Јун 2024

1. Написати Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $B(2,0)$ апроксимира функцију $z = f(x,y)$ задату имплицитно једначином:

$$z^2(1+x) - x^2 + 5y^2 + xyz = 24, \quad z > 0$$

2. Одредити све екстремне вредности функције

$$f(x,y) = \frac{1}{x} - y^2,$$

при услову $x^2 y = \sqrt{2}$.

3. Израчунати $\displaystyle\int x^2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$.

4. Израчунати:

$$\iint\limits_D y^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је област $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 2,\, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$.

Решења:

1. Заменом $x = 0$ и $y = 2$ у дату једнакост добијамо једначину $z^2 = 4$, $z > 0$, чије је решење $z = 2$, те је $z(B) = 2$.

Диференцирањем дате једнакости по x и y, редом добијамо:

$$z'_x(xy + 2xz + 2z) = 2x - yz - z^2, \tag{1}$$
$$z'_y(xy + 2xz + 2z) = -xz - 10y. \tag{2}$$

Заменом $x = 0$, $y = 2$ и $z = 2$ у (1) и (2) добијамо да је $z'_x(B) = -2$ и $z'_y(B) = -5$.

Диференцирањем једнакости (1) по x и y, и једнакости (2) по y, редом добијамо

$$\begin{aligned}
z''_{xx}(xy + 2xz + 2z) &= 2 - 2yz'_x - 4zz'_x - 2(1+x)(z'_x)^2,\\
z''_{xy}(xy + 2xz + 2z) &= -z - yz'_y - xz'_x - 2zz'_y - 2(1+x)z'_x z'_y,\\
z''_{yy}(xy + 2xz + 2z) &= -2xz'_y - 10 - 2(1+x)(z'_y)^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Заменом $x = 0$, $y = 2$, $z = 2$, $z'_x = -2$ и $z'_y = -5$ у (3) добијамо да је $z''_{xx}(B) = \frac{9}{2}$, $z''_{xy}(B) = 2$ и $z''_{yy}(B) = -15$.

На крају, заменом добијених вредности у

$$\begin{aligned}T_2(x,y) &= z(B) + z'_x(B)\triangle x + z'_y(B)\triangle y \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(z''_{xx}(B)\triangle x^2 + 2z''_{xy}(B)\triangle x\triangle y + z''_{yy}(B)\triangle y^2\big)\end{aligned}$$

($\triangle x = x - 0 = x,\ \triangle y = y - 2$) добијамо тражени Тејлоров полином:

$$T_2(x,y) = 2 - 2x - 5(y-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}x^2 + 4x(y-2) - 15(y-2)^2\right).$$

$\square$

2. Ако је $\varphi = x^2y - \sqrt{2}$, тада је одговарајућа Лагранжова функција

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = \frac{1}{x} - y^2 + \lambda(x^2y - \sqrt{2})$$

Стационарне тачке ћемо тражити из система $L'_x(x,y) = 0$, $L'_y(x,y) = 0$ и $\varphi(x,y) = 0$ тј.

$$-\frac{1}{x^2} + 2\lambda xy = 0, \tag{4}$$

$$-2y + \lambda x^2 = 0, \tag{5}$$

$$x^2y - \sqrt{2} = 0. \tag{6}$$

Из једначине (5) добијамо $y = \dfrac{\lambda x^2}{2}$, па, заменом у (4) и (6), добијамо да је $\lambda^2x^5 = 1$ и $\lambda x^4 = 2\sqrt{2}$. Одатле није тешко добити да је $x = 2$ и $\lambda = \dfrac{2\sqrt{2}}{x^4} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$, а одатле и $y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Дакле, једина стационарна тачка је $S(2, \dfrac{\sqrt{2}}{4})$ за $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

Како је $L''_{xx} = \dfrac{2}{x^3} + 2\lambda y$, $L''_{xy} = 2\lambda x$ и $L''_{yy} = -2$, то за други диференцијал Лагранжове функције у стационарној тачки важи

$$d^2L(S) = \frac{3}{8}\,\mathrm{d}x^2 + \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\,\mathrm{d}y^2. \tag{7}$$

Из услова $\mathrm{d}\varphi(x,y) = 0$ тј. $2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$ у тачки S добијамо да је $\mathrm{d}y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{d}x$, односно заменом у (7) имамо да важи

$$\mathrm{d}^2L(S) = \frac{3}{8}\,\mathrm{d}x^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 - \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x^2 = -\frac{3}{8}\,\mathrm{d}x^2 < 0, \text{ за } \mathrm{d}x \neq 0. \tag{8}$$

Из (8) следи да функција f има локални максимум у тачки S који износи

$$f_{max} = \frac{3}{8}.$$

$\square$

3. Применом парцијалне интеграције, при чему је $u = x^2$ и $\mathrm{d}v = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$ а одатле $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ и $v = -\dfrac{1}{2\sin^2 x}$, добијамо

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{x^2}{2\sin^2 x} + \int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = -\operatorname{ctg} x \end{bmatrix} \\
&= -\frac{x^2}{2\sin^2 x} - x\operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x^2}{2\sin^2 x} - x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.
\end{aligned}$$

$\square$

4. Дата област D је означена на слици и можемо је представити као:

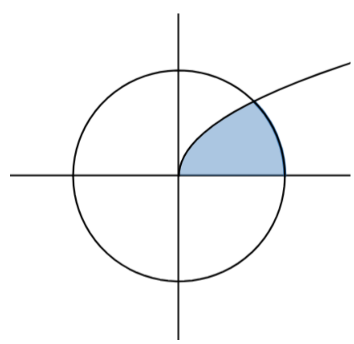
$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\, y^2 \le x \le \sqrt{2-y^2}\right\}.$$

Одатле је

$$I = \iint_D y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} y^3\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 y^3\left(\sqrt{2-y^2} - y^2\right)\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} t = y^2 \\ \mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t\left(\sqrt{2-t} - t\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\sqrt{2-t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{6}.$$



Како је

$$\int_0^1 t\sqrt{2-t}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = 2-t \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_1^2 (2-u)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 (2\sqrt{u} - u\sqrt{u})\,\mathrm{d}u$$

$$= \left(\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5}\right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{16\sqrt{2}-14}{15},$$

то је, коначно, $I = \dfrac{16\sqrt{2}-14}{15} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{32\sqrt{2}-33}{30}$. $\square$