$xu' = \frac{u}{u-1}, \tag{$*$}$$

односно

$$\frac{u-1}{u}du = \frac{dx}{x}$$

за $u \neq 0$. Интеграцијом леве и десне стране ове једначине имамо да је

$$ln\,|xu| = u + C_1, \quad (C_1 \in R)$$

односно $xu = C_2e^u$ $(C_2 \in R \setminus \{0\})$. Како је $u = 0$ решење једначине $(*)$, то је опште решење те једначине $xu = Ce^u$, где је $C \in R$, а $y = Ce^{y/x}$ опште решење дате једначине.

17. $y^2dx + x\left(\sqrt{y^2 - x^2} - y\right)dy = 0.$

Решење: Једначина је дефинисана за $|y| \geq |x|$, а за $x \neq 0$ је еквивалентна једначини

$$y' = \frac{y^2}{x(y - \sqrt{y^2 - x^2})}.$$

Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$\frac{dx}{x} = \frac{u - \sqrt{u^2-1}}{u\sqrt{u^2-1}}du.$$

Након интеграције леве и десне стране ове једначине имамо да је

$$ln\,|x| = ln(u + \sqrt{u^2-1}) - ln\,|u| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$x = C_2\frac{u + \sqrt{u^2-1}}{u} \quad (C_2 \in R \setminus \{0\}).$$

Како је и $x = 0$ решење дате једначине, опште решење је

$$yx = C\left(y + sgn(x)\sqrt{y^2 - x^2}\right) \quad (C \in R).$$

18. $xy' - y = x(1 + e^{y/x}).$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$\frac{du}{1+e^u} = \frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом имамо да је

$$ln\,\frac{e^u}{1+e^u} = ln\,|x| + C_1, \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$\frac{e^u}{1+e^u} = C|x|, \quad (C \in R^+).$$

Како је $y/x = u$, опште решење дате једначине је

$$y = |x|\,ln\,\frac{C|x|}{1-C|x|}, \quad (C \in R^+,\ C|x| < 1).$$

Напомена: Област дефинисаности функције y зависи од вредности константе C.

19. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ из дате добијамо једначину

$$u'x = \sqrt{1-u^2}, \qquad (*),$$

односно

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}, \quad u^2 \neq 1,\ x \neq 0.$$

Интеграцијом ове једначине имамо да је

$$arcsin\,u = ln\,|x| + C \quad (C \in R).$$

Како су $u = 1$ и $u = -1$ решења једначине $(*)$, то су решења дате једначине

$$y = x, \quad y = -x, \quad y = x\,sin(ln\,|x| + C).$$

20. $y' = \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 y}.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$\frac{udu}{2-u^2-u^3} = \frac{dx}{x}.$$

Како је

$$\frac{u}{2-u^2-u^3} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{u-1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{u-2}{u^2+2u+2}$$

интеграцијом се добија да је

$$-\frac{1}{5}\,ln\,|u-1| + \frac{1}{10}\,ln(u^2+2u+2) - \frac{3}{5}\,arctan(u+1) = ln\,|x| + A \quad (A \in R),$$

$$-2\,ln\,|u-1| + ln(u^2+2u+2) - 6\,arctan(u+1) = 10\,ln\,|x| + B \quad (B \in R),$$

$$ln\,\frac{u^2+u+2}{(1-u)^3 x^{10}} = C + 6\,arctan(1+u)\ (C \in R),$$

односно

$$\frac{y^2+2xy+2x^2}{(x-y)^2 x^{10}} = De^{arctan\,\frac{x+y}{x}} \quad (D \in R^+).$$

21. $(y^2 - x^2 + 2xy)dx + (y^2 - x^2 - 2xy)dy = 0.$

Решење: Дата једначина је хомогена, па сменом $u(x) = y/x$, за $u \neq 1$, добијамо једначину

$$\frac{u^2 - 2u - 1}{(1-u)(u^2+1)}du = \frac{dx}{x}.$$

Како је

$$\frac{u^2 - 2u - 1}{(1-u)(u^2+1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{2u}{u^2+1},$$

интеграцијом налазимо да је

$$ln\,|u-1| - ln(1+u^2) = ln\,|x| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$u - 1 = Cx(u^2+1) \quad (C \in R).$$

Према томе, опште решење је $y - x = C(x^2+y^2)$. За $u = 1$ добијамо решење $y = x$.

Напомена: Ако опште решење напишемо у облику

$$x^2 + y^2 = D(y-x) \quad (D \in R),$$

видимо да су интегралне криве кружнице које садрже координатни почетак и чији центри припадају правој $y = -x$. Партикуларно решење $y = x$ се добија за $D = \infty$.

22. $y' + \dfrac{x^2+y^2}{xy} = 0.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину $\dfrac{u}{1+2u^2}du = -\dfrac{dx}{x}$. Интеграцијом леве и десне стране налазимо да је

$$ln(1+2u^2) = -4\,ln\,|x| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно $1 + 2u^2 = C/x^4$ $(C > 0)$. Према томе, опште решење је

$$x^4 + 2x^2y^2 = C.$$

23. $xydy - y^2dx = (x+y)^2e^{-y/x}dx.$

Решење: Сменом $y/x = u$ дата једначина се своди на једначину

$$\frac{ue^u du}{(1+u)^2} = \frac{dx}{x}. \qquad (*)$$

Како је

$$\int \frac{ue^u du}{(1+u)^2} = \int \frac{e^u(1+u) - e^u}{(1+u)^2}du = \int d\left(\frac{e^u}{1+u}\right) = \frac{e^u}{1+u},$$

то из једначине $(*)$ следи да је $\dfrac{e^u}{1+u} = ln\,|x| + C_1$ $(C_1 \in R)$, односно $\dfrac{e^u}{1+u} = ln\,C|x|$ $(C > 0)$, па је опште решење $xe^{y/x} = (x+y)\,ln\,C|x|$.

24. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ следи да је

$$u'x + u = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}+1}, \quad u'x = -\frac{u\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+u^2}+1},$$

$$\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{u\sqrt{1+u^2}}du = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{du}{u} + \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом леве и десне стране последње једнакости налазимо да је

$$ln\, u - ln\, \frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u} = -\,ln\, x + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$\frac{u^2}{1+\sqrt{1+u^2}} = \frac{C}{x}, \quad \sqrt{1+u^2} - 1 = \frac{C}{x}.$$

Према томе, опште решење је $\sqrt{x^2+y^2} = C + x$ или $y^2 = C^2 + 2Cx$.

Напомена: $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ се лако добија сменом $t = 1/u$.

25. $(e^{2x} - y^2)\, dx + ydy = 0.$

Решење: Нека је $P = (e^{2x} - y^2)\, \lambda(x)$ и $Q = y\lambda(x)$. Из услова $P'_y = Q'_x$ налазимо $\lambda(x) = e^{-2x}$. За једначину

$$\left(1 - e^{-2x}y^2\right) dx + e^{-2x}ydy = 0$$

имамо да је

$$u(x,y) = \int \left(1 - e^{-2x}y^2\right) dx + \varphi(y) = x + \frac{1}{2}y^2e^{-2x} + \varphi(y).$$

Како је $\varphi'(y) = 0$, опште решење је

$$x + \frac{1}{2}y^2e^{-2x} = C, \quad C \in R.$$

26. $\left(2x \cdot sh\dfrac{y}{x} + y \cdot ch\dfrac{y}{x}\right) dx - x \cdot ch\dfrac{y}{x}dy = 0.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$\frac{ch\ u}{sh\ u}du = 2\frac{dx}{x}$$

чије је решење $sh\ u = Cx^2$. Према томе, опште решење је $sh\dfrac{y}{x} = Cx^2$.

Свођење на хомогену

У задацима 27. – 30. решити дате диференцијалне једначине свођењем на хомогену једначину.

27. $y' = \dfrac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}.$

Решење: Сменама $x = u + \alpha$ и $y = v + \beta$, где је

$$3\beta - 7\alpha + 7 = 0, \quad -7\beta + 3\alpha - 3 = 0,$$

добијамо хомогену једначину. Дакле, за $x = u + 1$ и $y = v$ имамо једначину

$$v' = \frac{3v - 7u}{3u - 7v},$$

из које сменом $v/u = z$ добијамо једначину која раздваја променљиве

$$\frac{2dz}{z-1} + \frac{5dz}{z+1} = -7\frac{du}{u}.$$

Интеграцијом налазимо да је

$$u^7(z-1)^2(z+1)^5 = C, \quad (u-v)(u+v)^5 = C \quad (C \in R),$$

односно, враћањем променљивих x и y

$$(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = D \quad (D \in R).$$

Друго решење: Сменама $u = 3y - 7x + 7$ и $v = 3x - 7y - 3$ добијамо да је

$$\frac{du}{dv} = \frac{3dy - 7dx}{3dx - 7dy} = \frac{3y' - 7}{3 - 7y'} = \frac{3u/v - 7}{3 - 7u/v},$$

а затим сменом $u/v = z$ имамо једначину

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{3 - 7z}{z^2 - 1} dz = \frac{dv}{v}.$$

Интеграцијом леве и десне стране налазимо да је

$$2\,ln\,|z - 1| + 5\,ln\,|z + 1| = -7\,ln\,|v| + C_1 \quad (C_1 \in R),$$

односно

$$(z-1)^2|z+1|^5 = C|v|^{1/7}, \quad (u-v)^2(u+v)^5 = C \quad (C \in R),$$

одакле добијамо исто опште решење.

