Nelinearne jednačine

- Neka je data jednačina $f(x) = 0$, gde je f u opštem slučaju neka nelinearna funkcija.

- Neka je data jednačina $f(x) = 0$, gde je f u opštem slučaju neka nelinearna funkcija.
- Ukoliko postoji realan broj ξ takav da je $f(\xi) = 0$, tada njega zovemo *tačnim rešenjem* jednačine.

- Neka je data jednačina $f(x) = 0$, gde je f u opštem slučaju neka nelinearna funkcija.
- Ukoliko postoji realan broj ξ takav da je $f(\xi) = 0$, tada njega zovemo *tačnim rešenjem* jednačine.
- Osnovni zadaci:

- Neka je data jednačina $f(x) = 0$, gde je f u opštem slučaju neka nelinearna funkcija.
- Ukoliko postoji realan broj ξ takav da je $f(\xi) = 0$, tada njega zovemo *tačnim rešenjem* jednačine.
- Osnovni zadaci:
  - Izolacija rešenja: Nalaženje intervala $[a, b]$ koji sadrži ξ.

- Neka je data jednačina $f(x) = 0$, gde je f u opštem slučaju neka nelinearna funkcija.
- Ukoliko postoji realan broj ξ takav da je $f(\xi) = 0$, tada njega zovemo *tačnim rešenjem* jednačine.
- Osnovni zadaci:
  - Izolacija rešenja: Nalaženje intervala $[a, b]$ koji sadrži ξ.
  - Nalaženje približnog rešenja sa unapred zadatom greškom.

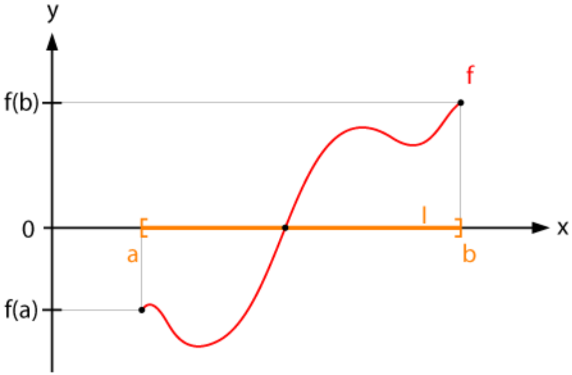
- Neka je data jednačina $f(x) = 0$, gde je f u opštem slučaju neka nelinearna funkcija.
- Ukoliko postoji realan broj ξ takav da je $f(\xi) = 0$, tada njega zovemo *tačnim rešenjem* jednačine.
- Osnovni zadaci:
  - Izolacija rešenja: Nalaženje intervala $[a, b]$ koji sadrži ξ.
  - Nalaženje približnog rešenja sa unapred zadatom greškom.
- Većina metoda za nalaženje rešenja nelinearne jednačine je iterativnog karaktera.

Bolcanova teorema

Teorema: Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ i važi $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada postoji tačka $c \in (a, b)$ td. $f(c) = 0$.

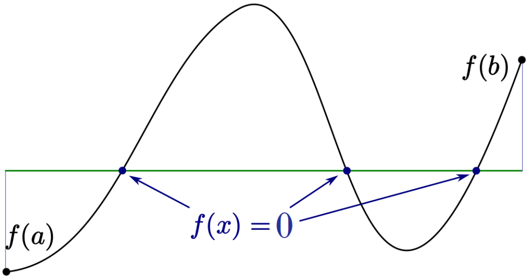
Bolcanova teorema

Teorema: Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ i važi $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada postoji tačka $c \in (a, b)$ td. $f(c) = 0$.

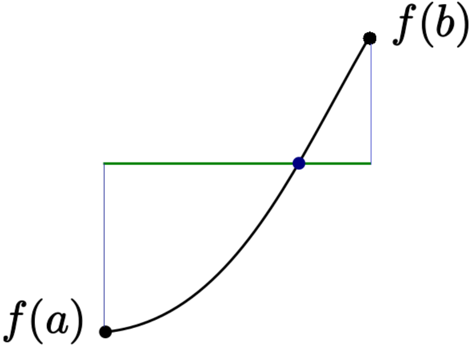


- Prethodna teorema nam ne garantuje jedinstvenost rešenja.

