Математика 1
Вежбе 3

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука

2023

- Једначине у којима је **непозната матрица**
- Облика $AX = B$ или се своди на њега

Задатак

Решити матричну једначину $(M^{-1}X)^{-1} + 2M = B$, ако је

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Трансформишемо једначину:

$$\begin{aligned} (M^{-1}X)^{-1} &= B - 2M \quad /^{-1} \\ M^{-1}X &= (B - 2M)^{-1} \quad /M \cdot \sqcup \\ X &= M(B - 2M)^{-1} \end{aligned}$$

$$B - 2M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(B - 2M) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

$$= 3 + 1 + 0 - (6 + 0 + 0) = -2$$

$$B - 2M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рачунамо адјунговану матрицу од $B - 2M$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\mathrm{Cof}(B-2M) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Adj}(B-2M) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad (B-2M)^{-1} = \frac{1}{\det(B-2M)} \mathrm{Adj}(B-2M) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решавамо једначину.

$$
\begin{aligned}
X &= M(B-2M)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3-3+6 & 1-3+2 & -5+3-6 \\ 3+1-6 & 1+1-2 & -5-1+6 \\ -3-3+3 & -1-3+1 & 5+3-3 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 0 & -8 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Коначно решење:

$$
X = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.
$$

Задатак

Ако је

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q},\ c \neq 0,\ |a| \neq |b| \right\}$$

и $*$ операција множења матрица, испитати да ли је $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група.

1. **Затвореност.** Нека су $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ матрице из $\mathcal{A}$ (**шта то значи?**).

$$
\begin{aligned}
A * B = AB &= \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta & 0 & a\beta + b\alpha \\ 0 & c\gamma & 0 \\ b\alpha + a\beta & 0 & b\beta + a\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta & 0 & a\beta + b\alpha \\ 0 & c\gamma & 0 \\ a\beta + b\alpha & 0 & a\alpha + b\beta \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Јасно, $c\gamma \neq 0$ јер $c \neq 0$ и $\gamma \neq 0$. Морамо проверити да је $|a\alpha + b\beta| \neq |a\beta + b\alpha|$. **Изостављамо дискусију:** (1) $a, b, \alpha, \beta > 0$, (2) $a, b, \alpha > 0, \beta < 0$ итд. *Може и на испиту овако.* Затвореност важи.

5 **Комутативност.** Важи јер је множење реалних бројева комутативно (*видети рачун на претходном слајду*).

2 **Асоцијативност.** Важи јер је множење матрица асоцијативно.

3 **Постојање неутрала.** *Углавном* је у матричним структурама јединична матрица неутрал, па има смисла покушати с њом.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$1, 0 \in \mathbb{Q}, 1 \neq 0, |1| \neq |0|$. Следи, да $E \in \mathcal{A}$. Како знамо да за матрицу E важи својство неутрала, закључујемо да је E неутрал у структури $\mathcal{A}$. Неутрал постоји.

/*Наћи пример матричне структуре која је затворена, асоцијативна и има неутрал, али неутрал није јединична матрица. */

4 **Постојање инверза.** Нека је

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

произвољна. Имамо да је (развој по 2. врсти)

$$\det(A) = c(a^2 - b^2) \neq 0,$$

јер $c \neq 0$ и $|a| \neq |b|$, па и $a^2 \neq b^2$.
На основу познате теореме, A има инверз. Како је A било произвољно свaки елемент у $\mathcal{A}$ има инверз. (Овај део је фалио!) Али, то не значи да је тај инверз у $\mathcal{A}$. Директан рачун показује да је инверз матрице A матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{bmatrix}$$

која припада $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ јесте Абелова група.

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Ранг матрице - теорија

Дефиниција

Ранг матрице једнак је максималном броју њених линеарно независних врста, или колона.

Дефиниција *није оперативна*, желимо да сазнамо како да рачунамо ранг у пракси.

Елементарне трансформације:

1. $V_i \leftrightarrow V_j$ (замена врста)
2. $V_i \leftrightarrow \alpha V_i$, $\alpha \neq 0$ (множење врсте скаларом)
3. $V_i \leftrightarrow V_i + \alpha V_j$ (множење врсте скаларом и додавање другој врсти)

Исто важи и за колоне.

Теорема

Елементарне трансформације не мењају ранг.

