

# Математика 1

## Вежбе 5

Данијел Алексић

Универзитет у Београду  
Факултет организационих наука



2023.

Нека је  $V$  непразан скуп, нека је  $K$  поље и нека су  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  и  $\cdot$  :  $K \times V \rightarrow V$  операције.

Знамо ли шта је поље?

### Дефиниција

Алгебарска структура  $(V, K, +, \cdot)$  је векторски простор ако је за све  $\alpha, \beta \in K$  и све  $x, y \in V$

- 1  $(V, +)$  Абелова група;
- 2  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ ;
- 3  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ ;
- 4  $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ ;
- 5  $1 \cdot x = x$ .

## Дефиниција

*Линеарна комбинација* вектора  $x_1, \dots, x_n$  из  $V$  јесте вектор  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ , где су  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  скалари из  $K$ .

## Дефиниција

*Линеарни омотач (линеал)* скупа вектора  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  јесте скуп свих линеарних комбинација вектора  $x_1, \dots, x_n$ . Ознака:  $L(X)$ .

Ако је  $A$  неки скуп вектора и  $L(X) = A$ , кажемо да је  $X$  *генераторски скуп* за  $A$ .

## Дефиниција

Вектори  $x_1, \dots, x_n$  векторског простора  $V$  су *линеарно зависни* ако постоје скалари  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  из  $K$ , од којих је барем један различит од нуле и за које важи

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbf{0}.$$

У супротном, вектори су линеарно независни.

Како се тумаче линеарна зависност и независност у практичном смислу?

## Дефиниција

Скуп вектора из  $V$  чини базу уколико је линеарно независан и генерише  $V$ .

Број елемената базе јесте *димензија* векторског простора. Просторе са бесконачним базама зовемо *бесконачнодимензиони простори*.

За добру дефинисаност неопходно је показати да све базе имају исти број елемената.

## Задатак

Нека је  $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$  и нека је  $+$  операција дефинисана једнакошћу

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Нека је  $\cdot$  операција дефинисана са

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3),$$

где је  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(а) Доказати да је  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$  векторски простор.

(б) Доказати да вектори  $\vec{e}_1 = (2, 1, -3)$ ,  $\vec{e}_2 = (3, 2, -5)$  и  $\vec{e}_3 = (1, -1, 1)$  чине базу у  $\mathbb{R}^3$  и изразити вектор  $\vec{x} = (6, 2, -7)$  помоћу вектора те базе.

Ознаке са стрелицама углавном су резервисане за векторе из простора  $\mathbb{R}^n$ .

Део (а): 🏠

Решавамо део (б). Да би вектори  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  чинили базу, треба да су линеарно независни и да генеришу  $\mathbb{R}^3$ .

Линеарну независност показујемо по дефиницији: једначина (по  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

треба да има јединствено решење  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

Распишемо.

$$\alpha(2, 1, -3) + \beta(3, 2, -5) + \gamma(1, -1, 1) = (0, 0, 0),$$

односно

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (0, 0, 0).$$

Добијамо систем једначина

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$$

$$\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$

$$-3\alpha - 5\beta + \gamma = 0.$$

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$$

$$\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$

$$-3\alpha - 5\beta + \gamma = 0.$$

**Начин 1 [мозак off]:** Решимо систем и констатујемо да му је  $(0, 0, 0)$  једино решење.

**Начин 2 [мозак on]:** Систем је хомоген, па сигурно има  $(0, 0, 0)$  као решење. Детерминанта система је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 9 - 5 - (-6 + 10 + 3) = 1 \neq 0,$$

па систем има јединствено решење по Крамеру, па оно мора бити  $(0, 0, 0)$ , јер је то већ решење.

Дакле, вектори  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  јесу линеарно независни.

**Како бисмо ово тврђење доказали употребом матрица?**

Знамо да је ранг матрице једнак максималном броју њених линеарно независних врста/колона.

Направимо матрицу од вектора  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  и рачунамо јој ранг.

$$\begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{V_3 \text{ на поч.}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ранг је очигледно 3, па изводимо исти закључак.



Дакле, вектори  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  су линеарно независни. Да би чинили базу, треба још показати да генеришу  $\mathbb{R}^3$ , тј. да се произвољан вектор из  $\mathbb{R}^3$  може записати као њихова линеарна комбинација. Означимо тај произвољан вектор са  $\vec{v} = (a, b, c)$ .