- Prethodna teorema nam ne garantuje jedinstvenost rešenja.



- Nula će biti jedinstvena ako je npr. funkcija još i konveksna/konkavna/strogo monotona na intervalu izolacije.



Metoda polovljenja intervala

Metoda polovljenja intervala

- Formiramo niz aproksimacija rešenja $x_0, x_1, x_2, \ldots$ kao $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, gde je $[a_k, b_k]$ interval izolacije rešenja koji predstavlja onu polovinu prethodnog intervala izolacije koja sadrži rešenje. Uzima se $a_0 = a$, $b_0 = b$.

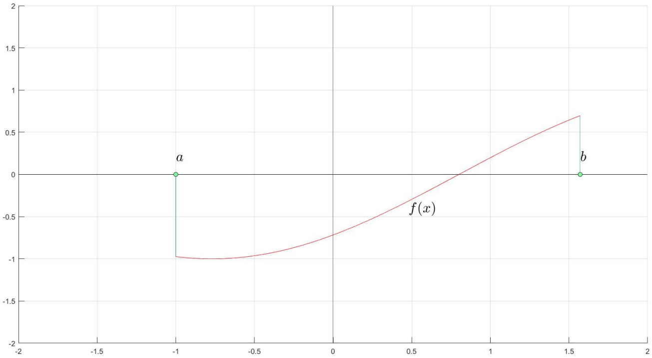
Metoda polovljenja intervala

- Formiramo niz aproksimacija rešenja $x_0, x_1, x_2, \ldots$ kao $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, gde je $[a_k, b_k]$ interval izolacije rešenja koji predstavlja onu polovinu prethodnog intervala izolacije koja sadrži rešenje. Uzima se $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- Važi: $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \xi$

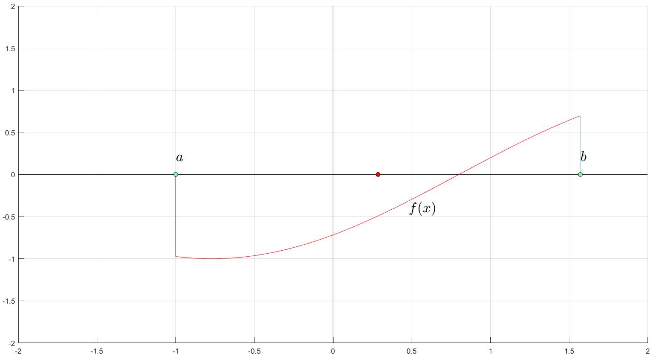
Metoda polovljenja intervala

- Formiramo niz aproksimacija rešenja $x_0, x_1, x_2, \dots$ kao $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, gde je $[a_k, b_k]$ interval izolacije rešenja koji predstavlja onu polovinu prethodnog intervala izolacije koja sadrži rešenje. Uzima se $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- Važi: $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \xi$
- U svakom koraku važi $|\xi - x_k| \leq \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$.