28. $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

Решење: Сменама $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где је

$$2\alpha - \beta + 1 = 0, \quad \alpha - 2\beta + 1 = 0$$

дата једначина се своди на хомогену. Дакле, за $\alpha = -1/3$ и $\beta = 1/3$ имамо једначину

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u - v}{u - 2v} \tag{$*$}$$

која се сменом $v/u = z$ своди на једначину

$$\frac{1 - 2z}{1 - z + z^2} dz = 2du\ u$$

чије је решење $u^2(1 - z + z^2) = C$ $(C \in R)$. Решење једначине $(*)$ је $u^2 - uv + v^2 = C$, а опште решење дате једначине је

$$x^2 - xy + y^2 + x - y = C \quad (C \in R).$$

Друго решење: Сменама $2x - y + 1 = u$ и $x - 2y + 1 = v$ добијамо хомогену једначину

$$\frac{du}{dv} = \frac{2v - u}{v - 2u}$$

чије је решење $u^2 - uv + v^2 = C$. Враћањем променљивих x и y и сређивањем добијамо исто опште решење.

29. $(4x + 3y + 1)dx + (x + y + 1)dy = 0.$

Решење: Сменом $x = u + 2$ и $y = v - 3$ добијамо хомогену једначину

$$v' = \frac{3v/u - 4}{v/u + 1}.$$

Ако је $v/u = z(u)$, онда из претходне једначине следи да је

$$\frac{du}{u} = -\frac{1 + z}{(2 + z)^2}dz,$$

па је

$$ln\,|u| = -\,ln\,|2 + z| - \frac{1}{2 + z} + C_1 \quad (C_1 \in R).$$

Из ове једнакости добијамо опште решење хомогене једначине

$$2u + v = Ce^{-u/(2u+v)} \quad (C \in R),$$

односно опште решење дате једначине

$$2x + y - 1 = Ce^{\frac{2 - x}{2x + y - 1}}.$$

30. $y' = -\dfrac{x - 2y + 5}{2x - y + 4}.$

Решење: Сменама $x = u + \alpha$ и $y = v + \beta$, где α и β одређујемо из услова

$$\alpha - 2\beta + 5 = 0, \quad 2\alpha - \beta + 4 = 0$$

дата једначина се своди на хомогену

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u - 2v}{2u - v}$$

чије је решење $v - u = C(v + u)^3$. Према томе, опште решење је

$$y - x + 3 = C(y + x + 1)^3 \quad (C \in R).$$

Напомена: Партикуларна решења $y = x - 3$ и $y = -x - 1$ се добијају из општег за $C = 0$ и $C = \infty$.

1.3 Линеарне једначине

31. Линеарну једначину $y' + p(x)y = q(x)$ решити сменом $q/y = z'/z$.

Решење: Датом сменом добијамо да је $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} - pdx$, одакле следи да је

$$y = ze^{-\int p(x)dx}.$$

Из једнакости $z' = qe^{\int p(x)dx}$ налазимо да је $z = \displaystyle\int qe^{\int pdx} + C$ $(C \in R)$. Према томе,

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

32. Линеарну једначину $y' + p(x)y = q(x)$ решити методом варијацје константе.

Решење: Опште решење хомогене једначине $y' + p(x)y = 0$ је $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ $(C \in R)$. Ако је решење дате једначине $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, онда је

$$y' + p(x)y = C'e^{-\int p(x)dx} - pCe^{-\int p(x)dx} + pCe^{-\int p(x)dx} = C'(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Из једнакости $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$ добијамо да је $C(x) = \displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + D$, где је $D \in R$, па је

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(D + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

33. Ако је y_1 једно партикуларно решење линеарне једначине $y' + p(x)y = q(x)$, доказати да је њено опште решење

$$y(x) = y_1(x) + Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C \in R).$$

Решење: Ако је $y = y_1 + u$, тада заменом $y_1 + u$ уместо y и $y_1' + u'$ уместо y' у датој једначини добијамо да је да је $u' + pu = 0$. Према томе, $u = Ce^{-\int p(x)dx}$ $(C \in R)$. Из ове и прве једнакости следи тврђење задатка.

34. Ако је опште решење дате једначине $y(x) = C\alpha(x) + \beta(x)$, где је $C \in R$, α и β диференцијабилне функције и $\alpha(x) \neq 0$, доказати да је та једначина линеарна.

Решење: Елиминацијом константе C из једнакости $y = C\alpha + \beta$ и $y' = C\alpha' + \beta'$ добијамо да је

$$\alpha y' = (y - \beta)\alpha' + \alpha\beta',$$

одакле следи

$$y' - \frac{\alpha'}{\alpha}y = \beta' - \frac{\beta\alpha'}{\alpha},$$

што је линеарна једначина $(p(x) = -\alpha'/\alpha,\ q(x) = \beta' - \beta\alpha'/\alpha)$.

35. Линеарну једначину $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$ решити методом неодређених функција.

Решење: Ако је $y(x) = u(x)v(x)$, тада је $y' = u'v + uv'$, па из дате једначине следи

$$u'v + u(v' + 2xv) = 2x^2e^{-x^2}.$$

Изаберимо функцију v за коју је $v' + 2xv = 0$. Једна таква функција је $v : x \to e^{-x^2}$. При томе је $u'e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2}$, односно $u' = 2x^2$, па је $u(x) = 2x^3/3 + C$ $(C \in R)$. Пема томе, опште решење је $y = e^{-x^2}\left(2x^3/3 + c\right)$.

36. Линеарну једначину $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$ решити методом неодређених функција, а затим одредити партикуларно решење за које је $y(1) = 1/2$.

Решење: Ако је $y(x) = u(x)v(x)$, тада из дате једначине следи да је

$$u'v + \left(v' - \frac{v}{x(x+1)}\right)u = 1.$$

Када v изаберемо тако да је $v' = \dfrac{v}{x(x+1)}$, на пример $v = \dfrac{x}{x+1}$, имамо да је $\dfrac{xu'}{x+1} = 1$, одакле добијамо $u = x + ln\,|x| + C$ $(C \in R)$. Према томе, опште решење је $y = uv$, односно

$$y(x) = \frac{x}{x+1}\left(x + ln\,|x| + C\right),$$

а тражено партикуларно решење се добија за $C = 0$.

37. Линеарну једначину $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ решити методом варијације константе.

Решење: Решимо, најпре, хомогену једначину $y' + y\cos x = 0$. Из једнакости $dy/y = -\cos x dx$ следи да је $|y| = Ae^{-\sin x}$ $(A > 0)$, односно $y = Be^{-\sin x}$ $(B \neq 0)$. Како је и $y = 0$ решење хомогене једначине, то је њено опште решење $y(x) = Ce^{-\sin x}$ $(C \in R)$, а опште решење дате једначине је $y(x) = C(x)e^{-\sin x}$, при чему је $C'(x) = e^{\sin x}\sin x \cos x$. Интеграцијом десне стране последње једнакости имамо

$$C(x) = \int e^{\sin x}\sin x d(\sin x) = sinxe^{\sin x} - e^{\sin x} + D \quad (D \in R),$$

па је опште решење $y(x) = De^{-\sin x} + \sin x - 1$.

У задацима 38. – 45. решити дату диференцијалну једначину.

38. $xy' + y = ln\,x$.

Решење: Пошто је $x > 0$, дата једначина је еквивалентна линеарној једначини

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{ln\,x}{x},$$

па је

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(C + \int ln\,x dx\right) = \frac{C}{x} + ln\,x - 1 \quad (C \in R).$$

39. $y' + xy = x^3$.

Решење: Дата једначина је линеарна, па је

$$y = e^{-\int x dx}\left(C + \int x^3 e^{x^2/2}dx\right) = e^{-x^2/2}\left(C + x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2}\right) = Ce^{-x^2/2} + x^2 - 2.$$

40. $x^3y' + 2x^2y = 3x^3 + 1$.

Решење: За $x \neq 0$ из дате једначине следи да је $y' + \dfrac{2}{x}y = 3 + \dfrac{1}{x^3}$, па је

$$y(x) = e^{-\int \frac{2dx}{x}}\left(C + \int\left(3 + \frac{1}{x^3}\right)e^{\int \frac{2dx}{x}}dx\right) = \frac{C}{x^2} + x + \frac{ln\,|x|}{x^2}.$$

41. $2xy' = 2y - \sqrt{x}.$

Решење: За $x \neq 0$ из дате једначине следи да је $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$, па је

$$y(x) = |x|\left(C_1 - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x}}\right) = Cx - \frac{1}{2}x\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = Cx + \sqrt{x} \quad (C \in R).$$

42. $xy' = (x-1)e^x + y.$

Решење: За $x \neq 0$ из дате једначине следи да је $y' - \frac{1}{x}y = \frac{x-1}{x}e^x$, па је

$$y(x) = |x|\left(C_1 + \int \frac{1}{|x|}\cdot\frac{x-1}{x}e^x dx\right) = Cx + x\int \frac{x-1}{x^2}e^x dx \ (C \in R).$$

Како је

$$\int \frac{x-1}{x^2}e^x dx = \int \frac{e^x x - e^x}{x^2}dx = \int d\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{e^x}{x},$$

опште решење је $y(x) = Cx + e^x$.

