Математика 1
Вежбе 1

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука

2023

План курса по вежбама

1. Алгебарске структуре
2. Линеарна алгебра: матрице и детерминанте
3. Матричне једначине, ранг матрице
4. Системи линеарних једначина
5. Векторски простори: скаларни, векторски и мешовити производ
6. Аналитичка геометрија у простору 1
7. Аналитичка геометрија у простору 2
8. Низови 1
9. Низови 2
10. Граничне вредности и непрекидност функција
11. Први и други извод и примене
12. Тејлоров и Маклоренов полином
13. Скицирање графика функције

Нека је X скуп и $*$ бинарна операција на њему.
$(X, *)$ зове се **алгебарска структура**.
У њој могу важити (или не) следећа својства.

1. **Затвореност.** $(\forall x, y \in X)\ x * y \in X$
2. **Асоцијативност.** $(\forall x, y, z \in X)\ (x * y) * z = x * (y * z)$
3. **Постојање неутрала.**
   $(\exists e \in X)(\forall x \in X)\ x * e = e * x = x$
   e се зове *неутрал*
4. **Постојање инверза.**
   $(\forall x \in X)(\exists x^{-} \in X)\ x * x^{-} = x^{-} * x = e$
5. **Комутативност.** $(\forall x, y \in X)\ x * y = y * x$

Алгебарске структуре: теорија 2/2

Дефиниција

1. Важи *затвореност*: $(X, *)$ је **групоид**
2. Важе *затвореност* и *асоцијативност*: $(X, *)$ је **полугрупа**
3. Важе *затвореност* и *асоцијативност* и *постоји неутрал*: $(X, *)$ је **моноид**
4. Важе *затвореност* и *асоцијативност*, *постоји неутрал* и *сваки елемент има инверз*: $(X, *)$ је **група**
5. Важе *затвореност* и *асоцијативност*, *постоји неутрал*, *сваки елемент има инверз* и *важи комутативност*: $(X, *)$ је **Абелова група**

Напомена

Понекад је згодно раније проверити комутативност...

Задатак

Ако је $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ и $x * y = x \cdot y$, испитати да ли је $(A, *)$ Абелова група.

1 **Затвореност.** Нека су $x + y\sqrt{2}$ и $a + b\sqrt{2}$ из A.

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2}) * (a + b\sqrt{2}) &= (x + y\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) \\ &= x \cdot a + y\sqrt{2} \cdot a + x \cdot b\sqrt{2} + y\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} \\ &= \underbrace{(xa + 2yb)}_{\in\mathbb{Q}\text{ јер?}} + \underbrace{(ya + xb)}_{\in\mathbb{Q}\text{ јер?}}\sqrt{2} \in A\end{aligned}$$

Затвореност *важи*.

2. **Асоцијативност.** Важи јер је множење реалних бројева асоцијативно.

5. **Комутативност.** Важи јер је множење реалних бројева комутативно.

3. **Постојање неутрала.** Тражимо елемент $e = e_1 + e_2\sqrt{2} \in A$ такав да за свако $x + y\sqrt{2} \in A$ важи

   $$(e_1+e_2\sqrt{2})*(x+y\sqrt{2}) = (x+y\sqrt{2})*(e_1+e_2\sqrt{2}) = x+y\sqrt{2}$$

   Довољно: $(e_1 + e_2\sqrt{2}) * (x + y\sqrt{2}) = x + y\sqrt{2}$ (зашто?)
   „Пролази" $e = 1 + 0\sqrt{2} \in A$
   Постоји неутрал у A.

Напомена

Увек проверити да ли $e \in A$!

4. **Постојање инверза.** Нека је $x + y\sqrt{2} \in A$ произвољан елемент. Тражимо елемент $a + b\sqrt{2} \in A$ такав да је

$$(x + y\sqrt{2}) * (a + b\sqrt{2}) = e = 1$$

(довољно због комутативности)
Али, ако узмемо $x + y\sqrt{2} = 0$ (што заиста припада A)

$$0 * (a + b\sqrt{2}) = 0 \cdot (a + b\sqrt{2}) = 0$$

шта год било $a + b\sqrt{2}$
Дакле, 0 припада A, а нема инверз!
$(A, *)$ није Абелова група, већ (комутативан) моноид!