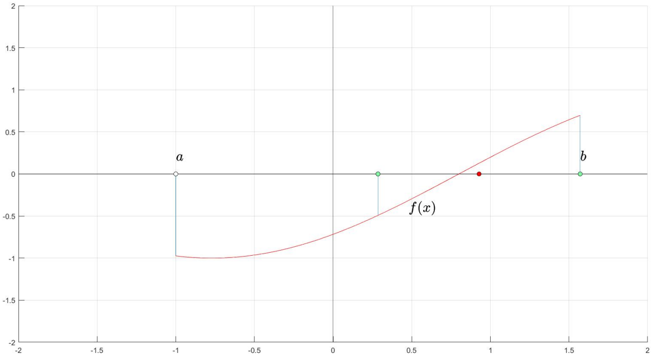
Demonstracija metode polovljenja



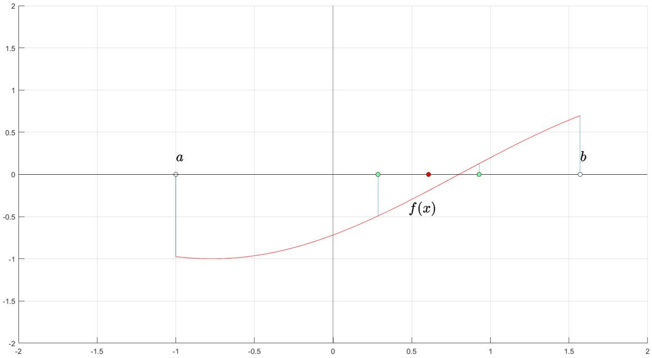
Demonstracija metode polovljenja



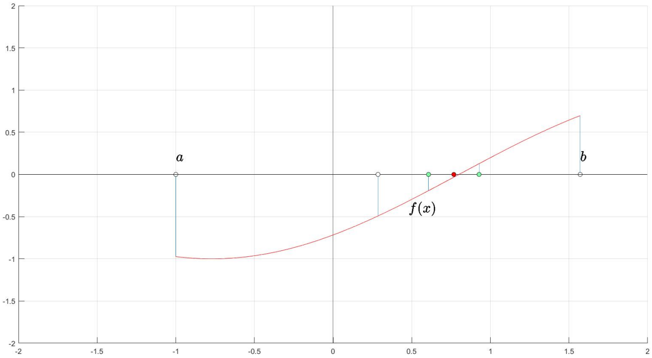
Demonstracija metode polovljenja



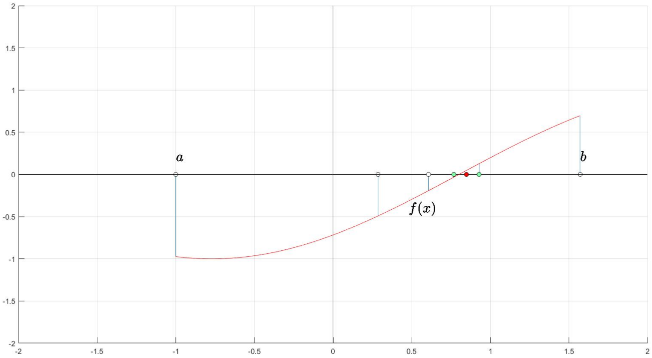
Demonstracija metode polovljenja



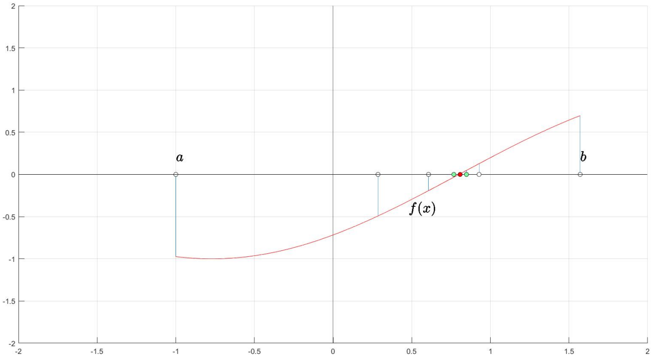
Demonstracija metode polovljenja



Demonstracija metode polovljenja



Demonstracija metode polovljenja



Njutnova metoda

Njutnova metoda

- Ideja Njutnova metode je da se formira niz aproksimacija $x_1, x_2, \ldots$ tako što se za poznato x_k, vrednost x_{k+1} dobija kao presek tangente na krivu $(x, f(x))$ u tački $(x_k, f(x_k))$ sa x osom.