Напомена: Ако на $\int \frac{e^x}{x}dx$ применимо парцијалну интеграцију ($u = 1/x$, $e^x dx = dv$), имамо да је $\int \frac{e^x}{x}dx = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}dx$.

43. $(1+x^2)y' = x(1+2x^2)y + x\sqrt{1+x^2}.$

Решење: Из дате једначине следи да је

$$y' - \frac{x(1+2x^2)}{1+x^2}y = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}.$$

Како је

$$\int \frac{x(1+2x^2)}{1+x^2}dx = \int xdx + \int \frac{x^3dx}{1+x^2} = \int xdx + \int xdx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x^2 - ln\sqrt{1+x^2},$$

то је

$$y(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\left(C - \frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)\right) = \frac{Ce^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \quad (C \in R).$$

Линеарна по x

44. $(x + y^3 \sin y)dy = ydx.$

Решење: Дата једначина је линеарна по x јер је $x' - \frac{1}{y}x = y^2 \sin y$, па је

$$\begin{aligned} x(y) &= e^{\int \frac{dy}{y}}\left(C + \int y^2 \sin y e^{-\int \frac{dy}{y}}dy\right) \\ &= |y|\left(C + sgn(y)\int y \sin y dy\right) \\ &= |y|(C + sgn(y)\sin y - sgn(y) y \cos y) \\ &= y(D + \sin y - y\cos y). \end{aligned}$$

45. $(y^2 + x\,tan\,y)y' = 1.$

Решење: Дата једначина је линеарна по x јер је $x' - x\,tan\,y = y^2$, па је

$$\begin{aligned} x(y) &= e^{-\,ln\,|\,cos\,y|}\left(C_1 + \int e^{ln\,|\,cos\,y|}y^2dy\right) \\ &= \frac{1}{|\,cos\,y|}\left(C_1 + \int |\,cos\,y|y^2dy\right) \\ &= \frac{C}{cos\,y} + \frac{1}{cos\,y}\int y^2\,cos\,ydy \end{aligned}$$

Како је

$$\int y^2\,cos\,ydy = y^2\,sin\,y + 2y\,cos\,y - 2\,sin\,y,$$

то је

$$x(y) = \frac{C}{cos\,y} + 2y + (y^2 - 2)\,tan\,y, \quad C \in R.$$

1.4 Бернулијеве једначине

46. Бернулијеву једначину

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \quad (\alpha \notin \{0,1\})$$

решити методом неодређених функција.

Решење: Нека је $y(x) = u(x)v(x)$. Из дате једначине добијамо да је

$$u'v + u(v' + pv) = qu^\alpha v^\alpha.$$

Ако v изаберемо тако да је $v' + pv = 0$, на пример $v = e^{-\int p(x)dx}$, онда је

$$\frac{du}{u^\alpha} = qe^{(1-\alpha)\int p(x)dx},$$

па је

$$u^{1-\alpha} = C + (1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx.$$

Како је $v^{1-\alpha} = e^{(\alpha-1)\int p(x)dx}$, опште решење Бернулијеве једначине је

$$y^{1-\alpha} = e^{(\alpha-1)\int p(x)dx}\left(C + (1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx\right).$$

47. Бернулијеву једначину $y' - \dfrac{4}{x}y = x\sqrt{y}$ решити методом неодређених функција.

Решење: Ако је $y = uv$, онда из дате једначине следи да је

$$u'v + u\left(v' - \frac{4}{x}v\right) = x\sqrt{y}.$$

За $v' = 4v/x$, односно за $v = x^4$, имамо једначину $u'x = \sqrt{u}$ чије је опште решење $4u = ln^2\,|Cx|$ $(C \neq 0)$. Према томе, опште решење дате једначине је $4y = x^4\,ln^2\,|Cx|$.

Свођење на линеарну

У задацима 48. – 59. решити дату једначину свођењем на линеарну.

48. $y' + xy = xy^3$.

Решење: Функција $y : x \mapsto 0$ је решење дате једначине. За $y \neq 0$, сменом $z(x) = y^{-2}(x)$ добијамо линеарну једначину

$$z' - 2xz = -2x$$

из које следи да је

$$z(x) = e^{x^2}\left(C - 2\int e^{-x^2} x dx\right) = e^{x^2}\left(C + e^{-x^2}\right) = Ce^{x^2} + 1.$$

Према томе, $y^2 = \dfrac{1}{Ce^{x^2}+1}$, односно $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{Ce^{x^2}+1}}$ је опште решење из којег се $y = 0$ добија за $C = +\infty$.

49. $y' - \dfrac{2}{x}y = 2\sqrt{y}\, ln\, x$.

Решење: Дата једначина је Бернулијева. Сменом $z = \sqrt{y}$ $(y \neq 0)$ добијамо линеарну једначину

$$z' - \frac{1}{x}z = ln\, x$$

чије је решење

$$z(x) = Cx + \frac{x}{2}\, ln^2 x, \quad C \in R.$$

Према томе, опште решење је $y = \left(Cx + \dfrac{x}{2}\, ln^2 x\right)^2$.

50. $2y' - y + y^3 \sin x = 0$.

Решење: Дата једначина је Бернулијева, па се сменом $z = y^{-2}$ своди на линеарну једначину $z' + z = \sin x$ чије је решење

$$z(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x), \quad C \in R.$$

Према томе, опште решење је

$$\frac{1}{y^2} = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x),$$

а $y = 0$ је сингуларно решење.

51. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos x}{y}, \quad y(\pi/2) = \sqrt{2}$.

Решење: Дата једначина је Бернулијева, па се сменом $z = y^2$ своди на линеарну једначину

$$z' + \frac{2}{x}z = 2\cos x$$

чије је опште решење

$$y^2 = \left(2 - \frac{2}{x^2}\right) sin\, x + \frac{4}{x} cos\, x + \frac{C}{x^2}, \quad C \in R.$$

Из датог услова следи да се тражено партикуларно решење добија за $C = 4$.

52. $y' - \dfrac{y}{sin\, x} + y^2 \, cot\, \dfrac{x}{2} = 0.$

Решење: Дата једначина је Бернулијева, па се сменом $z = y^{-1}$ своди на линеарну једначину

$$z' + \frac{1}{sin\, x} z = cot\, \frac{x}{2}.$$

Према томе,

$$z(x) = \frac{1}{|\, tan\, \frac{x}{2}|} \left(C_1 + \int |\, tan\, \frac{x}{2}|\, cot\, \frac{x}{2} dx\right) = (C + x)\, cot\, \frac{x}{2}.$$

Опште решење је $\dfrac{1}{y} = (C + x)\, cot\, \dfrac{x}{2}$, а $y = 0$ је сингуларно решење.

53. $y' + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{2}{cos^2 x}\sqrt{y}.$

Решење: Дата једначина је Бернулијева. За $y \neq 0$ сменом $z = \sqrt{y}$ добијамо линеарну једначину

$$z' + \frac{1}{x} z = \frac{1}{cos^2 x},$$

па је

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{|x|}\left(C_1 + \int \frac{|x| dx}{cos^2 x}\right) \\ &= \frac{1}{|x|}\left(C_1 + sgn(x) \int x d(tan\, x)\right) \\ &= \frac{C}{x} + tan\, x + \frac{ln\, |\, cos\, x|}{x} \end{aligned}$$

Према томе, опште решење је

$$y = \left(tan\, x + \frac{C + ln\, |\, cos\, x|}{x}\right)^2,$$

а $y = 0$ је сингуларно решење.