Примењујемо елементарне трансформације док не добијемо матрицу облика

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Број јединица} = \text{ранг}$$

У пракси: заустављамо се раније (нпр. кад?)

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Задатак

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Вршимо елементарне трансформације.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \overset{V_1 \leftrightarrow V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{V_2 \leftarrow V_2 - 2V_1 \\ V_4 \leftarrow V_4 - 4V_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{V_2 \leftrightarrow V_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{V_4 \leftarrow V_4 - V_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{V_4 \leftarrow V_4 - V_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Овде можемо стати (зашто?).

$$
r(A) = 3.
$$

Задатак

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра a.

Вршимо елементарне трансформације.

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix} \overset{V_1 \leftrightarrow V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\overset{\substack{V_2 \leftarrow V_2 - 2V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 - 3V_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2-a \\ 0 & -9-a & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{K_2 \leftarrow K_2 - 3K_1 \\ K_3 \leftarrow K_3 + K_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2-a \\ 0 & -9-a & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\overset{K_3 \leftarrow -\frac{2-a}{-5} K_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -9-a & \frac{1}{5}(-9-a)(2-a)+2 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -9-a & \frac{1}{5}(a-1)(a+8) \end{bmatrix}
$$

$$
\overset{V_2 \leftarrow V_2/(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9-a & \frac{1}{5}(a-1)(a+8) \end{bmatrix} \overset{V_3 \leftarrow V_3 + (9+a)V_2}{\sim}
$$

$$\overset{V_3 \leftarrow V_3 + (9+a) V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}(a-1)(a+8) \end{bmatrix}$$

$$\overset{V_3 \leftarrow V_3 / 5}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{(a-1)(a+8)} \end{bmatrix}$$

Ранг зависи од тога да ли је $(a-1)(a+8)$ нула или не.

$$r(A) = \begin{cases} 3, & a \notin \{-8, 1\}, \\ 2, & a \in \{-8, 1\}. \end{cases}$$

Да ли је могло на други начин? Јесте.
A је квадратна матрица. Она је максималног ранга **акко** је $\det(A) \neq 0$; али, $\det(A) = (a-1)(a+8)$. Онда се два случаја испитају ручно.

Задатак

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалних параметара a и b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{V_2 \leftarrow V_2 - V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 - V_1}} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-2 & b-1 & b-3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{V_3 \leftarrow V_3 - 2V_2}$$

$$\overset{V_3 \leftarrow V_3 - 2V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-||-}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{bmatrix} \overset{K_3 \leftarrow K_3 - K_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{K_2 \leftarrow K_2 - (a-1)K_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix} \overset{K_2 \text{ на крај}}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{b-3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = \begin{cases} 3, & b \neq 3, \\ 2, & b = 3. \end{cases}$$

Ранг не зависи од параметра a.

Задатак (Фебруар 2023)

У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & \alpha - 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & \alpha - 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{V_2 \leftarrow V_2 - 3V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 - 3V_1 \\ V_4 \leftarrow V_4 - 2V_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha - 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha - 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\underset{\sim}{-||-}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha-6 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-10 \\
0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\underset{\sim}{V_2\to V_3\to V_4\to V_2}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & \alpha-6 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-10
\end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{V_3\leftarrow V_3-(\alpha-6)V_2}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 7-\alpha & 7-\alpha \\
0 & 0 & -1 & \alpha-10
\end{bmatrix}
\underset{\sim}{-||-}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7-\alpha & 7-\alpha \\
0 & 0 & -1 & \alpha-10
\end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{V_3\leftrightarrow V_4}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-10 \\
0 & 0 & 7-\alpha & 7-\alpha
\end{bmatrix}
\underset{\sim}{V_4\leftarrow V_4+(7-\alpha)V_3}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-10 \\
0 & 0 & 0 & (7-\alpha)(\alpha-9)
\end{bmatrix}
\underset{\sim}{-||-}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (7-\alpha)(\alpha-9)
\end{bmatrix}
$$

$$r(A) = \begin{cases} 3, & \alpha \notin \{7, 9\}, \\ 2, & \alpha \in \{7, 9\} \end{cases}$$

Литература

Методичка збирка решених задатака из Математике 1.
Оливера Михић, Владимир Балтић, Марија Боричић.
ФОН, Београд, 2022.