Ваља показати да једначина

$$\vec{v} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$$

има макар једно решење  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Распишемо:

$$(a, b, c) = \alpha(2, 1, -3) + \beta(3, 2, -5) + \gamma(1, -1, 1),$$

односно

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (a, b, c),$$

односно:

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = a$$

$$\alpha + 2\beta - \gamma = b$$

$$-3\alpha - 5\beta + \gamma = c.$$

Овај систем има исту детерминанту као онај малопре, и знамо да она није нула. Следи да важи оно што смо хтели, па смо доказали да  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  чине базу.

Остаје још да вектор  $\vec{x} = (6, 2, -7)$  запишемо у тој бази. Истим расписом добијамо

$$(6, 2, -7) = \alpha(2, 1, -3) + \beta(3, 2, -5) + \gamma(1, -1, 1),$$

односно систем

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = 6$$

$$\alpha + 2\beta - \gamma = 2$$

$$-3\alpha - 5\beta + \gamma = -7$$

чије је јединствено решење [...]  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1)$ . Дакле,  $\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$ .

## Задатак

Дати су вектори  $\vec{e}_1 = (p, 0, 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (2, -1, 3)$  и  $\vec{e}_3 = (1, 1, -2)$  у  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ .

(а) Одредити за које вредности реалног параметра  $p$  су дати вектори линеарно независни.

(б) 🏠 За  $p = 4$  испитати да ли дати вектори чине базу датог векторског простора. Уколико чине, одредити координате вектора  $(1, 2, -1)$  у тој бази.

Решавамо само део (а); део (б) смо већ решавали, само са другим бројевима.

Проверавамо линеарну независност три вектора. То је еквивалентно томе да матрица

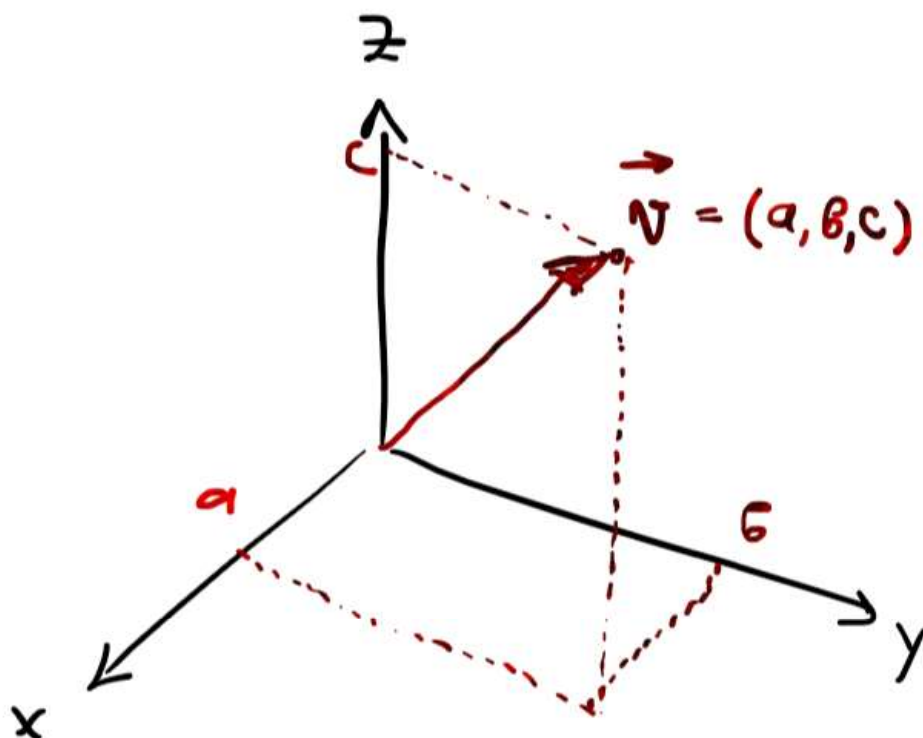
$$\begin{bmatrix} p & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

има ранг 3. Али, како је она квадратна реда 3, то је еквивалентно томе да је њена детерминанта различита од нуле. Рачунамо:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = 2p + 0 + 2 - (-1 + 3p + 0) = -p + 3.$$

