МАТЕМАТИКА 3

2. Колоквијум, јануар 2016 - Група 3

Драган Ђорић

1. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x - 3y + 6z \\ y' &= 3x - 5y + 6z \\ z' &= 3x - 3y + 4z. \end{aligned}$$

Решење методом елиминације. Дати систем не може да се сведе на једну једначину трећег реда јер услов типа (20) из уџбеника[1] (стр.76) није испуњен ни за једну од непознатих x, y и z.

Међутим, систем може да се сведе на једну једначину другог реда и једну једначину првог реда (видети *Пример 9* из уџбеника, стр.81). Из прве једначине система диференцирањем имамо да је $x'' = x' - 3y' + 6z'$, па заменом израза за y' и z' из друге и треће једначине добијамо једначину (по x) са константним коефицијентима

$$\begin{aligned} x'' &= x' - 3(3x - 5y + 6z) + 6(3x - 3y + 4z) \\ &= x' + 9x - 3y + 6z \\ &= x' + 9x + x' - x \\ &= 2x' + 8x. \end{aligned}$$

Карактеристични полином ове једначине је $k^2 - 2k - 8$, односно $(k-4)(k+2)$, па је њено опште решење

$$x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

У преостале две једначине можемо једну од непознатих да елиминишемо (y или z). На пример, ако у трећој једначини $-3y$ заменимо са $x' - x - 6z$, добијамо линеарну једначину првог реда $z' + 2z = q$, где је

$$q(t) = 2x + x' = 2C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{-2t} + 4C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{-2t} = 6C_1 e^{4t}.$$

Према формули за опште решење линеарне једначине имамо да је

$$z(t) = e^{-2t}\left(C_3 + \int q(t) e^{2t} dt\right) = e^{-2t}\left(C_3 + 6C_1 \int e^{6t} dt\right) = C_3 e^{-2t} + C_1 e^{4t},$$

где је $C_3 \in \mathbb{R}$. Трећу непознату (y) сада једноставно налазимо из прве или треће једначине. На пример, из прве једначине и добијених решења за x и z следи да је

$$3y = x + 6z - x' = 3C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{-2t} + 6C_3 e^{-2t},$$

одакле налазимо да је

$$y(t) = C_1 e^{4t} + (C_2 + 2C_3) e^{-2t}.$$

Решење Ојлеровом методом (видети Уџбеник, стр.117 и Збикру[2], стр.77 и стр.87). Ако је X вектор непознатих функција, $\dot{X}$ вектор извода тих функција и A матрица коефицијената датог система,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 3 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

[1] М. Стојановић, О. Михић, Р. Лазовић, Д. Ђорић, МАТЕМАТИКА 3, ФОН, Београд, 2015

[2] Н. Николић, Р. Лазовић, Н. Младеновић, Д. Џамић, МАТЕМАТИКА 3 - збирка задатака, ФОН, Београд, 2014

тада систем гласи $\dot{X} = AX$. Ојлерова метода се гради на идеји (која се показала успешном) да се решење система тражи у облику $X = Me^{\lambda t}$, где је M вектор коефицијената. Заменом X и $\dot{X} = \lambda M e^{\lambda t}$ у систем добијамо једнакост $(A - \lambda E)M = 0$ која представља линеаран хомоген систем по непознатим елементима вектора M. Нетривијална решења тог система постоје само када је $|A - \lambda E| = 0$ (сингуларна матрица система). Како је $|A - \lambda E|$ полином степена n по λ (*карактеристични полином*), свака нула тог полинома може да генерише једно партикуларно решење датог система диференцијалних једначина. При томе, добијена партикуларна решења су линеарно независна (ово је јако важно, а образложење треба смислити или консултовати уџбеник).

Дакле, нађимо прво карактеристични полином и његове нуле.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 6 \\ 3 & -5-\lambda & 6 \\ 3 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda+2)^2.$$

За једноструку нулу $\lambda = 4$ и елементе a, b и c вектора M имамо да је

$$(A - 4E)M = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & -9 & 6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

па је систем $(A - \lambda E)M = O$ (за a, b и c) еквивалентан систему

$$a + b - 2c = 0, \quad a - 3b + 2c = 0, \quad a - b = 0.$$

За једно решење овог система, на пример $a = b = c = 1$, имамо партикуларно решење датог система