54. $x(1 - x^2)y' + (2x^2 - 1)y = x^3 y^3.$

Решење: Функција $y : x \to 0$ је решење дате једначине. За $y \neq 0$ имамо Бернулијеву једначину

$$y' + \frac{2x^2 - 1}{x(1 - x^2)} y = \frac{x^2}{1 - x^2} y^3$$

која се сменом $z = y^{-2}$ своди на линеарну једначину

$$z' - 2 \cdot \frac{2x^2 - 1}{x(1 - x^2)} z = -\frac{2x^2}{1 - x^2}.$$

Како је

$$\int \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1},$$

то је

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\,ln\,x^2|x^2-1|}\left(C_1 - \int e^{ln\,x^2|x^2-1|}\frac{x^2dx}{1-x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2|x^2-1|}\left(C_1 + 2sgn\{x^2-1\}\int x^4dx\right) \\ &= \frac{C}{x^2(x^2-1)} + \frac{2}{5}\frac{x^3}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Према томе, опште решење је $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{C}{x^2(x^2-1)} + \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

55. $(1+x^2)y' - 4\sqrt{y(1+x^2)}\,arctan\,x = 2xy.$

Решење: Функција $y : x \to 0$ је решење дате једначине. За $y > 0$ имамо Бернулијеву једначину

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4\,arctan\,x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{y}}$$

која се сменом $z = \sqrt{y}$ своди на линеарну једначину

$$z' - \frac{x}{1+x^2}z = \frac{2\,arctan\,x}{\sqrt{1+x^2}}$$

чије је решење $z = \sqrt{1+x^2}(arctan^2\,x + C)$ $(C \in R)$. Према томе, опште решење је

$$y = (1+x^2)(arctan^2\,x + C)^2.$$

Бернулијева по x

56. $(x^2\,ln\,y - x)y' = y.$

Решење: Дата једначина је Бернулијева по x јер је

$$x' + \frac{1}{y}x = \frac{ln\,y}{y}x^2$$

и дефинисана је за $y > 0$. Сменом $z(y) = 1/x(y)$ ова једначина се своди на линеарну једначину

$$z' - \frac{1}{y}z = -\frac{ln\,y}{y}.$$

Према томе,

$$z(y) = y\left(C - \int \frac{ln\,y}{y^2}dy\right) = Cy + ln\,y + 1,$$

а опште решење је $Cy + ln\,y + 1 = 1/x$.

57. $y'(x^2y^3 + xy) = 1.$

Решење: Дата једначина је Бернулијева по x јер је

$$x' - \frac{1}{y}x = x^2y^3.$$

За $x \neq 0$ сменом $z(y) = x^{-1}(y)$ добијамо линеарну једначину $z' + \frac{1}{y}z = -y^3$, па је

$$\begin{aligned} z(y) &= e^{-y^2/2}\left(C - \int y^3 e^{y^2/2} dy\right) \\ &= e^{-y^2/2}\left(C - y^2e^{y^2/2} + 2e^{y^2/2}\right) \\ &= Ce^{-y^2/2} - y^2 + 2. \end{aligned}$$

Према томе, опште решење је $\frac{1}{x} = Ce^{-y^2/2} - y^2 + 2$.

58. $(1 - x^2 \sin y)xy' = 2$.

Решење: Из дате једначине следи

$$x' - \frac{1}{2}x = -\frac{\sin y}{2}x^3.$$

Сменом $z(y) = x^{-2}(y)$ добијамо линеарну једначину $z' + z = \sin y$ чије је решење

$$z = Ce^{-y} + \frac{1}{2}(\sin y - \cos y), \quad C \in R.$$

Према томе, опште решење је $\frac{1}{x^2} = Ce^{-y} + \frac{1}{2}(\sin y - \cos y)$.

59. $y' \sin y + 4x^3 \cos^3 y = 2x$.

Решење: Сменом $z = \cos y$ добијамо Бернулијеву једначину

$$z' + 2xz = 4x^3z^4$$

која се своди (сменом $u = z^{-3}$) на линеарну

$$u' - 6xu = -12x^3$$

чије је решење

$$u(x) = Ce^{3x^2} + 2x^2 + \frac{2}{3}, \quad C \in R.$$

Према томе, опште решење је $\frac{1}{\cos^3 y} = Ce^{3x^2} + 2x^2 + \frac{2}{3}$.

1.5 Једначине са тоталним диференцијалом

60. Дата је једначина $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, при чему је $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$. Доказати да је опште решење те једначине $u(x,y) = C$ $(C \in R)$, где је

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy.$$

Решење: Из услова $P'_y = Q'_x$ следи да је израз $Pdx + Qdy$ диференцијал неке функције u, односно да је

$$P(x,y)dx + Q(x,y)du = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy.$$

Према томе,

$$u(x,y) = \int u'_x(x,y)dx + \varphi(y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y). \qquad (*)$$

Из услова $u'_y = Q$ следи да је $\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int Pdx + \varphi' = Q$, одакле имамо да је

$$\varphi'(x,y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx, \quad \varphi(y) = \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy.$$

Из последње једнакости и једнакости $(*)$ следи тврђење задатка.

У задацима 61. – 70. решити дате једначине свођењем на облик $Pdx + Qd = 0$.

61. $(xy^4 - 2x^3y^2)dx + (2x^2y^3 - x^4y)dy = 0.$

Решење: Лева страна $L(x,y)$ дате једначине је потпуни диференцијал јер је

$$L(x,y) = xy^4dx + 2x^2y^3dy - (2x^3y^2dx + x^4ydy) = \frac{1}{2}d(x^2y^4) - \frac{1}{2}d(x^4y^2).$$

Према томе, опште решење је

$$x^2y^2(x^2 - y^2) = C \quad (C \in R).$$

Друго решење: Пошто је испуњен услов $P'_y = Q'_x$, опште решење је $u(x,y) = C$ $(C \in R)$, где је

$$u(x,y) = \int_0^x (xy^4 - 2x^3y^2)dx + \int_0^y 0 \cdot dy = \frac{1}{2}x^2y^4 - \frac{1}{2}x^4y^2.$$

62. $(2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy = 0.$

Решење: Ако је $L(x,y)$ лева страна дате једначине, онда је

$$\begin{aligned} L(x,y) &= 2x\cos ydx - x^2\sin ydy + 2y\cos xdy - x^2\sin ydx \\ &= d(x^2\cos y) + d(y^2\cos x) \\ &= d(x^2\cos y + y^2\cos x). \end{aligned}$$

Према томе, опште решење је $x^2\cos y + y^2\cos x = C \quad (C \in R)$.

Друго решење: Пошто је испуњен услов $P'_y = Q'_x$, опште решење је $u(x,y) = C$ $(C \in R)$, где је

$$u(x,y) = \int_0^x (2x\cos y - y^2\sin x)dx + \int_0^y 2ydy = x^2\cos y + y^2\cos x.$$

63. $(xe^y + e^x)y' + e^y + ye^x = 0.$

Решење: Из дате једначине следи да је

$$(e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^x)dy = 0.$$

Ако је $L(x,y)$ лева страна ове једначине, онда је

$$L(x,y) = e^y dx + xe^y dy + ye^x dx + e^x dy = d(xe^y) + d(ye^x),$$

па је опште решење $xe^y + ye^x = C$ $(C \in R)$.

Друго решење: Пошто је испуњен услов $P'_y = Q'_x$, опште решење је $u(x,y) = C$ $(C \in R)$, где је

$$u(x,y) = \int_0^x (e^y + ye^x)dx + \int_0^y dy = e^y x + ye^x.$$

64. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{dy}{x} = \dfrac{ydx}{x^2}.$

Решење: Како је

$$d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

то је дата једначина еквивалентна једначини $d\left(\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x}\right) = 0$. Према томе, опште решење дате једначине је

$$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C, \quad (C \in R).$$

65. $y'(e^y + x + sin\, x) + e^x + y + y\, cos\, x = 0.$

Решење: Дата једначина је еквивалентна једначини

$$(e^y + x + sin\, x)dy + (e^x + y + y\, cos\, x)dx = 0,$$

односно једначини

$$e^y dy + e^x dx + xdy + ydx + sin\, xdy + y\, cos\, xdx = 0.$$

Како је $d(xy) = ydx + xdy$ и $d(y\, sin\, x) = y\, cos\, xdx + sin\, xdy$, то је опште решење дате једначине $e^y + e^x + xy + y\, sin\, x = C, \quad (C \in R)$.

66. $\dfrac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx.$

Решење: Ако је

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - 1, \quad Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

онда је

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

па је у питању једначина са тоталним диференцијалом. Из једнакости $u'_x = P$ следи да је

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = arctan\, \frac{x}{y} - x + \varphi(y),$$

а из једнакости $u'_y(x,y) = Q(x,y)$ следи да је $\varphi(y) = C_1$, где је $C_1 \in R$. Према томе, $u(x,y) = arctan\, \dfrac{x}{y} - x + C_1$, а опште решење дате једначине је

$$arctan\, \frac{x}{y} - x = C \quad (C \in R).$$

Друго решење: Пошто је испуњен услов $P'_y = Q'_x$, опште решење је $u(x,y) = C$ $(C \in R)$, где је

$$u(x,y) = \int_0^x \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right) dx + \int_0^y 0 \cdot dy = arctan\,\frac{x}{y} - x.$$

Напомена: Ако у првом решењу пођемо од једнакости $u'_y = Q$, онда је

$$u(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2} dy + \psi(x) = arctan\,\frac{y}{x} + \psi(x),$$

где је $\psi'(x) = 1$, па је опште решење $arctan\,\dfrac{y}{x} + x = D$ $(D \in R)$. Исто тако, ако у другом решењу најпре интегралимо по y, имамо да је

$$u(x,y) = \int_0^y \frac{xdy}{x^2+y^2} + \int_0^x dx = arctan\,\frac{y}{x} + x.$$

67. $y' = \dfrac{(x+y+1)e^x - e^y}{(x+y+1)e^y - e^x}$.