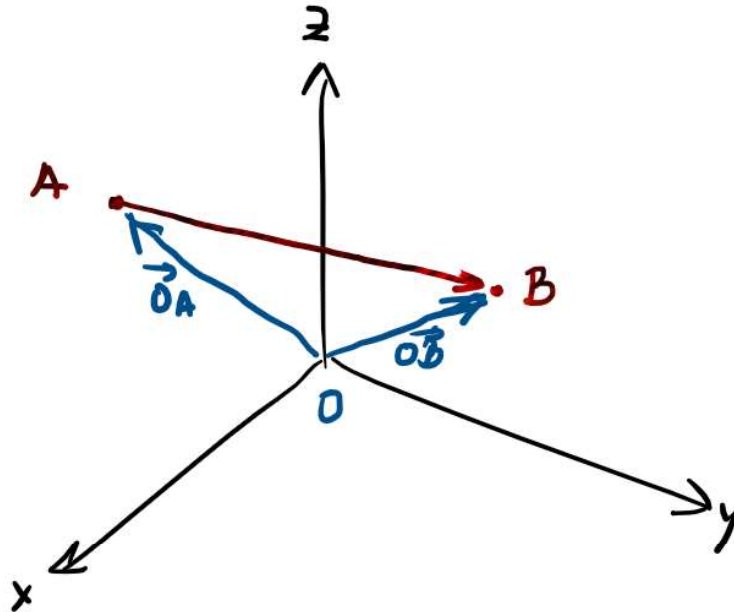
За  $p \neq 3$  је ова детерминанта различита од нуле, и тада су посматрани вектори линеарно независни.

Вектор поистовећујемо с тачком.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

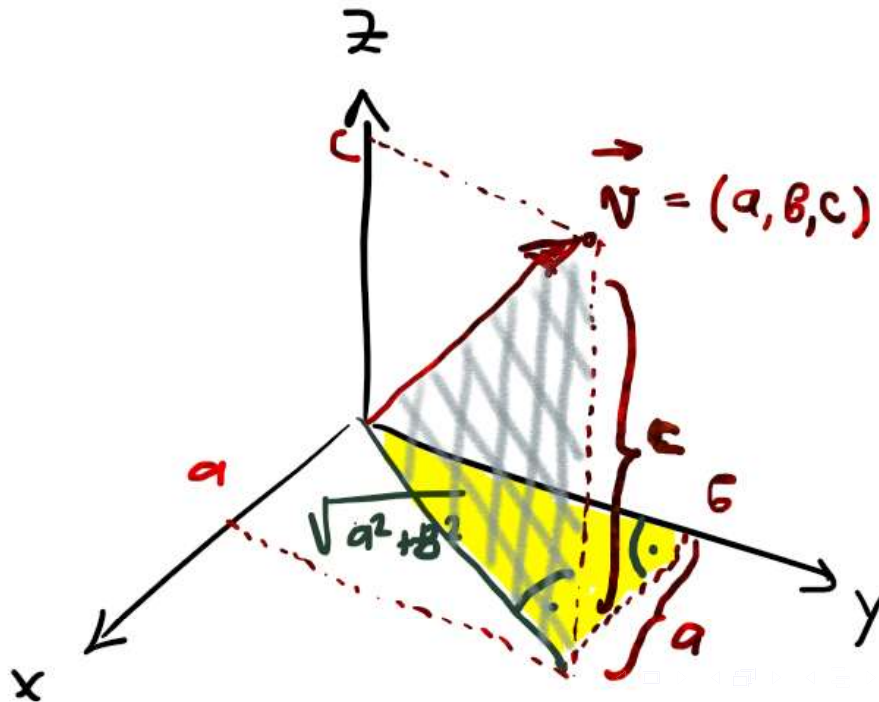
Које координате имају  $\overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OA}$ ?



Нека имамо вектор  $\vec{v} = (a, b, c)$  у  $\mathbb{R}^3$ . Његов *интензитет* јесте његово растојање од координатног почетка.

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Објаснити зашто са слике.



Скаларни, векторски и мешовити производ.

За сваки од њих дискутоваћемо три ствари:

- Како је дефинисан?
- Како се рачуна у координатама?
- Чеге је критеријум?

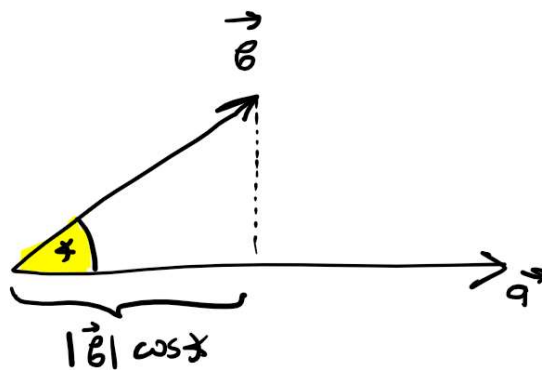


Нека су у  $\mathbb{R}^3$  дати вектори  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ .

### Дефиниција

Скаларни производ вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  једнак је производу интензитета првог вектора и дужине пројекције другог на први, односно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$



Скаларни производ у координатама:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Уверити се са слике, неформално, да је наредна теорема тачна.

### Теорема

*Два не-нула вектора у  $\mathbb{R}^3$  су ортогонална ако и само ако је њихов скаларни производ једнак нули.*

Скаларни производ два ВЕКТОРА је БРОЈ.

## Задатак

Дати су вектори  $\vec{u} = (6, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (0, 3, -1)$  и  $\vec{w} = (-2, 3, 5)$ .  
Одредити  $t \in \mathbb{R}$  тако да вектори  $\vec{u} + t\vec{v}$  и  $\vec{w}$  буду  
ортогонални.

Тражимо  $t$  за које је

$$(\vec{u} + t\vec{v}) \cdot \vec{w} = 0,$$

односно

$$((6, 1, 1) + t(0, 3, -1)) \cdot (-2, 3, 5) = 0$$

$$(6, 1 + 3t, 1 - t) \cdot (-2, 3, 5) = 0$$

$$-12 + 3 + 9t + 5 - 5t = 0$$

$$-4 + 4t = 0$$

$$t = 1$$

За  $t = 1$  су вектори  $\vec{u} + t\vec{v}$  и  $\vec{w}$  ортогонални.

## Задатак

Израчунати меру угла који граде вектори  $\vec{a} = (7, 2, -1)$  и  $\vec{b} = (1, 2, -3)$ .

Имамо да је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

односно

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{7 + 4 + 3}{\sqrt{54} \sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{27}}. \end{aligned}$$

Дакле,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \sqrt{\frac{7}{27}}$ .

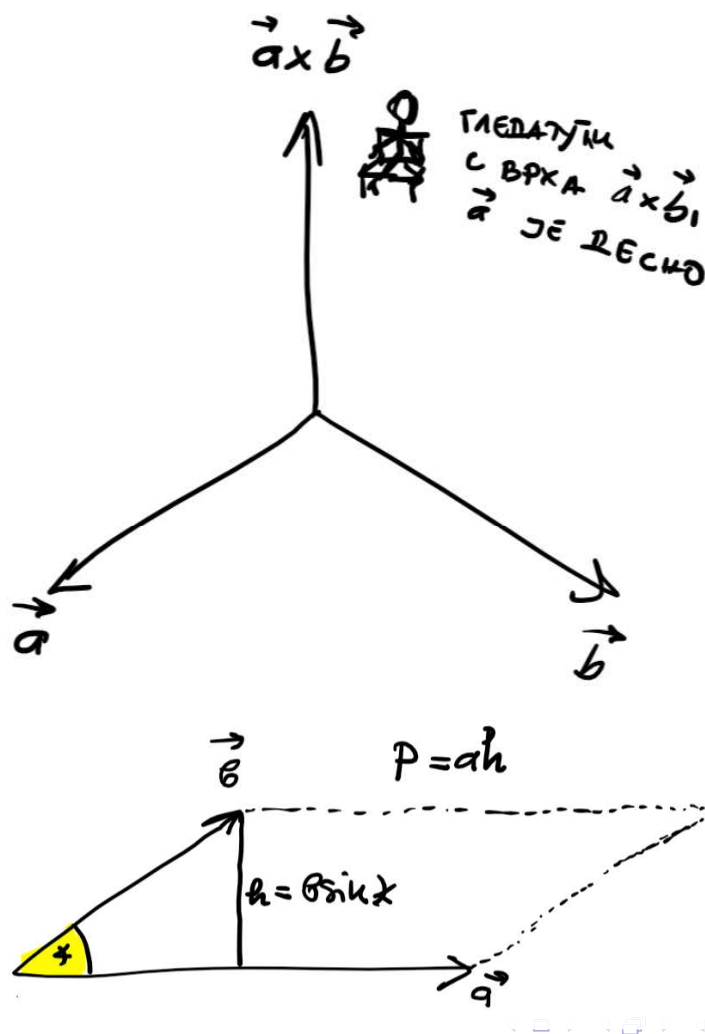
Нека су у  $\mathbb{R}^3$  дати вектори  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ .