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

За двоструку нулу ($\lambda = -2$) карактеристичног полинома можемо да добијемо два независна партикуларна решења која су облика (овде треба још мало теорије из уџбеника)

$$X(t) = (M_1 + M_2 t)e^{\lambda t}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

при чему векторе M_1 и M_2 налазимо из система

$$(A - \lambda E)M_2 = O, \quad (A - \lambda E)M_1 = M_2.$$

У нашем случају то је систем

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

који је еквивалентан систему

$$a_2 - b_2 + 2c_2 = 0, \quad a_1 - b_1 + 2c_1 = a_2 = b_2 = c_2.$$

Два независна решења овог система добијамо, на пример за $a_1 = 1$, $c_1 = 0$ и за $a_1 = 0$, $c_1 = 1$. У првом случају је $b_1 = 1$ и $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, а у другом случају је $b_1 = 2$ и опет $a_2 = b_2 = c_2 = 0$. Одговарајћа партикуларна решења датог система диференцијалних једначина су

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Опште решење датог система је (поново треба мало теорије)

$$X(t) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$$

односно

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{4t} + C_2e^{-2t} \\ y(t) &= C_1e^{4t} + (C_2 + 2C_3)e^{-2t} \\ z(t) &= C_1e^{4t} + C_3e^{-2t}. \end{aligned}$$

Решење применом Лапласове трансформације. Ако је $x(0) = -a$, $y(0) = -b$ и $z(0) = -c$ и ако је $L[x] = X$, $L[y] = Y$ и $L[z] = Z$, тада применом Лапласове трансформације на дати систем добијамо да је

$$\begin{aligned} sX + a &= X - 3Y + 6Z \\ sY + b &= 3X - 5Y + 6Z \\ sZ + c &= 3X - 3Y + 4Z, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} &(1-s)X - 3Y + 6Z = a \\ &3X - (5+s)Y + 6Z = b \\ &3X - 3Y + (4-s)Z = c. \end{aligned}$$

Овај алгебарски линеарни систем (по непознатим X, Y и Z) можемо да решимо Крамеровим правилом. Детерминанта овог система је

$$\Delta = -s^3 + 12s + 16 = -(s-4)(s+2)^2,$$

а детерминанте Δ_X, Δ_Y и Δ_Z су

$$\Delta_X = (s+2)(as - a - 3b + 6c), \quad \Delta_Y = (s+2)(3a + bs - 7b + 6c), \quad \Delta_Z = (s+2)(3a - 3b + cs + 2c).$$

Растављањем на просте разломке добијамо да је

$$X = \frac{\Delta_X}{\Delta} = -\frac{as - a - 3b + 6c}{(s-4)(s+2)} = \frac{b - a - 2c}{2} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{2c - a - b}{2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{C_1}{s-4} + \frac{C_2}{s+2},$$

$$Z = \frac{\Delta_Z}{\Delta} = -\frac{3a - 3b + cs + 2c}{(s-4)(s+2)} = \frac{b - a - 2c}{2} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{a - b}{2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{C_1}{s-4} + \frac{C_3}{s+2},$$

$$Y = \frac{\Delta_X}{\Delta} = -\frac{3a + bs - 7b + 6c}{(s-4)(s+2)} = \frac{b - a - 2c}{2} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{a - 3b + 2c}{2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{C_1}{s-4} + \frac{C_2 + 2C_3}{s+2}.$$

Из ових једнакости, инверзном Лапласовом трансформацијом, налазимо да је

$$x(t) = C_1e^{4t} + C_2e^{-2t}, \quad y(t) = C_1e^{4t} + (C_2 + 2C_3)e^{-2t}, \quad z(t) = C_1e^{4t} + C_3e^{-2t}.$$

Да ли је ово опште решење датог система диференцијалних једначина? Нове констане C_1, C_2 и C_3 смо дефинисали једнакостима

$$-a + b - 2c = 2C_1, \quad -a - b + 2c = 2C_2, \quad a - b = 2C_3.$$

Пошто је

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

за произвољне вредности константи $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ постоје (јединствене) вредности a, b и c помоћу којих добијамо те константе. Према томе, заиста имамо опште решење датог система.

2. Израчунати $\int_{C^-} \overline{z}(|z+1| + \operatorname{Re} z)dz$, где је C граница области $\{z\ :\ \operatorname{Re} z < 0,\ |z| < 1\}$.