Njutnova metoda

- Ideja Njutnova metode je da se formira niz aproksimacija $x_1, x_2, \ldots$ tako što se za poznato x_k, vrednost x_{k+1} dobija kao presek tangente na krivu $(x, f(x))$ u tački $(x_k, f(x_k))$ sa x osom.
- Neka je f data funkcija koja je dva puta neprekidno diferencijabilna i (a, b) interval izolacije korena. Ako važi:

Njutnova metoda

- Ideja Njutnova metode je da se formira niz aproksimacija $x_1, x_2, \ldots$ tako što se za poznato x_k, vrednost x_{k+1} dobija kao presek tangente na krivu $(x, f(x))$ u tački $(x_k, f(x_k))$ sa x osom.
- Neka je f data funkcija koja je dva puta neprekidno diferencijabilna i (a, b) interval izolacije korena. Ako važi:
  1. $f(a)f(b) < 0$ (egzistencija rešenja),

Njutnova metoda

- Ideja Njutnova metode je da se formira niz aproksimacija $x_1, x_2, \ldots$ tako što se za poznato x_k, vrednost x_{k+1} dobija kao presek tangente na krivu $(x, f(x))$ u tački $(x_k, f(x_k))$ sa x osom.
- Neka je f data funkcija koja je dva puta neprekidno diferencijabilna i (a, b) interval izolacije korena. Ako važi:
  1. $f(a)f(b) < 0$ (egzistencija rešenja),
  2. f' je stalnog znaka (strogo monotona - jedinstvenost rešenja)

Njutnova metoda

- Ideja Njutnova metode je da se formira niz aproksimacija $x_1, x_2, \ldots$ tako što se za poznato x_k, vrednost x_{k+1} dobija kao presek tangente na krivu $(x, f(x))$ u tački $(x_k, f(x_k))$ sa x osom.
- Neka je f data funkcija koja je dva puta neprekidno diferencijabilna i (a, b) interval izolacije korena. Ako važi:
  1. $f(a)f(b) < 0$ (egzistencija rešenja),
  2. f' je stalnog znaka (strogo monotona - jedinstvenost rešenja)
  3. f'' je stalnog znaka i $f(x_0)f''(x_0) > 0$ (f je strogo konveksna/konkavna, ova dva uslova garantuju da će svako x_n biti sa iste strane rešenja kao x_0)

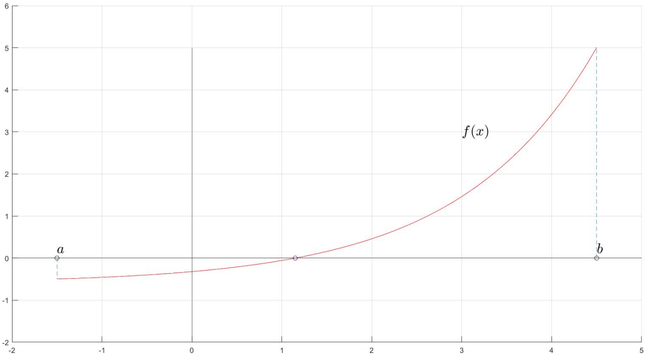
Njutnova metoda

- Ideja Njutnova metode je da se formira niz aproksimacija $x_1, x_2, \ldots$ tako što se za poznato x_k, vrednost x_{k+1} dobija kao presek tangente na krivu $(x, f(x))$ u tački $(x_k, f(x_k))$ sa x osom.
- Neka je f data funkcija koja je dva puta neprekidno diferencijabilna i (a, b) interval izolacije korena. Ako važi:
  1. $f(a)f(b) < 0$ (egzistencija rešenja),
  2. f' je stalnog znaka (strogo monotona - jedinstvenost rešenja)
  3. f'' je stalnog znaka i $f(x_0)f''(x_0) > 0$ (f je strogo konveksna/konkavna, ova dva uslova garantuju da će svako x_n biti sa iste strane rešenja kao x_0)

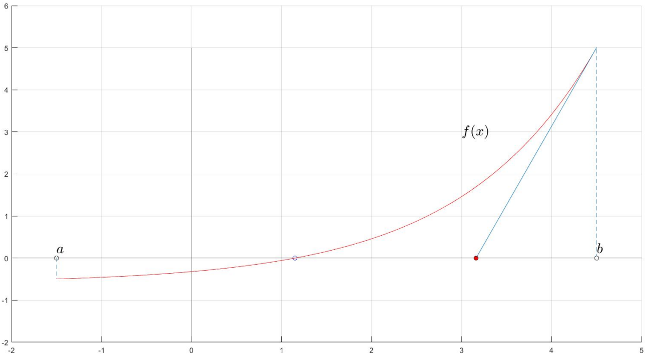
  Tada za iterativni niz $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$ važi

  $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \xi$, tj. metoda konvergira i važi: $|\xi - x_n| \leq \dfrac{|f(x_n)|}{m_1}$,
  gde je $m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.