### Дефиниција

Векторски производ вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  јесте **вектор**  $\vec{a} \times \vec{b}$  који има:

- Правац ортогоналан и на  $\vec{a}$  и на  $\vec{b}$ ;
- Смер такав да  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{a} \times \vec{b}$  чине десну тројку (правило десне руке, десног завртња)
- Интензитет једнак површини паралелограма над векторима  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$



$\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ . Векторски производ је формална детерминанта:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Неформално, са слике, уверити се да наредна теорема важи.

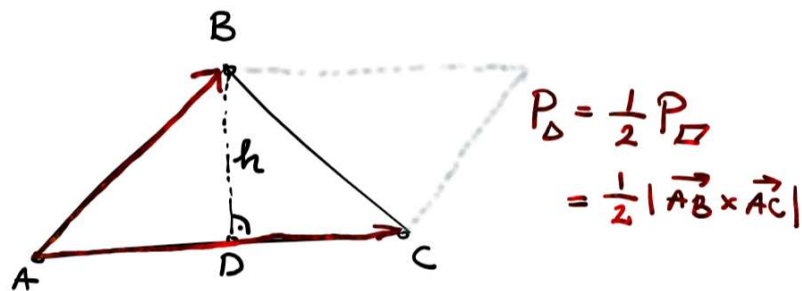
### Теорема

*Два не-нула вектора у  $\mathbb{R}^3$  су колинеарна ако и само ако је њихов векторски производ једнак нули.*

Векторски производ два вектора је ВЕКТОР.

## Задатак

Наћи површину и дужину висине  $BD$  троугла  $\triangle ABC$  ако је  $A(-3, -2, 0)$ ,  $B(3, -3, 1)$  и  $C(5, 0, 2)$ .



$$\vec{AB} = B - A = (6, -1, 1), \quad \vec{AC} = C - A = (8, 2, 2).$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-4, -4, 20) \end{aligned}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 + 400} = \frac{1}{2} \sqrt{432}.$$



С друге стране,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AC}| \cdot h,$$

односно

$$h = \frac{2P_{\Delta ABC}}{|\vec{AC}|} = \frac{\sqrt{432}}{\sqrt{64 + 4 + 4}} = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

Нека имамо векторе  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  и  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  у  $\mathbb{R}^3$ .

### Дефиниција

Мешовити производ вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  (тим редом) дефинише се као

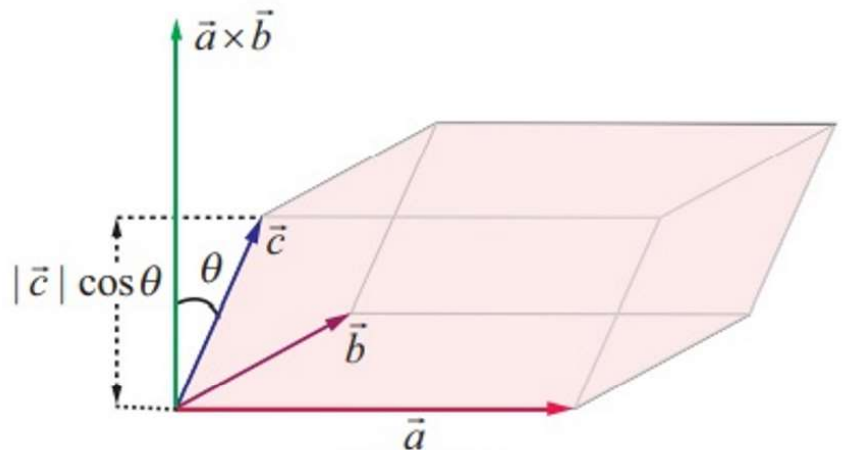
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Мешовити производ три вектора је БРОЈ.

Мешовити производ у координатама

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Уверити се, неформално, са слике, да је доње тачно.



$$V_{\text{паралелепипеда}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

## Теорема

Три не-нула вектора су копланарна ако и само ако је њихов мешовити производ једнак нули.

## Задатак

Израчунати запремину тетраедра и паралелепипеда над векторима  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (2, 2, 0)$  и  $\vec{c} = (0, 2, 2)$ .

## Задатак

Испитати да ли су вектори  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (4, 1, 1)$  и  $\vec{c} = (-9, 3, 6)$  копланарни, а ако јесу изразити вектор  $\vec{c}$  преко остала два.

(Хинт: Поставити систем једначина  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ )