Sistemi linearnih jednačina

Problem

Rešavamo jednačinu oblika

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \; x, b \in \mathbb{R}^n,$$

Problem

Rešavamo jednačinu oblika

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \;\; x, b \in \mathbb{R}^n,$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

gde su $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{R}$, za sve $i, j = 1, 2, ..., n$.

- Vektori se najčešće zapisuju u obliku $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

- Vektori se najčešće zapisuju u obliku $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.
- Ukoliko je $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ tačno rešenje date jednačine, a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ neka aproksimacija koju izračunamo, potrebno je odrediti kvalitet te aproksimacije. Rastojanje između dva vektora se može uvesti na više načina, npr:

- Vektori se najčešće zapisuju u obliku $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.
- Ukoliko je $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ tačno rešenje date jednačine, a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ neka aproksimacija koju izračunamo, potrebno je odrediti kvalitet te aproksimacije. Rastojanje između dva vektora se može uvesti na više načina, npr:
  1. $d(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2}$

- Vektori se najčešće zapisuju u obliku $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.
- Ukoliko je $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ tačno rešenje date jednačine, a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ neka aproksimacija koju izračunamo, potrebno je odrediti kvalitet te aproksimacije. Rastojanje između dva vektora se može uvesti na više načina, npr:
  1. $d(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2}$
  2. $d(x, \xi) = |x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n|$

- Vektori se najčešće zapisuju u obliku $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.
- Ukoliko je $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ tačno rešenje date jednačine, a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ neka aproksimacija koju izračunamo, potrebno je odrediti kvalitet te aproksimacije. Rastojanje između dva vektora se može uvesti na više načina, npr:
  1. $d(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2}$
  2. $d(x, \xi) = |x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n|$
  3. $d(x, \xi) = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - \xi_i|$

- Vektori se najčešće zapisuju u obliku $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.
- Ukoliko je $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ tačno rešenje date jednačine, a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ neka aproksimacija koju izračunamo, potrebno je odrediti kvalitet te aproksimacije. Rastojanje između dva vektora se može uvesti na više načina, npr:
  1. $d(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2}$
  2. $d(x, \xi) = |x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n|$
  3. $d(x, \xi) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - \xi_i|$
- *Norma* je funkcija $\|\cdot\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ koja vektoru x dodeljuje broj (*intenzitet*) $\|x\|$.

- Vektori se najčešće zapisuju u obliku $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.
- Ukoliko je $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ tačno rešenje date jednačine, a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ neka aproksimacija koju izračunamo, potrebno je odrediti kvalitet te aproksimacije. Rastojanje između dva vektora se može uvesti na više načina, npr:
  1. $d(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2}$
  2. $d(x, \xi) = |x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n|$
  3. $d(x, \xi) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - \xi_i|$
- *Norma* je funkcija $\|\cdot\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ koja vektoru x dodeljuje broj (*intenzitet*) $\|x\|$.
- Za izabranu funkciju rastojanja, normu u $\mathbb{R}^n$ ćemo odrediti kao $\|x\| = d(x, 0)$.

- Vektori se najčešće zapisuju u obliku $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.
- Ukoliko je $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ tačno rešenje date jednačine, a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ neka aproksimacija koju izračunamo, potrebno je odrediti kvalitet te aproksimacije. Rastojanje između dva vektora se može uvesti na više načina, npr:
  1. $d(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2}$
  2. $d(x, \xi) = |x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n|$
  3. $d(x, \xi) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - \xi_i|$
- *Norma* je funkcija $\|\cdot\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ koja vektoru x dodeljuje broj (*intenzitet*) $\|x\|$.
- Za izabranu funkciju rastojanja, normu u $\mathbb{R}^n$ ćemo odrediti kao $\|x\| = d(x, 0)$.
- Koristićemo normu $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Norma matrice

- Ako je poznata norma vektora, tada je $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ *norma matrice indukovana normom vektora*.

Norma matrice

- Ako je poznata norma vektora, tada je $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ *norma matrice indukovana normom vektora*.
- Važi $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ - saglasnost matrične i vektorske norme.

Norma matrice

- Ako je poznata norma vektora, tada je $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ *norma matrice indukovana normom vektora*.
- Važi $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ - saglasnost matrične i vektorske norme.
- Korističemo normu $\|B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$

- Rešavamo jednačinu $Ax = b$ iterativnim metodama.

- Rešavamo jednačinu $Ax = b$ iterativnim metodama.
- Transformišemo jednačinu $Ax = b$ u ekvivalentan oblik $x = Bx + c$, na osnovu kog formiramo iterativni niz $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$, gde je $x^{(0)}$ neko početno rešenje.

- Rešavamo jednačinu $Ax = b$ iterativnim metodama.
- Transformišemo jednačinu $Ax = b$ u ekvivalentan oblik $x = Bx + c$, na osnovu kog formiramo iterativni niz $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$, gde je $x^{(0)}$ neko početno rešenje.
- Taj proces će konvergirati ako je $\|B\| < 1$.

- Rešavamo jednačinu $Ax = b$ iterativnim metodama.
- Transformišemo jednačinu $Ax = b$ u ekvivalentan oblik $x = Bx + c$, na osnovu kog formiramo iterativni niz $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$, gde je $x^{(0)}$ neko početno rešenje.
- Taj proces će konvergirati ako je $\|B\| < 1$.
- Dovoljan i potreban uslov da proces konvergira je da važi $\rho(B) < 1$, gde je
$\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda\text{- sopstvena vrednost matrice } B\}$.

- Rešavamo jednačinu $Ax = b$ iterativnim metodama.
- Transformišemo jednačinu $Ax = b$ u ekvivalentan oblik $x = Bx + c$, na osnovu kog formiramo iterativni niz $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$, gde je $x^{(0)}$ neko početno rešenje.
- Taj proces će konvergirati ako je $\|B\| < 1$.
- Dovoljan i potreban uslov da proces konvergira je da važi $\rho(B) < 1$, gde je $\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda\text{- sopstvena vrednost matrice } B\}$.
- Ocene greške:
  1. $\left\|x - x^{(k)}\right\| \leq \dfrac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$ (apriorna ocena)
  2. $\left\|x - x^{(k)}\right\| \leq \dfrac{\|B\|}{1 - \|B\|} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$ (aposteriorna ocena)

Metode

Metode koje ćemo razmatrati su

1. **Metoda proste iteracije**: $B = (D+I)^{-1}(D+I-A)$, $c = (D+I)^{-1}b$.

Metode

Metode koje ćemo razmatrati su

1. **Metoda proste iteracije**: $B = (D + I)^{-1}(D + I - A)$, $c = (D + I)^{-1}b$.
2. **Jakobijeva metoda**: $B = D^{-1}(D - A)$, $c = D^{-1}b$. Dovoljan uslov da Jakobijeva metoda konvergira je da matrica sistema bude dijagonalno dominantna.

Metode

Metode koje ćemo razmatrati su

1. **Metoda proste iteracije**: $B = (D + I)^{-1}(D + I - A)$, $c = (D + I)^{-1}b$.
2. **Jakobijeva metoda**: $B = D^{-1}(D - A)$, $c = D^{-1}b$. Dovoljan uslov da Jakobijeva metoda konvergira je da matrica sistema bude dijagonalno dominantna.
3. **Gaus-Zajdelova metoda:** Modifikacija Jakobijeve metode:

$$x^{(k+1)} = B_1 x^{(k+1)} + B_2 x^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, \ldots$$

gde su B_1 i B_2 donje i gornje trougaona matrica koje odgovaraju matrici B.