Aproksimacija

Metoda najmanjih kvadrata

Metoda najmanjih kvadrata

- Neka je f funkcija zadata tabelarno: $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Metoda najmanjih kvadrata

- Neka je f funkcija zadata tabelarno: $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

- Funkcija kojom je aproksimiramo je oblika:

$$\Phi(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_m\Phi_m(x),$$

gde su $\Phi_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m$ neke, unapred poznate, linearne nezavisno funkcije (*generalisani polinomi*).

Metoda najmanjih kvadrata

- Cilj nam je da nađemo, po nekom kriterijumu, najbolju aproksimaciju funkcije f traženog oblika.

Metoda najmanjih kvadrata

- Cilj nam je da nađemo, po nekom kriterijumu, najbolju aproksimaciju funkcije f traženog oblika.
- Tražićemo funckiju $\Phi(x)$ tako da je suma

$$\sum_{k=0}^{n} (\Phi(x_k) - f(x_k))^2$$

minimalna.

Metoda najmanjih kvadrata

- Cilj nam je da nađemo, po nekom kriterijumu, najbolju aproksimaciju funkcije f traženog oblika.
- Tražićemo funckiju $\Phi(x)$ tako da je suma

$$\sum_{k=0}^{n} (\Phi(x_k) - f(x_k))^2$$

minimalna. Određivanje ovako opisane aproksimacione funkcije se naziva *metodom najmanjih kvadrata*.

Metoda najmanjih kvadrata

- Ako je

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_m(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots & \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_m(x_n) \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ i } y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n, \end{bmatrix}$$

Metoda najmanjih kvadrata

- Ako je

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_m(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots & \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_m(x_n) \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ i } y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n, \end{bmatrix}$$

tada vektor a vrednosti nepoznatih koeficijenata dobijamo iz jednačine:

$$A^T Aa = A^T y.$$

Metoda najmanjih kvadrata

- Ako je

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_m(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots & \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_m(x_n) \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ i } y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n, \end{bmatrix}$$

tada vektor a vrednosti nepoznatih koeficijenata dobijamo iz jednačine:

$$A^T A a = A^T y.$$

- Zadatak se sa ovim oznakama može zapisati kao

$$\min_{a \in \mathbb{R}^{m+1}} \|Aa - y\|^2$$

Polinomska regresija

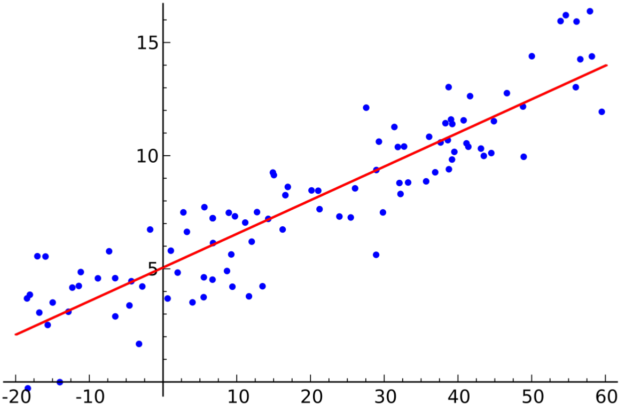
Ukoliko je $\Phi_k(x) = x^k$, tj. ako je aproksimaciona funkcija polinom, tada je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{bmatrix},$$

pa rešavamo sistem:

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_k & \dots & \sum x_k^m \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \dots & \sum x_k^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots & \\ \sum x_k^m & \sum x_k^{m+1} & \dots & \sum x_k^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_k \\ \sum x_k y_k \\ \vdots \\ \sum x_k^m y_k \end{bmatrix}.$$

Linearna regresija



Linearni slučaj

- Ako je polinom koji koristimo za aproksimaciju prvog stepena, $\Phi(x) = a_0 + a_1 x$, radi se o problemu *linearne regresije*, koji je jedan od osnovnih problema koji se izučava u statistici. Tada je sistem koji rešavamo oblika

$$\begin{aligned} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i &= \sum_{i=0}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

Linearni slučaj

- Ako je polinom koji koristimo za aproksimaciju prvog stepena, $\Phi(x) = a_0 + a_1 x$, radi se o problemu *linearne regresije*, koji je jedan od osnovnih problema koji se izučava u statistici. Tada je sistem koji rešavamo oblika

$$\begin{aligned} a_0(n+1) \; + \; a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \; &= \; \sum_{i=0}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i \; + \; a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \; &= \; \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

- Često se nelinearna funkcionalna zavisnost odgovarajućom smenom može svesti na linearnu.