Решење: Ако је $Q(x,y) = (x+y+1)e^y - e^x$ и $P(x,y) = e^y - e^x(x+y+1)$, онда из дате једначине следи да је $Pdx + Qdy = 0$. Како је $Q'_x = P'_y = e^y - e^x$, постоји функција $u : R^2 \to R$ таква да је $Q(x,y) = u'_y(x,y)$ и $P(x,y) = u'_x$. Из ових једнакости добијамо да је

$$u(x,y) = \int Q(x,y)dy + \varphi(x) = xe^y + ye^y - ye^x + \varphi(x)$$

и $\varphi'(x) = -xe^x - e^x$, што значи да је $\varphi(x) = -xe^x + C_1$ $(C_1 \in R)$, односно

$$u(x,y) = xe^y + ye^y - ye^x - xe^y + C = (e^y - e^x)(x+y) + C_1.$$

Према томе, опште решење дате једначине је $(e^y - e^x)(x+y) = C$ $(C \in R)$.

68. $sin\,ydx + (x+y)\,cos\,ydy = 0.$

Решење: Ако је $P(x,y) = cos\,y$ и $Q(x,y) = (x+y)\,cos\,y$, онда је $P'_y = Q'_x = cos\,y$, па постоји функција $u : R \to R$ таква да је $u'_x = P$ и $u'_y = Q$. Према томе,

$$u(x,y) = \int sin\,ydx + \varphi(y) = x\,sin\,y + \varphi(y).$$

Из услова $u'_y = Q$ следи да је $\varphi'(y) = y\,cos(y)$, па је $\varphi(y) = y\,sin\,y + cos\,y$, а опште решење дате једначине је $(x+y)\,sin\,y + cos\,y = C \quad (C \in R)$.

69. $y' = \dfrac{1 + x\sqrt{x^2+y^2}}{(1-\sqrt{x^2+y^2})y}$.

Решење: Из дате једначине следи да је

$$(1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx - (1 - \sqrt{x^2+y^2})ydy = 0.$$

Ако је

$$P(x,y) = 1 + x\sqrt{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = -y + y\sqrt{x^2+y^2},$$

онда је $P'_y = Q'_x$, па постоји функција u таква да је $u'x = P$ и $u'_y = Q$. Из ових једнакости добијамо да је

$$u(x,y) = x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3} - \frac{y^2}{2} + C_1 \ (C_1 \in R),$$

па је опште решење дате једначине

$$x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2}{2} = C \quad (C \in R).$$

Друго решење: Опште решење је $u(x,y) = C$, где је

$$u(x,y) = \int_1^x (1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx - \int_0^y (1 - \sqrt{1+y^2})ydy = x + \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2} - \frac{y^2}{2} - \frac{4}{3}.$$

70. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - y\right)dx = \left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2} - e^y\right)dy.$

Решење: Ако је $P = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - y\right)$ и $Q = -\left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2} - e^y\right)$, онда је $P'_y = Q'_z$, па имамо једначину са тоталним диференцијалом. Како је

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = arctan\,\frac{x}{y} - xy + \varphi(y), \quad \varphi'(y) = e^y,$$

опште решење је дато са

$$arctan\,\frac{x}{y} - xy + e^y = C, \quad C \in R.$$

Интеграциони фактор

71. Нека је дата једначина $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, при чему је $P'_y \neq Q'_x$. Ако постоји функција $\lambda(x,y)$ (интеграциони фактор) таква да је

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

једначина са тоталним диференцијалом, доказати да је

$$\lambda'_y P - \lambda'_x Q = \lambda(Q'_x - P'_y).$$

Решење: Ако је $\lambda P dx + \lambda Q dy = 0$ једначина са тоталним диференцијалом, онда је

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x},$$

односно

$$\lambda'_y P + \lambda'_y = \lambda'_x Q + \lambda Q'_y.$$

Из ове једнакости следи тврђење задатка.

Напомена: Ако је $\lambda = \lambda(x)$, онда је $\lambda'_y = 0$, па је $\dfrac{\lambda'_x}{\lambda} = \dfrac{P'_y - Q'_x}{Q}$. Према томе, интеграциони фактор облика $\lambda(x)$ постоји само ако $(P'_y - Q'_x)/Q$ не зависи од y. Слично, инеграциони фактор облика $\lambda(y)$ постоји само ако $(Q'_x - P'_y)/P$ не зависи од x, при чему је $\dfrac{\lambda'_y}{\lambda} = \dfrac{Q'_x - P'_y}{P}$.

72. Доказати да диференцијална једначина $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ која има опште решење $u(x,y) = C$ има интеграциони фактор.

Решење: Из једнакости $u'_x dx + u'_y dy = 0$ и дате једначине следи да је $u'_x/P = u'_y/Q$. Ако је $\lambda(x,y) = u'_x/P$, онда је $u'_x = \lambda P$ и $u'_y = \lambda Q$, што значи да је λ интеграциони фактор дате једначине.

У задацима 73. – 77. одредити интеграциони фактор и решити дату једначину.

73. $(2xy + x^2y + y^3/3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

Решење: Нека је

$$P(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}, \quad Q(x,y) = x^2 + y^2.$$

Како је $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = 1$, интеграциони фактор не зависи од y. Из једначине $d\lambda/\lambda = dx$ следи да је $\lambda(x) = e^x$. Према томе, имамо једначину са тоталним деференцијалом

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) e^x dx + (x^2 + y^2)e^x dy = 0,$$

па је

$$u(x,y) = \int (x^2 + y^2)e^x dy + \varphi(x) = x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x + \varphi(x),$$

где је $\varphi'(x) = C_1$ $(C_1 \in R)$. Према томе, опште решење је $y(3x^2+y^2)e^x = C$ $(C \in R)$.

74. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$

Решење: Нека је $P(x,y) = 2xy^2 - y$ и $Q(x,y) = y^2 + x + y$. Како је

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{2 - 4xy}{2xy^2 - y} = -\frac{2}{y},$$

интеграциони фактор не зависи од x. Из једначине $\lambda'/\lambda = -2/y$ следи да је $\lambda = 1/y^2$. Једначина

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right) dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) dy = 0$$

је са једначина са тоталним диференцијалом, па је

$$u(x,y) = \int \left(2x - \frac{1}{y}\right) dx + \varphi(y) = x^2 - \frac{x}{y} + \varphi(y),$$

где је $\varphi(y) = 1 + 1/y$, односно $\varphi(y) = y + ln\,|y|$. Према томе, опште решење је

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + ln\,|y| = C \quad (C \in R).$$

75. $(y - y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0.$

Решење: Нака је $P(x,y) = y - y^3$ и $Q(x,y) = x + xy^2$. Како је

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -\frac{4y^2}{x + xy^2}, \qquad \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{4y}{1 - y^2},$$

дата једначина има интеграциони фактор $\lambda(y)$, при чему је

$$ln\,\lambda(y) = 4\int \frac{ydy}{1-y^2} = -2\,ln(1-y^2),$$

односно $\lambda(y) = 1/(1-y^2)^2$. Према томе, једначина

$$\frac{y}{1-y^2}dx + \frac{x(1+y^2)}{(1-y^2)^2}dy = 0$$

је са тоталним диференцијалом, па њеним решавањем добијамо опште решење

$$y^2 + Cxy - 1 = 0 \quad (C \in R).$$

76. $(2x + y - yx^2)dx + x(1+x^2)dy = 0$

Решење: Нека је $P(x,y) = 2x + y - yx^2$ и $Q(x,y) = x(1+x^2)$. Како је

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -\frac{4x}{1+x^2},$$

интеграциони фактор не зависи од y. Из једначине $\dfrac{d\lambda}{\lambda} = -\dfrac{4x}{1+x^2}$ следи да је $\lambda(x) = 1/(1+x^2)^2$. Према томе, имамо једначину са тоталним деференцијалом

$$\frac{2x+y-yx^2}{(1+x^2)^2}dx + \frac{x}{1+x^2}dy = 0,$$

па је

$$u(x,y) = \int \frac{x}{1+x^2}dy + \psi(x) = \frac{xy}{1+x^2} + \psi(x),$$

где је $\psi'(x) = 2x/(1+x^2)^2$. Према томе, опште решење је $\dfrac{xy-1}{1+x^2} = C$ $(C \in R)$.

77. $y' = -\dfrac{tan\,y}{x+y}$.

Решење: Из једначине

$$\lambda'\,tan\,y + \lambda\frac{1}{cos^2 y} = \lambda$$

добијамо интеграциони фактор $\lambda(y) = cos(y)$. Након множења с λ једначина постаје

$$sin\,ydx + (x+y)\,cos\,ydy = 0,$$

па је

$$u(x,y) = \int sin\,ydx + \varphi(y) = x\,sin\,y + \varphi(y).$$

Како је $\varphi'(y) = y\,cos\,y$, то је $\varphi(y) = y\,sin\,y + cos\,y$, а опште решење је

$$(x+y)\,sin\,y + cos\,y = C, \quad C \in R.$$

78. Одредити интеграциони фактор $\lambda(y)$ и решити једначину

$$(y\,sin\,2x + xy^2)dx + (y^3 - sin^2 x)dy = 0.$$

Решење: Ако је

$$P(x,y) = (y\,sin\,2x + xy^2)\lambda(y), \quad Q(x,y) = (y^3 - sin^2 x)\lambda(y),$$

онда из услова $P'_y = Q'_y$ следи

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{2\,sin\,2x + 2xy}{y\,sin\,2x + xy^2} = -\frac{2}{y},$$

односно $\lambda(y) = 1/y^2$. Једначина са тоталним диференцијалом је

$$\left(\frac{sin\,2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0,$$

па је

$$u(x,y) = -\frac{cos\,2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y), \quad \varphi'(y) = y - \frac{1}{2y^2},$$

а опште решење је $x^2 + y^2 + \dfrac{2}{y}\,sin^2 x = C$.

