Матрице

Детермин.

1. задатак

Особине детерминанте

2. задатак

Множење матрица

Инверз матрице

3. задатак

Математика 1
Вежбе 2

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука

2023

Матрице

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Врста, колона

Нека су $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ матрице и α реалан број.

Збир матрица: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Производ скалара и матрице: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$.

Специјални случајеви

- Квадратна матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Горње троугаона матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Доње троугаона матрица ( )

Транспонат матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

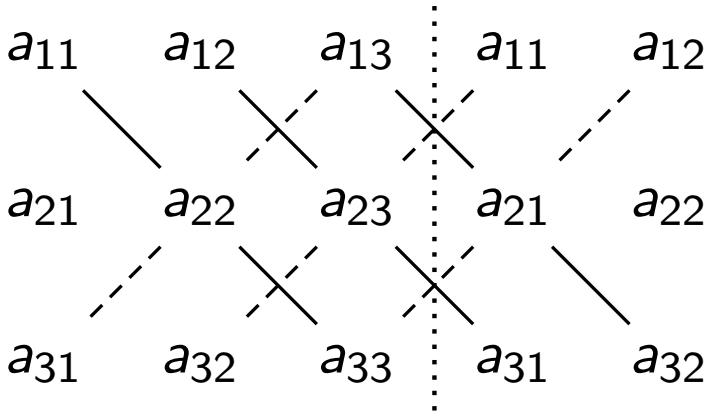
Детерминанте 2×2 и 3×3

- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ **квадратна** матрица
- **Детерминанта** матрице 2×2:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Детерминанта матрице 3×3 (**Сарусово** правило):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{matrix}$$



Само за детерминанте 3×3.

Детерминанте вишег реда

- **Минор** M_{ij} елемента a_{ij} матрице $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ је детерминанта која се добије <u>када се из $\det(A)$ избаце i-та врста и j-та колона</u>
- **Кофактор** A_{ij} елемента a_{ij} јесте

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- **Лапласов развој детерминанте** по i-тој врсти:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(може и по j-тој колони)

1. задатак

Задатак

Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Лапласов развој по другој врсти (зашто баш?).

$$D := -0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{D_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{D_2}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right| \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 \\ &\quad - (2 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= 12 + 4 - 6 - (-6 + 6 + 8) \\ &= 10 - 8 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right| \\
&= 6 - 6 + 8 - (4 + 12 - 6) \\
&= 8 - 10 \\
&= -2.
\end{aligned}
$$

$$D = 4D_1 + D_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 8 - 2 = 6,$$

што је и требало доказати.

Особине детерминанте

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. Ако је цела једна врста или колона матрице A сачињена од нула, онда је $\det(A) = 0$ (зашто?)
3. Множењем неке врсте (колоне) детерминанте и додавањем другој, детерминанта не мења вредност
4. Ако међу врстама или колонама матрице A има једнаких или пропорционалних, онда је $\det(A) = 0$ (зашто?)
5. Заменом места двама врстама (колонама), детерминанта мења само знак
6. A је горње (или доње) троугаона матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Тада је $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ (зашто?).

7 Адитивност по колони (врсти):

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(важи за детерминанту произвољног реда)

8 Хомогеност по колони (врсти):

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(важи за произвољну врсту/колону, произвољан ред)

2. задатак

Задатак

Доказати да је

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \quad IV - III$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \; III - II \\
&= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \; II - I \\
&= a(b-a)(c-b)(d-c),
\end{aligned}
$$

што је и требало доказати.
(детерминанта троугаоне матрице)

Множење матрица

$$A = [a_{ij}]_{m\times k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

$$B = [b_{ij}]_{k\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}$$

„Средња” димензија мора да буде иста!

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{1\rightarrow} \cdot B_{1\downarrow} & A_{1\rightarrow} \cdot B_{2\downarrow} & \cdots & A_{1\rightarrow} \cdot B_{n\downarrow} \\ A_{2\rightarrow} \cdot B_{1\downarrow} & A_{2\rightarrow} \cdot B_{2\downarrow} & \cdots & A_{2\rightarrow} \cdot B_{n\downarrow} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m\rightarrow} \cdot B_{1\downarrow} & A_{m\rightarrow} \cdot B_{2\downarrow} & \cdots & A_{m\rightarrow} \cdot B_{n\downarrow} \end{bmatrix},$$

где је

$$A_{i\rightarrow} \cdot B_{j\downarrow} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}$$

скаларни производ i-те врсте матрице A и j-те колоне матрице B.

M1
Вежбе 2

Данијел Алексић

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

Теорема (Бине-Коши)

Нека су A и B квадратне матрице истог реда $n \times n$. Тада је

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Множење матрица јесте асоцијативно:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Напомена

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА НИЈЕ КОМУТАТИВНО!

M1
Вежбе 2

Данијел Алексић

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

Дефиниција

Нека је A квадратна $n \times n$ матрица. Кажемо да је квадратна $n \times n$ матрица B **инверзна** матрица матрице A уколико је

$$AB = BA = E_n,$$

где је

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

тзв. **јединична** матрица реда n. Пишемо $B = A^{-1}$.

Коју особину има јединична матрица?

Особине инверзне и транспоноване матрице

- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Како наћи инверз?

Дефиниција

Нека је A квадратна матрица реда $n \times n$. Њена **адју(н)гована** матрица дата је као

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T .$$

Теорема

*Квадратна матрица A има инверз **ако и само ако** $\det(A) \neq 0$. Тада је тај инверз дат као*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A).$$

3. задатак

Задатак

Одредити инверзну матрицу матрице

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Поступамо по алгоритму...

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

Дакле

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -12 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

то јест

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Рачунамо детерминанту:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \Bigg|$$
$$= 12 + 0 + 4 - (12 - 2 + 0) = 6.$$

Инверз:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Литература

Методичка збирка решених задатака из Математике 1. Оливера Михић, Владимир Балтић, Марија Боричић. ФОН, Београд, 2022.