Математика 1
Вежбе 4

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука

2023.

Систем облика:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

У матричној форми:

$$AX = B,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

У специјалном случају тзв. **квадратног система** $(m = n)$ примењујемо Крамерово правило.

Крамерово правило

Решавамо **квадратни** систем $AX = B$.
Детерминанта система (Δ) јесте детерм. матрице A.
Детерминанта променљиве x_j (Δ_{x_j}), $1 \leq j \leq n$, јесте детерминанта матрице A_j, која је добијена од A тако што је j-та **колона** замењена колоном B.

Теорема

- *Ако је $\Delta \neq 0$, онда систем има јединствено решење које је дато као:*

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

- *Ако је $\Delta = 0$, али је **барем неки од** Δ_{x_j} различит од нуле, систем нема решења.*
- *Ако је $\Delta = \Delta_{x_1} = \cdots = \Delta_{x_n} = 0$, систем или нема решења, или их има бесконачно много.*

Задатак

Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -4 \\ 2x + y \phantom{{}- z} &= 0 \\ x - y + z &= 6 \end{aligned}$$

Систем је квадратни па покушавамо да га решимо Крамеровим правилом.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right|$$

$$= 1 + 0 + 2 - (-1 - 0 + 2) = 2$$

$$\begin{aligned} x+y-z&=-4\\ 2x+y\quad\ &=0\\ x-y+z&=6 \end{aligned}$$

Рачунамо детерминанте непознатих.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-4&1&-1\\0&1&0\\6&-1&1\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}-4&1&-1\\0&1&0\\6&-1&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-4&1\\0&1\\6&-1\end{matrix}\right|$$

$$=-4+0+0-(-6+0+0)=2$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&-4&-1\\2&0&0\\1&6&1\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1&-4&-1\\2&0&0\\1&6&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&-4\\2&0\\1&6\end{matrix}\right|=-4$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&-4\\2&1&0\\1&-1&6\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1&1&-4\\2&1&0\\1&-1&6\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&1\\2&1\\1&-1\end{matrix}\right|=6$$

На основу Крамеровог правила, систем има јединствено решење које је дато као

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3.$$

Решење система је уређена тројка

$$(x, y, z) = (1, -2, 3).$$

2. задатак

Задатак

Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 3x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

Систем је квадратни па покушавамо да га решимо Крамеровим правилом.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right|$$

$$= 2 + 3 + 9 - (18 - 3 - 1) = 0.$$

Рачунамо детерминанте непознатих.

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 3x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Да ли је могло без рачунања?
Имамо случај $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$. Систем морамо решити „ручно” (Гаусовим системом елиминације).

$$
\begin{aligned}
x - y + 3z &= 1\\
x + 2y - z &= 1\\
3x + 3y + z &= 3
\end{aligned}
$$

$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$

$$
\begin{aligned}
x - y + 3z &= 1\\
3y - 4z &= 0 \quad II - I\\
6y - 8z &= 0 \quad III - 3I
\end{aligned}
$$

$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$

$$
\begin{aligned}
x - y + 3z &= 1\\
3y - 4z &= 0\\
0z &= 0 \quad III - 2II
\end{aligned}
$$

Једна једначина је вишак (трећа). Зашто је вишак?

Остаје нам систем:

$$\begin{aligned} x - \ \ y + 3z &= 1 \\ 3y - 4z &= 0. \end{aligned}$$

Овај систем има више промењљивих него једначина. Шта то значи?

Једну промењљиву из друге једначине бирамо за параметар, рецимо z:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Остале изражавамо преко ње:

$$3y - 4\alpha = 0 \ \Rightarrow \ y = \frac{4}{3}\alpha$$

$$x - \frac{4}{3}\alpha + 3\alpha = 1 \ \Rightarrow \ x = 1 - \frac{5}{3}\alpha.$$

Скуп решења система:

$$\left\{ \left(1 - \frac{5}{3}\alpha, \frac{4}{3}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Системи линеарних једначина
Крамерово правило
1. задатак
2. задатак
3. задатак
4. задатак
5. задатак
Кронекер-Капелијева теорема

Задатак

У зависности од реалног параметра a, испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x + 2y + \ az &= 2 \\ 3x - \ y + \ 2z &= 0 \\ 4x + \ y + a^2 z &= a \end{aligned}$$