Напомена

Обратити пажњу на редослед квантификатора код неутрала и инверза: $\exists\forall$ vs. $\forall\exists$

2. задатак

Задатак

Ако је $A_1 = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 + y^2 \neq 0\}$ и $x * y = x \cdot y$, испитати да ли је $(A_1, *)$ Абелова група.

Користимо резултате претходног задатка.

1. **Затвореност**. Преноси се из претходног задатка.
5. **Комутативност.** Преноси се из претходног задатка.
2. **Асоцијативност.** Преноси се из претходног задатка.
3. **Постојање неутрала.** Донекле се преноси.
   Ако узмемо $e = 1 + 0\sqrt{2}$, својство неутрала ће се пренети. Али, A_1 је мањи скуп од A: Можда је e „испало” из A_1. Овде: $e \in A_1$.
   Постоји неутрал у A_1.

4 **Постојање инверза.** Нека је $x + y\sqrt{2} \in A_1$ произвољан елемент. Сада $0 \notin A_1$.
Тражимо елемент $a + b\sqrt{2} \in A_1$ за који је

$$(x + y\sqrt{2}) * (a + b\sqrt{2}) = e = 1.$$

Распишемо

$$(xa + 2yb) + (ya + xb)\sqrt{2} = 1$$

Мора бити

$$xa + 2yb = 1$$

$$ya + xb = 0$$

Како $x + y\sqrt{2} \in A_1$, то $x^2 + y^2 \neq 0$. Дакле, x и y нису истовремено нула!

Ако је $x \neq 0$:

$$xa + 2yb = 1 \quad / - \frac{y}{x}$$

$$ya + xb = 0$$

$$------$$

$$-ya - 2\frac{y^2}{x}b = -\frac{y}{x}$$

$$ya + xb = 0 \quad \text{саберемо}$$

$$------$$

$$\left(-2\frac{y^2}{x} + x\right) b = -\frac{y}{x} \quad / \cdot x$$

$$------$$

$$(-2y^2 + x^2)b = -y$$

Следи

$$b = \frac{-y}{x^2 - 2y^2}$$

Проблем: можда је $x^2 - 2y^2 = 0$.
Претпоставимо да јесте. Тада је

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{2} \quad /\sqrt{\cdot}$$

$$\mathbb{Q} \ni \frac{y}{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

Контрадикција! ↯

Дакле, $x^2 - 2y^2 \neq 0$ за било које дозвољене x и y, па имамо b.
Вратимо у систем и добијемо

$$a = \frac{x}{x^2 - 2y^2}.$$

Јасно, $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a^2 + b^2 \neq 0$.
Инверз елемента $x + y\sqrt{2}$ је зато

$$\frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2} \in A_1$$

Ако бисмо претпоставили $y \neq 0$, добијамо исто...
Дакле, $(A_1, *)$ је Абелова група.

Да ли је могло лакше?

Јесте.
Инверз од $x + y\sqrt{2} \in A_1$ (који није нула!) тражимо као

$$\frac{1}{x+y\sqrt{2}} = \frac{1}{x+y\sqrt{2}}\frac{x-y\sqrt{2}}{x-y\sqrt{2}} = \frac{x}{x^2-2y^2} + \frac{-y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}$$

и онда поновимо дискусију...

Задатак

Ако је $M = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ и $a * b = a + b + ab$, испитати да ли је $(M, *)$ Абелова група.

- **Затвореност.** Нека су a и b произвољни елементи скупа M. Дакле, то су рационални бројеви и ниједан није -1. Очигледно:

$$a * b = a + b + ab \in \mathbb{Q}$$

Претпоставимо:

$$\begin{aligned} a + b + ab &= -1 \\ a + ab + b + 1 &= 0 \\ (a+1)(b+1) &= 0 \end{aligned}$$

Следи да је $a = -1$ или $b = -1$. Контрадикција. $\lightning$
Дакле, важи затвореност.

5 **Комутативност.** Нека су $a, b \in M$ произвољни елементи. Из особина сабирања и множења рационалних бројева следи

$$\begin{aligned} a * b &= a + b + ab \\ &= b + a + ba \\ &= b * a. \end{aligned}$$

Дакле, важи комутативност.

2 **Асоцијативност.** Нека су $a, b, c \in M$ произвољни елементи. Рачунамо, користећи особине сабирања и множења:

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \end{aligned}$$

С друге стране,

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc \end{aligned}$$

Упоредимо ли,

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Дакле, важи асоцијативност.