Решење. Подинтегрална функција $z \mapsto \overline{z}(|z+1| + \operatorname{Re} z)$ није аналитичка у датој области, па за $\int_C f(z)dz$ не можемо применити ни Кошијеву теорему, ни Њутн-Лајбницову формулу, ни Кошијеве формуле.

Не преостаје нам ништа друго, већ да контуру C параметризујемо и дати интеграл сведемо на интеграле комплексне функције реалне променљиве. Контуру C можемо да разложимо на дуж C_1 и полукружницу C_2,

$$C_1 = \{z = it\ :\ t \in [-1, 1]\}, \quad C_2 = \{z = e^{it}\ :\ t \in [\pi/2, 3\pi/2]$$

при чему је

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_{C^+} f(z)dz = -I, \quad I = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = I_1 + I_2.$$

За $z \in C_1$ је

$$\overline{z} = -it, \quad dz = idt, \quad \operatorname{Re} z = 0, \quad z+1 = 1+it, \quad |z+1| = \sqrt{1+t^2},$$

па је

$$I_1 = -\int_{-1}^{1} it\sqrt{1+t^2}idt = \int_{-1}^{1} t\sqrt{1+t^2}dt = 0$$

јер је интегранд непарна функција, а интервал интеграције симетричан у односу на $t = 0$.

За $z \in C_2$ је

$$\overline{z} = e^{-it}, \quad dz = ie^{it}dt, \quad z+1 = 1+\cos t + i\sin t, \quad |z+1| = \sqrt{2+2\cos t} = 2\left|\cos\frac{t}{2}\right|,$$

па је

$$I_2 = 2i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt + i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos t dt = 2iJ + iK.$$

Сменом $t/2 = u$ у интегралу J имамо да је

$$J = 2\int_{\pi/4}^{3\pi/4} |cos u|du = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos u du - 2\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos u du = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos u du = 2(2-\sqrt{2}).$$

Како је $K = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos t dt = -2$, то је

$$I = I_2 = 2iJ + iK = 2(3-2\sqrt{2})i.$$

Према томе,

$$\int_{C^-} f(z)dz = 2(2\sqrt{2}-3)i.$$

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 25t$$

ако је $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$.

Решење. Ако је $L[y] = Y$, тада је

$$L[y'] = sY - 1, \quad L[y''] = s^2Y - s - 2,$$

па из дате једначине имамо да је

$$Y(s^2 - 4s + 5) = \frac{25}{s^2} + s - 2,$$

односно

$$Y(s) = \frac{25}{s^2(s^2 - 4s + 5)} + \frac{s - 2}{s^2 - 4s + 5} = 25 \cdot U(s) + V(s).$$

Из једнакости

$$U(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 - 4s + 5}$$

следи да је

$$1 = (A + C)s^3 + (B + D - 4A)s^2 + (5A - 4B)s + 5B.$$

Решавањем система

$$5B = 1, \quad A + C = 0, \quad B + D - 4A = 0, \quad 5A - 4B = 0$$

добијамо да је $A = 4/25$, $B = 1/5$, $C = -4/25$ и $D = 11/25$. То значи да је

$$25U(s) = \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2} + \frac{-4s + 11}{s^2 - 4s + 5} = \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2} - 4 \cdot \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 1} + \frac{3}{(s - 2)^2 + 1}.$$

Сада је једноставно 'прочитати' инверзну Лапласову слику за $25U$.

Како је $L^{-1}[V] : t \mapsto e^{2t} \sin t$, то је $y = L^{-1}[Y]$, где је

$$\begin{aligned} y(t) &= 4 + 5t - 4e^{2t} \cos t + 3e^{2t} \sin t + e^{2t} \sin t \\ &= 4 + 5t + 3e^{2t}(\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

Напомена. Инверзна Лапласова слика функције U може да се одреди и применом *Теореме о интеграцији оригинала* (видети Уџбеник, стр.217). Како је

$$U(s) = \frac{G(s)}{s^2}, \quad G(s) = \frac{1}{(s - 2)^2 + 1}, \quad L^{-1}[G] = g, \quad g(t) = e^{2t} \sin t,$$

према тој теореми имамо да је

$$\begin{aligned} L^{-1}[U] = \int_0^t dt \int_0^t g(t)dt &= \int_0^t \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{2t}(\cos t - 2 \sin t)\right] dt \\ &= \frac{1}{25} \left(4 + 5t + e^{2t}(3 \sin t - 4 \cos t\right). \end{aligned}$$