И овај систем је квадратни, па ћемо покушати да искористимо Крамерово правило.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & a & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & a^2 & 4 & 1 \end{array} \right| \\ &= -a^2 + 16 + 3a - (-4a + 2 + 6a^2) = -7a^2 + 7a + 14 \\ &= -7(a^2 - a - 2) = -7(a-2)(a+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + \ az &= 2 \\ 3x - \ y + \ 2z &= 0 \\ 4x + \ y + a^2 z &= a \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} 2 & 2 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 1 & a^2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ a & 1 \end{matrix} \Bigg|$$

$$= -2a^2 + 4a + 0 - (-a^2 + 4 + 0) = -a^2 + 4a - 4$$

$$= -(a^2 - 4a + 4) = -(a-2)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & a^2 \end{vmatrix} = \cdots = -(a-2)(3a+8)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = \cdots = -7(a-2)$$

Дакле, имамо:

$$\begin{aligned}\Delta &= -7(a-2)(a+1),\\ \Delta_x &= -(a-2)^2,\\ \Delta_y &= -(a-2)(3a+8),\\ \Delta_z &= -7(a-2).\end{aligned}$$

Дискутујемо случајеве.

1. $\boxed{a \notin \{-1, 2\}}$
   Тада је $\Delta \neq 0$ па систем има јединствено решење:
   $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a-2}{7(a+1)}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3a+8}{7(a+1)},$$
   $$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{a+1}.$$
2. $\boxed{a = -1}$
   Тада је $\Delta = 0$, али $\Delta_x = -9$. Систем нема решења.

3 $\boxed{a = 2}$
Сада је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Систем или нема решења, или их има бесконачно много. Систем решавамо „ручно”.

$$\begin{aligned} x + 2y + \ az &= 2 \\ 3x - \ y + \ 2z &= 0 \\ 4x + \ y + a^2 z &= a \end{aligned} \quad \overset{a=2}{\longrightarrow} \quad \begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - \ y + 2z &= 0 \\ 4x + \ y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ -7y - 4z &= -6 \quad II - 3I \\ -7y - 4z &= -6 \quad III - 4I \\ - - - - - - - - & \end{aligned}$$

Трећа једначина је вишак.

Систем постаје:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ -7y - 4z &= -6 \end{aligned}$$

Једну променљиву из друге једначине узимамо за параметар, рецимо z:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Следи:

$$y = \frac{6 - 4\alpha}{7} = \frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha$$

$$x = 2 - 2\left(\frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha\right) - 2\alpha = \frac{2}{7} - \frac{6}{7}\alpha.$$

Скуп решења система:

$$\left\{\left(\frac{2}{7} - \frac{6}{7}\alpha, \frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Задатак

У зависности од реалног параметра a, испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + au &= 0 \\ 6x - ay + 4z + 3u &= 0 \\ 9x - 6y + 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

Систем је **хомоген**, слободни чланови су нуле. Шта можемо рећи о скупу његових решења?
Систем има 3 једначине и 4 непознате, сигурно неће имати јединствено решење.
Решавамо га Гаусовим системом елиминације.

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + 5z + au &= 0\\
6x - ay + 4z + 3u &= 0\\
9x - 6y + 3z + 2u &= 0\\
- - - - - - - - - -&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3x - \quad 2y + \quad 5z + \quad au &= 0\\
(4-a)y - \quad 6z + (3-2a)u &= 0 \quad II - 2I\\
-12z + (2-3a)u &= 0 \quad III - 3I
\end{aligned}
$$

Разликујемо случајеве у којима друга и трећа једначина имају, односно немају исти број променљивих.