79. За линеарну једначину $y' + p(x)y = q(x)$ одредити опште решење налажењем интеграционог фактора.

Решење: Из дате једначине следи да је $(p(x)y - q(x))dx + dy = 0$. Ако је $P(x,y) = p(x)y - q$ и $Q(x,y) = 1$, онда је $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = p(x)$, што значи да постоји интеграциони фактор $\lambda(x)$. Из једначине $\lambda\prime/\lambda = p(x)$ имамо $\lambda(x) = e^{\int p(x)dx}$. Према томе, једначина

$$e^{\int p(x)dx}\,(p(x)y - q(x))\,dx + e^{\int p(x)dx}dy = 0$$

је једначина са тоталним диференцијалом, па је

$$u(x,y) = \int e^{\int p(x)dx}dy + \psi(x) = ye^{\int p(x)dx} + \psi(x), \quad \psi'(x) = -q(x),$$

одакле добијамо познато опште решење линеарне једначине.

80. За диференцијалну једначину

$$(x^2y + y + 1)dx + (x + x^3)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор $\lambda(x)$, опште решење и израчунати $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$.

Решење: Множењем дате једначине са $\lambda(x)$, из услова тоталног диференцијала добијамо $\dfrac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\dfrac{2x}{1+x^2}$, па је $\lambda(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Нова једначина је

$$\left(y + \frac{1}{x^2+1}\right)dx + xdy = 0,$$

а њено опште решење је $xy + arctanx = A$ $(A \in R)$. Према томе,

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{A}{x} - \frac{arctan\,x}{x}\right) = \begin{cases} \pm\infty, & A \neq 0 \\ -1, & A = 0. \end{cases}.$$

1.6 Разне једначине

Решити дате једначине.

81. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0.$

Решење: Једначина има интеграциони фактор $\lambda(x) = e^x$, па је

$$u(x,y) = \int (x\sin y + y\cos y)e^x dx + \varphi(y) = (xe^x - e^x)\sin y + e^x y\cos y + \varphi(y), \quad \varphi'(y) = 0.$$

Према томе, опште решење је

$$((x-1)\sin y + y\cos y)\, e^x = C, \quad C \in R.$$

82. $\left(x + e^{x/y}\right)dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{x/y}dy = 0.$

Решење: Ако је $P = \left(x + e^{x/y}\right)$ и $Q = \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{x/y}$, онда је

$$P'_y = Q'_x = -\frac{x}{y^2}e^{x/y},$$

па је у питању једначина са тоталним диференцијалом. Опште решење је дато са

$$x^2 + 2ye^{x/y} = C, \quad C \in R.$$

83. $(\ln y + 2x - 1)y' = 2y.$

Решење: Једначина има интеграциони фактор $\lambda(y) = 1/y^2$. Из једначине са тоталним диференцијалом

$$\frac{2}{y}dx - \frac{1}{y^2}(\ln y + 2x - 1)dy = 0$$

добијамо

$$u(x,y) = \int \frac{2}{y}dx + \varphi(y), \quad \varphi'(y) = -\frac{\ln y - 1}{y^2}.$$

Према томе, $\varphi(y) = \dfrac{\ln y}{y}$, а опште решење је $\dfrac{2x}{y} + \dfrac{\ln y}{y} = C.$.

84. $y' = f(ax + by + c).$

Решење: Сменом $z = ax + by + c$ добијамо једначину $\dfrac{dz}{bf(z) + a} = dx$ која раздваја променљиве x и z. Ако је $F(z; a, b)$ интеграл леве стране ове једначине, онда је опште решење $x + C = F(ax + by + c; a, b)$.

85. $(x + y)y' = y.$

Решење: За $y \neq 0$ из дате једначине следи да је $x' = \dfrac{x+y}{y}$, што је хомогена једначина, па сменом $x/y = u(y)$ добијамо да је $yu' = 1$, односно $u(y) = \ln|y| + C$ $(C \in R)$. Према томе, опште решење дате једначине је $x = y(\ln|y| + C)$.

Друго решење: За $y \neq 0$ из дате једначине следи да је $x' - x/y = 1$, што је линеарна (по x) једначина, па је

$$x(y) = e^{\int \frac{dy}{y}} \left(C_1 + \int \frac{dy}{|y|} \right) = |y|(C_1 + sgn(y) \cdot ln\,|y|) = y(C + ln\,|y|).$$

86. $y(1 + xy)dx - xdy = 0.$

Решење: Нека је $P(x, y) = y(1 + xy)$ и $Q(x, y) = -x$. Како је

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -\frac{2}{x}(xy + 1), \quad \frac{Q'_x - P'_y}{P} = -\frac{2}{y},$$

дата једначина има интеграциони фактор $\lambda(y)$, при чему је $d\,ln\,\lambda(y)/dy = -2/y$, односно $\lambda(y) = 1/y^2$. Како је

$$\frac{1 + xy}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = \frac{ydx - xdy}{y^2} + xdx = d\left(xy + \frac{x^2}{2} \right),$$

то је опште решење $x^2 + 2 \cdot \dfrac{x}{y} = C \quad (C \in R)$.

Напомена: Дата једначина је Бернулијева, што значи да се може решити сменом $z = 1/y$.

87. $(x^2y^2 + x)dy + ydx = 0.$

Решење: Како је

$$\begin{aligned} (x^2y^2 + x)dy + ydx &= x^2y^2dy + xdy + ydx \\ &= x^2y^2dy + d(xy) \\ &= x^2y^2 \left(dy + \frac{d(xy)}{(xy)^2} \right), \\ &= (xy)^2 d\left(y - \frac{1}{xy} \right) \end{aligned}$$

то је $y - 1/xy = C$, где је $C \in R$, па је опште решење $xy^2 - Cxy = 1$ $(C \in R)$.

88. $y' = \dfrac{y(x - y)}{x(x + y)}.$

Решење: Из дате једначине имамо да је $y(xdy + ydx) = x(ydx - xdy)$, односно

$$d(xy) = xy\frac{ydx - xdy}{y^2} = (xy)d\left(\frac{x}{y}\right),$$

одакле следи да је $ln\,Cxy = x/y$, где је $C \in R$.

89. $(1 - y\,ln\,x)xy' = y^2.$

Решење: Из дате једначине следи да је

$$y\frac{dx}{x} + (ln\,x)dy = \frac{dy}{y},$$

односно $d(y\,ln\,x) = d(ln\,y)$, одакле добијамо опште решење

$$y\,ln\,x = ln\,y + C \ (C \in R).$$

90. $x(y^3 + ln\, x)y' + y = 0.$

Решење: Из дате једначине следи да је

$$y^3 dy + ln\, x \cdot dy + \frac{y}{x} dx = 0,$$

односно $d(y^4/4) + d(y\, ln\, x) = 0$, па је опште решење $y^4/4 + y\, ln\, x = C$ $(C \in R)$.

Друго решење: Из дате једначине следи да је

$$\frac{y}{x} dx + (y^3 + ln\, x)dy = 0,$$

што је једначина са тоталним диференцијалом. Према томе,

$$u(x, y) = \int \frac{y}{x} dx = y\, ln\, x + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ одређујемо из услова $u'_y = y^3 + ln\, x$.

91. $y' = -\dfrac{y^2 + xy + 1}{x^2 + xy + 1}.$

Решење: Из једнакости

$$(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$$

следи да је

$$(x + y)(ydx + xdy) + d(x + y) = 0.$$

Сменом $u = x + y$ и $v = xy$ добијамо једначину $dv + du/u = 0$, чије је решење $v + ln\, |u| = C$, па је решење дате једначине $e^{xy}|x + y| = D$ $(D \in R)$.