3 **Постојање неутрала.** Тражимо $e \in M$ такав да за произвољно $a \in M$ буде

$$e * a = a$$

(довољно због комутативности)
Распишемо,

$$e + a + ea = a.$$

Јасно је да „пролази” $e = 0$. Заиста, $e \in M$, јер је рационалан и није -1.
Неутрал постоји.

4 **Постојање инверза.** Нека је $a \in M$ произвољан. Тражимо $a^{-} \in M$ такав да је

$$a * a^{-} = e = 0,$$

односно

$$\begin{aligned} a + a^{-} + aa^{-} &= 0 \\ a^{-}(1 + a) &= -a. \end{aligned}$$

Како је $a \in M$, то, специјално $a \neq -1$, па $1 + a \neq 0$. Следи

$$a^{-} = \frac{-a}{1 + a}.$$

Да ли ово значи да a има инверз? Не још!

Јасно, $a^{-} \in \mathbb{Q}$. Али, да ли може бити $a^{-} = -1$? Кад би то било, било би

$$\frac{-a}{1+a} = -1,$$

односно

$$a = 1 + a,$$

односно

$$0 = 1.$$

Контрадикција. $\lightning$
Дакле, сваки елемент у M има инверз.
$(M, *)$ је Абелова група.

Задатак

Ако је $S = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0\}$ и $(a,b) * (c,d) = (ac, bc + c + d)$, испитати да ли је $(S, *)$ група. Ако јесте, испитати да ли је Абелова.

1. **Затвореност.** Нека су $(a,b), (c,d) \in S$ произвољни.

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc + c + d)$$

$a, c \neq 0$ (зашто?), па $ac \neq 0$. Јасно, обе компоненте су рационалне.
Затвореност важи.

5. **Комутативност.**

$$(1,2) * (3,4) = (1 \cdot 3, 2 \cdot 3 + 3 + 4) = (3, 13)$$
$$(3,4) * (1,2) = (3 \cdot 1, 4 \cdot 1 + 1 + 2) = (4, 7)$$

Комутативност не важи. Структура није комутативна (Абелова).

2 **Асоцијативност.** Нека су $(a,b),(c,d),(f,g) \in S$ произвољни. Рачунамо:

$$\begin{aligned}
((a,b)*(c,d))*(f,g) &= (ac, bc+c+d)*(f,g) \\
&= ((ac)f, (bc+c+d)f+f+g) \\
&= (acf, bcf+cf+df+f+g) \\
(a,b)*((c,d)*(f,g)) &= (a,b)*(cf, df+f+g) \\
&= (a(cf), b(cf)+cf+df+f+g) \\
&= (acf, bcf+cf+df+f+g).
\end{aligned}$$

Дакле, асоцијативност важи.

3 **Постојање неутрала.** Тражимо $(e_1, e_2) \in S$ такав да за свако $(a, b) \in S$ буде

$$(e_1, e_2) * (a, b) = (a, b)$$
$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b).$$

Распишемо први услов:

$$(e_1 a, e_2 a + a + b) = (a, b)$$

$(e_1, e_2) = (1, -1)$ испуњава услов и припада S.
Немамо комутативност, морамо проверити да важи
$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b)$.
Неутрал постоји.

4 **Постојање инверза.** Нека је $(a, b) \in S$ произвољан елемент. Тражимо $(c, d) \in S$ такав да је

$$(a, b) * (c, d) = (1, -1)$$
$$(c, d) * (a, b) = (1, -1).$$

Први услов даје

$$(ac, bc + c + d) = (1, -1),$$

односно

$$ac = 1, \quad bc + c + d = -1$$

$$c = \frac{1}{a}, \quad d = -1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{a}.$$

Инверз елемента $(a, b) \in S$ је елемент $(\frac{1}{a}, -\frac{1+a+b}{a})$ који очигледно припада S (Провера слева: 🏠).

$(S, *)$ је група. Није Абелова.

Задатак

Ако је $K = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ и $(a,b) * (c,d) = (a + 2^b c, b + d)$, испитати да ли је $(K, *)$ Абелова група.

1. **Затвореност.**
   Узмимо $(0,-1), (1,1) \in K$.

$$(0,-1) * (1,1) = (0 + 2^{-1}1, -1 + 1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Не важи затвореност.
$(K, *)$ није Абелова група.

Литература

Методичка збирка решених задатака из Математике 1.
Оливера Михић, Владимир Балтић, Марија Боричић.
ФОН, Београд, 2022.