1. $\boxed{a \neq 4}$
Једну од две променљиве у последњој једначини узимамо за параметар; боље је z да не бисмо потенцијално делили нулом.

$$u = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Променљива z се може изразити преко овог параметра као $z = \frac{2-3a}{12}\alpha$. Вратимо у другу једначину да добијемо $y = -\frac{1}{2}\alpha$, а онда све то у прву да добијемо $x = \frac{3a-22}{36}\alpha$. У овом случају, скуп решења система је

$$\left\{ \left(\frac{3a-22}{36}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha, \frac{2-3a}{12}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

2 $\boxed{a = 4}$
Систем постаје

$$\begin{aligned} 3x - 2y + \ 5z + \ 4u &= 0 \\ - \ 6z - \ 5u &= 0 \\ - 12z - 10u &= 0 \end{aligned}$$

Трећа једначина је вишак јер је пропорционална са другом. Остаје нам систем

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + 4u &= 0 \\ - 6z - 5u &= 0 \end{aligned}$$

Овде је број једначина за 2 мањи од броја непознатих. Морамо узети два параметра:

$$u = \alpha, y = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Добијамо

$$z = -\frac{5}{6}\alpha, \quad x = \frac{1}{18}\alpha + \frac{2}{3}\beta.$$

Скуп решења система је у овом случају:

$$\left\{ \left(\frac{1}{18}\alpha + \frac{2}{3}\beta, \beta, -\frac{5}{6}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Занимљиво је уочити да се у првом случају произвољно решење система могло записати као

$$\alpha \cdot \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1 \right),$$

а у другом случају као

$$\alpha \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right) + \beta \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right).$$

Овога ћемо се поново сетити код векторских простора.

Задатак

У зависности од реалних параметара a и b, испитати сагласност и решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 2y + z &= -1 \\ 4x + 3y + az &= 0 \\ x - 3y + bz &= a - 2 \end{aligned}$$

Ово је систем који има више једначина него непознатих. И њега решавамо Гаусовим системом елиминације.
За почетак, мудро је другу једначину посматрати као прву.

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= -1 \\
2x - y + 3z &= 2 \\
4x + 3y + az &= 0 \\
x - 3y + bz &= a - 2
\end{aligned}
$$

$- - - - - - - - --$

$$
\begin{aligned}
x + 2y + \quad\quad\quad z &= -1 \\
-5y + \quad\quad\quad z &= 4 \qquad II - 2I \\
-5y + (a-4)z &= 4 \qquad III - 4I \\
-5y + (b-1)z &= a - 1 \qquad IV - I
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + 2y + \qquad\quad z &= -1 \\
-\,5y + \qquad\quad z &= 4 \\
(a-5)z &= 0 \qquad III - II \\
(b-2)z &= a-5 \quad IV - II
\end{aligned}
$$

Сада дискутујемо. Одмах видимо да ако је $a = 5$, систем нема решења, јер је трећа једначина у контрадикцији са четвртом. Ако је $a \neq 5$, онда је четврта једначина облика $(b-2)z = 0$, па за $b \neq 2$ има јединствено решење $z = 0$, а за $b = 2$ је сувишна. Сада то запишимо.

1. $\boxed{a \neq 5}$ Систем нема решења.

2. $\boxed{a = 5, b \neq 2}$ Систем је тада

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= -1 \\ -5y + z &= 4 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

па се директним решавањем добије $(x, y, z) = (3/5, -4/5, 0)$.

3. $\boxed{a = 5, b = 2}$ Систем је тада

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= -1 \\ -5y + z &= 4 \end{aligned} \quad .$$

Увођењем z као параметра [...] добија се да је скуп решења система

$$\left\{ \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}\alpha, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Добра је пракса на крају поново написати коначно решење, због прегледности. Природа и решења система по случајевима су:

1. $\boxed{a \neq 5}$ Систем нема решења.
2. $\boxed{a = 5, b \neq 2}$ Систем има јединствено решење $(x, y, z) = (3/5, -4/5, 0)$.
3. $\boxed{a = 5, b = 2}$ Систем има бесконачно много решења и скуп решења система је

$$\left\{ \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}\alpha, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Решавамо систем једначина са n непознатих.
Поред матрице система A, формирамо и проширену матрицу система, A_p, тако што на A додамо колону слободних чланова.

Теорема

1. *Ако је* $r(A) = r(A_p) = n$, *систем има јединствено решење.*
2. *Ако је* $r(A) = r(A_p) < n$, *онда систем има бесконачно много решења.*
3. *Ако је* $r(A) < r(A_p)$, *систем нема решења.*

Ова теорема може се користити када се одговара на питање природе система, а не траже се сама решења.

Литература

Методичка збирка решених задатака из Математике 1. Оливера Михић, Владимир Балтић, Марија Боричић. ФОН, Београд, 2022.