92. $(x + xy + y^2)dx = (x^2 + xy - y)dy.$

Решење: Из дате једначине следи да је

$$\frac{dx}{x^2 + xy - y} = \frac{dy}{y^2 + xy + x},$$

одакле добијамо

$$\frac{dx - dy}{(x + y)(x - y - 1)} = \frac{xdx + ydy}{(x + y)(x^2 + y^2)},$$

односно

$$(x - y - 1)^2 = C(x^2 + y^2) \ (C \in R).$$

93. $xy' \left(y - x^2 e^{-y^2}\right) = 1.$

Решење: Из дате једначине следи да је $x' - yx = -e^{-y^2} x^3$, што је Бернулијева једначина по x. Сменом $x^{-2}(y) = z(y)$ добијамо линеарну једначину по z чије је решење $z(y) = (2 + C)e^{-y^2}$ $(C \in R)$. Према томе, опште решење дате једначине је

$$x(y) = e^{y^2/2} (2y + C)^{-1/2} \quad (C \in R).$$

94. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$

Решење: Дата једначина је једначина са тоталним диференцијалом, па је

$$u(x, y) = \int (x + y - 2)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy - 2x + \varphi(y).$$

Из услова $u'(y) = x-y+4$ следи да је $\varphi'(y) = -y+4$, односно $\varphi(y) = -y^2/2+4y+C_1$ ($C_1 \in R$). Према томе, опште решење је

$$x^2 + 2xy - 4x - y^2 + 8y = C \quad (C \in R).$$

Друго решење: Сменом $x = u - 1$ и $y = v + 3$ из дате једначине добијамо хомогену једначину

$$v' = \frac{v+u}{v-u}$$

чије је опште решење $u^2 + 2uv - v^2 = C$ ($C \in R$). Враћањем променљивих x и y имамо опште решење дате једначине.

95. $\sqrt{3+2x-x^2} \cdot y' = y.$

Решење: Дата једначина раздваја променљиве, па из једнакости

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

добијамо да је $y = Ce^{arcsin\,\frac{x-1}{2}}$ ($C \in R$).

96. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1dy = 0.$

Решење: Дата једначина је једначина са тоталним диференцијалом, па је

$$u(x,y) = \int (2x - y + 1)dx + \varphi(y) = x^2 - yx + x + \varphi(y),$$

при чему је $\varphi(y) = y^2 - y + C_1$ ($C_1 \in R$). Према томе, опште решење је

$$x^2 + y^2 + x - y - xy = C \quad (C \in R).$$

Напомена 1: Ако је $A(x,y)$ лева страна дате једначине, онда је

$$A(x,y) = 2xdx + dx + 2ydy - y - (ydx + xdy) = d(x^2 + x) + d(y^2 - y) - d(xy),$$

одакле директно добијамо оште решење.

Напомена 2: Сменама $x = u + \alpha$ и $y = v + \beta$ једначина се своди на хомогену.

97. $\dfrac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \dfrac{dy}{y^2 - 4xy}.$

Решење: Из дате једначине следи да је

$$(y^2 - 4xy)dx + (2xy - x^2 - y^2)dy = 0,$$

што је једначина са тоталним диференцијалом чије је опште решење

$$2y^3 - 3xy^2 + 6x^2y = C \quad (C \in R).$$

Напомена: Дата једначина је и хомогена.

98. $y' = \dfrac{2x - 4y + 1}{x - 2y + 1}.$

Решење: Сменом $x - 2y = z$ дата једначина се своди на једначину

$$\frac{z+1}{3z+1}dz = -dx$$

чије је решење

$$\frac{1}{3}z + \frac{2}{9}\,ln +3z+1| = -x + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Враћањем променљивих x и y и сређивањем добијамо опште решење

$$(3x - 6y + 1)^2 e^{12x-6y} = C \ (C \in R).$$

99. $y' = -\dfrac{5x+3y+2}{x+y}.$

Решење: Сменама $x = u - 1$ и $y = v + 1$ добијамо хомогену једначину

$$v' = -\frac{5u+3v}{u+v},$$

а затим сменом $v/u = t$ добијамо једначину

$$\frac{1+t}{t^2+4t+5}dt = -\frac{du}{u}.$$

Интеграцијом леве и десне стране ове једнакости и враћањем променљивих x и y налазимо опште решење дате једначине

$$exp\left\{arctan\left(\frac{x+1}{y-1}+2\right)\right\} = C|x+1|\sqrt{\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 + 4\left(\frac{x+1}{y-1}\right)+5}, \quad C \in R.$$

100. $xy' = \sqrt{3x^2+y^2} + y.$

Решење: Дата једначина је хомогена, па се сменом $u = y/x$ своди на једначину $\dfrac{du}{\sqrt{u^2+3}} = \dfrac{dx}{x}$ чије је решење $u + \sqrt{u^2+3} = Cx$ $(C \neq 0)$, а опште решење дате једначине је

$$Cx^2 = y + \sqrt{3x^2+y^2}.$$

101. $yy' = xe^{y^2-x^2}.$

Решење: Из дате једначине следи да је $ye^{-y^2}dy = xe^{-x^2}dx$, односно $d(e^{-x^2}) = d(e^{-x^2})$, па је опште решење $e^{-y^2} = E^{-x^2} + C$ $(C \in R)$.

102. $y'(xy - y^3x^4) = 1.$

Решење: Дата једначина је Бернулијева по x

$$x' - yx = -y^3x^4.$$

Сменом $z(y) = x^{-3}(y)$ она се своди на линеарну једначину чије је решење

$$z(y)^3 = Ce^{-3y^2/2} + y^2 - \frac{2}{3}, \quad C \in R.$$

Према томе, опште решење је $\dfrac{1}{x^3} = Ce^{-3y^2/2} + y^2 - \dfrac{2}{3}.$

103. $y' + tan\,y = \dfrac{x}{cos\,y}.$

Решење: Сменом $z = sin\,y$ дата једначина се своди на линеарну једначину $z' + z = x$ чије је решење $z = Ce^{-x} + x - 1$ $(C \in R)$. Опште решење дате једначине је $sin\,y = Ce^{-x} + x - 1$.

104. $(x\,sin\,y + y)dx + (x^2\,cos\,y + x\,ln\,x)dy = 0.$

Решење: Ако је

$$P = (x\,sin\,y + y)\lambda(x), \quad Q = (x^2\,cos\,y + x\,ln\,x)\lambda(x),$$

онда из услова $P'_y = Q'_x$ добијамо интеграциони фактор $\lambda(x) = \dfrac{1}{x}$. Решавањем нове једначине са тоталним диференцијалом налазимо опште решење

$$x\,sin\,y + y\,ln\,x = C, \quad C \in R.$$

105. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0.$

Решење: Дата једначина је хомогена. Сменом $u = y/x$, за $u \neq -1$, она се своди на једначину

$$\frac{dx}{x} = -\frac{u^2 + 2u - 1}{(u^2+1)(u+1)}du$$

чије је решење $x(u^2+1) = C(u+1)$. Опште решење дате једначине је $x^2 + y^2 = C(x+y)$, а партикуларно решење $y = -x$ (за $u = -1$) се добија из општег за $C = \infty$.

106. $y' = \sqrt{y/x}.$

Решење: Дата једначина је дефинисана за $xy > 0$ или $y = 0$, при чему $y = 0$ јесте њено решење. За $xy > 0$ сменом $u = y/x$ једначина се своди на једначину

$$\frac{du}{\sqrt{u} - u} = \frac{dx}{x}, \quad \sqrt{u} \neq u$$

чије је решење $\sqrt{|x|}\left(\sqrt{u} - 1\right) = C$ $(C \neq 0)$. За $\sqrt{u} = u$ и $xy \neq 0$ добијамо решење $y = x$. Према томе, опште решење дате једначине је $\sqrt{|y|} = \sqrt{|x|} + C$, где је $C \in R$.

107. $(x^3 - y\sqrt{x^2+y^2})dx + (x^2y + x\sqrt{x^2+y^2})dy = 0.$

Решење: Из дате једначине следи да је

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2},$$

односно $d\sqrt{x^2+y^2} = -d(y/x)$. Према томе, опште решење је

$$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C, \quad C \in R.$$

108. $(xdy - ydx)ch\,x = x^2dx.$

Решење: Дата једначина је линеарна $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{ch\,x}$, па је

$$y(x) = |x|\left(C + sgn(x)\int\frac{dx}{ch\,x}\right) = Dx + 2x\,arctan\,e^x, \quad D \in R.$$

Друго решење: Из дате једначине следи $d\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{dx}{ch\,x}$, па је $\dfrac{y}{x} = \displaystyle\int\frac{dx}{ch\,x} + C.$

Треће решење: За $x \neq 0$ дата једначина је еквивалентна једначини са тоталним диференцијалом

$$\left(\frac{1}{ch\ x} + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

Ако је

$$u(x,y) = \int \left(\frac{1}{ch\ x} + \frac{y}{x^2}\right) dx + \varphi(y) = 2\, arctan\, e^x - \frac{y}{x} + \varphi(y),$$

онда из услова $u'_y = -1/x$ следи да је $\varphi(y) = A$ $(A \in R)$. Опште решење је $u(x,y) = B$ $(B \in R)$, односно $y/x = 2\, arctan\, e^x + C$ $(C \in R)$.

109. $x(1+x^2)y' = 2x + y(x^2-1)$.

Решење: За $x \neq 0$ из дате једначине следи да је

$$y' - \frac{x^2-1}{x(1+x^2)} y = \frac{2}{1+x^2}.$$

Ово је линеарна једначина, па је

$$y(x) = \frac{x^2+1}{|x|} \left(A + \int \frac{2|x| dx}{(1+x^2)^2}\right) = C\frac{1+x^2}{x} - \frac{1}{x},\ C \in R.$$

110. $x^4 y' = (x^2+y^2)^2 + yx^3$.

Решење: Сменом $u = y/x$ добијамо једначину $du/(1+u^2)^2 = dx/x$. Ако је $I = \displaystyle\int \frac{du}{(1+u^2)^2}$, применом парцијалне интеграције имамо да је

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{u}{1+u^2} + 2\int \frac{du}{1+u^2} - 2I,$$

па је $2I = \dfrac{u}{1+u^2} + arctan\, u$, а опште решење дате једначине је

$$\frac{xy}{x^2+y^2} + arctan\, \frac{y}{x} = ln\, x^2 + C, \quad C \in R.$$

111. $(2xy+3)dy - y^2 dx = 0$.

Решење: Дата једначина је линеарна по x јер је $x' - \dfrac{2}{y} x = \dfrac{3}{y^2}$, па је

$$x(y) = y^2 \left(C + 3\int \frac{dy}{y^4}\right) = Cy^2 - \frac{1}{y},$$

а $y = 0$ је сингуларно решење.

Напомена: Честа грешка студената је да превиде знак $-$ и да закључе да се ради о једначини са тоталним диференцијалом.

Друго решење: Дата једначина има интеграциони фактор $\lambda(y) = 1/y^2$, па је

$$u(x,y) = -\frac{1}{y^2} \int dx = -\frac{x}{y^2} + \varphi(y),$$

при чему је $\varphi'(y) = 3/y^4$, односно $\varphi(y) = -1/y^3 + A$ $(A \in R)$. Према томе, опште решење је $u(x,y) = B$, односно $x/y^2 - 1/y^3 = C$ $(C \in R)$.

112. $y' = \dfrac{x+y}{y-x}.$

Решење: Сменом $y/x = u(x)$ добијамо једначину

$$\frac{1-u}{1+2u-u^2} = -\frac{dx}{x}, \quad 1+2u-u^2 \neq 0.$$

Интеграцијом леве и десне стране налазимо да је

$$ln\,|1+2u-u^2| = -2\,ln\,|x| + C_1 \quad (C_1 \in R).$$

Како су и $z = 1+\sqrt{2}$ и $z = 1-\sqrt{2}$ решења, то је опште решење дате једначине

$$x^2 + 2xy - y^2 = C \quad (C \in R).$$

Напомена: Интегралне криве су хиперболе са својим асимптотама $y = (1+\sqrt{2})x$ и $y = (1-\sqrt{2})x$.

Друго решење: Из дате једначине следи да је $(x+y)dx - (y-x)dy = 0$, што је једначина са тоталним диференцијалом, па је

$$u(x,y) = \int (x+y)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y).$$

Како је $u'_y = x + \varphi'(y)$, из једнакости $u'_y = Q(x,y)$ следи да је $\varphi'(y) = -y$, односно $\varphi(y) = -y^2/2 + A$ $(A \in R)$.

113. $xy' + y = y^2\, ln\, x.$

Решење: Дата једначина је дефинисана за $x > 0$ и еквивалентна је Бернулијевој једначини

$$y' + \frac{1}{x}y = y^2\frac{ln\,x}{x}.$$

Сменом $z = y^{-1}$ добијамо линеарну једначину

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{ln\,x}{x},$$

па је

$$z(x) = x\left(C - \int \frac{ln\,x}{x^2}dx\right) = Cx + ln\,x + 1,$$

а опше решење $y(x) = \dfrac{1}{Cx + ln\,x + 1}.$

Друго решење: Ако је $y = uv$, тада из дате једначине следи да је

$$xu'v + u(xv' + v) = u^2v^2\,ln\,x.$$

За $xv' + v = 0$, односно за $v = 1/x$, имамо једначину $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{ln\,x}{x^2}dx$ чије је решење $u = x/(lnx+1+Cx)$ $(C \in R)$. Према томе, опште решење је $y(x) = 1/(Cx+ln\,x+1)$.

Треће решење: Ако је $z(x) = yx$, онда је $y' = z'/x - z/x^2$, па из дате једначине добијамо једначину $\dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{ln\,x}{x}dx$ чије је решење

$$\frac{1}{z} = \frac{ln\,x+1}{x} + C \quad (C \in R).$$

Према томе, $1/y = ln\,x + 1 + Cx$.

114. $(x^2 - y^2 + 2xy)dx + (y^2 - x^2 + 2xy)dy = 0.$

Решење: Дата једначина је хомогена. Ако је $u(x) = y/x$, онда је $dy = udx+xdu$, а из дате једначине следи да је

$$(1 - u^2 + 2u)dx + (u^2 - 1 + 2u)(udx + xdu) = 0,$$

односно

$$(u^3 + u^2 + u + 1)dx + x(u^2 - 1 + 2u)du = 0. \qquad (*)$$

За $u \neq -1$ и $x \neq 0$ је

$$\frac{u^2 + 2u - 1}{(u^2 + 1)(u + 1)}du + \frac{dx}{x} = 0.$$

Ако је

$$\frac{u^2 + 2u - 1}{(u^2 + 1)(u + 1)} = \frac{A}{u + 1} + \frac{Bu + C}{u^2 + 1},$$

онда је

$$u^2 + 2u - 1 = A(u^2 + 1) + (Bu + C)(u + 1).$$

Из ове једнакости за $u = -1$ добијамо $A = -1$, а за $u = i$ добијамо $B = 2$ и $C = 0$. Према томе,

$$\int \frac{u^2 + 2u - 1}{(u^2 + 1)(u + 1)}du = ln\,\frac{u^2 + 1}{|u + 1|} + E, \quad E \in R,$$

па је опште решење једначине $(*)$ дато са $(u^2 + 1)x = F(u + 1)$, $F \neq 0$, а опште решење полазне једначине је $x^2 + y^2 = G(x + y)$. Решење $y = -x$ се добија за $u = -1$.

115. $cos\, y(sin\, y - 3x^2 cos\, y)dx + xdy = 0.$

Решење: Ако дату једначину помножимо са $\lambda(y)$ и ако је

$$P = \lambda\, cos\, y(sin\, y - 3x^2 cos\, y), \quad Q = \lambda x,$$

онда је

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{2\, sin^2 y - 6x^2 sin\, y\, cos\, y}{2\, cos\, y(sin\, y - 3x^2 cos\, y)} = 2\frac{sin\, y}{cos},$$

па је $\lambda(y) = \dfrac{1}{cos^2 y}$. Решавањем једначине са тоталним диференцијалом

$$(tan\, y - 3x^2)dx + \frac{x}{cos^2 y}dy = 0$$

добијамо опште решење $x\, tan\, t - x^3 = C$.

116. $2xy\, ln\, ydx + (x^2 - ln\, y)dy = 0.$

Решење: Једначина је Бернулијева по x

$$x' + \frac{1}{2y\, ln\, y}x = \frac{1}{2y}x^{-1}.$$

Сменом $z = x^2$ добијамо линеарну једначину $z' + \dfrac{1}{y\, ln\, y}z = \dfrac{1}{y}$ чије је опште решење $2x^2\, ln\, y = ln^2 y + C$.

Друго решење: Једначина има интеграциони фактор $\lambda(y) = \dfrac{1}{y}$, при чему је

$$u(x,y) = x^2 \ln y + \varphi(y), \quad \varphi'(y) = -\frac{\ln y}{y}, \quad \varphi(y) = -\frac{\ln^2 y}{2}.$$

117. $(\sin x + e^y)\, dx + \cos x \; dy = 0.$

Решење: Једначина има интеграциони фактор $\lambda(y) = e^{-y}$. За једначину са тоталним диференцијалом

$$\left(e^{-y} \sin x + 1\right) dx + e^{-y} \cos x dy = 0$$

налазимо

$$u(x,y) = \int \left(e^{-y} \sin x + 1\right) dx + \varphi(y) = x - e^{-y} \cos x + C.$$

Према томе, опште решење је $x - e^{-y} \cos x = D$.

Друго решење: Сменом $e^y = u$ добијамо Бернулијеву једначину

$$u' + u \tan x = -\frac{u^2}{\cos x},$$

а новом сменом $z = u^{-1}$ добијамо линеарну једначину $z' - \tan x z = \dfrac{1}{\cos x}$ чије је решење $z = \dfrac{C + x}{\cos x}$. Враћањем променљивих x и y налазимо опште решење.

118. $(x + y - 3)y' + 2x - 4y + 6 = 0.$

Решење: Сменама $x = u + 1$ и $y = v + 2$ једначина се своди на хомогену

$$v' = \frac{4v - 2u}{u + v},$$

а ова сменом $\dfrac{v}{u} = t$ на једначину

$$\frac{1 + t}{t^2 - 3t + 2} dt = -\frac{du}{u}.$$

Како је

$$\frac{1 + t}{t^2 - 3t + 2} = \frac{3}{t - 2} - \frac{2}{t - 1},$$

решење последње једначине је $(t-2)^3 u = C(t-1)^2$, а опште решење полазне једначине је

$$(y - x - 1)^2 = C(y - 2x)^3.$$