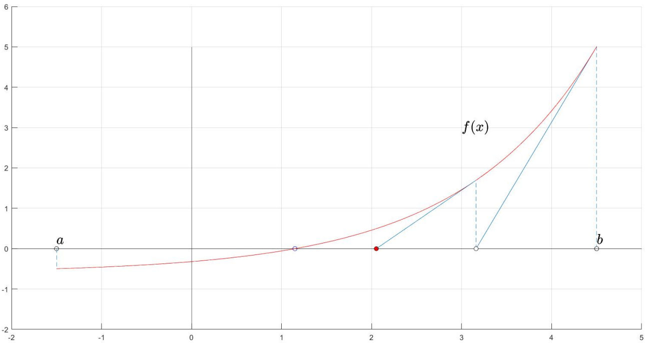
Demonstracija Njutnove metode



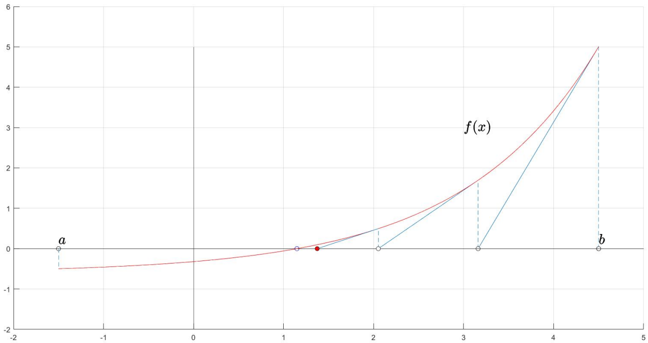
Demonstracija Njutnove metode



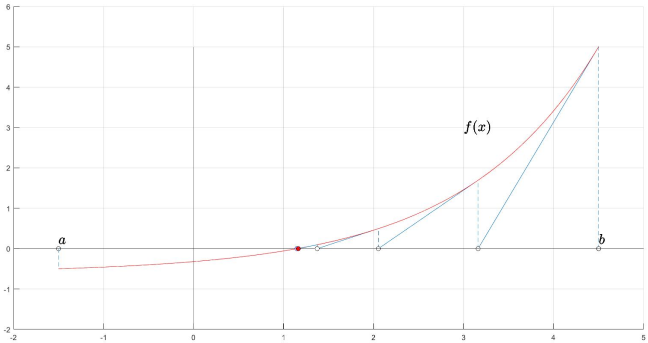
Demonstracija Njutnove metode



Demonstracija Njutnove metode



Demonstracija Njutnove metode



Kako se računa kvadratni koren?

Kako se računa kvadratni koren?

Ako je a nenegativan realan broj, tada se računanje kvadratnog korena može svesti na rešavanje jednačine:

$$x^2 - a = 0$$

Kako se računa kvadratni koren?

Ako je a nenegativan realan broj, tada se računanje kvadratnog korena može svesti na rešavanje jednačine:

$$x^2 - a = 0$$

Ako je $f(x) = x^2 - a$, tada je $f'(x) = 2x$, pa bi iterativni niz u Njutnovoj metodi bio:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n + \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

sa nekom pogodno odabranom vrednošću za x_0.

Kako se računa kvadratni koren?

Jedan alternativni način za računanje korena je da se prvo izračuna $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, a odatle $\sqrt{a}$ kao $\sqrt{a} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot a$.

Kako se računa kvadratni koren?

Jedan alternativni način za računanje korena je da se prvo izračuna $\frac{1}{\sqrt{a}}$, a odatle $\sqrt{a}$ kao $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot a$. Razlog za ovim je da se izbegne deljenje u iterativnom nizu koje je ,,skuplja" operacija od množenja.

Kako se računa kvadratni koren?

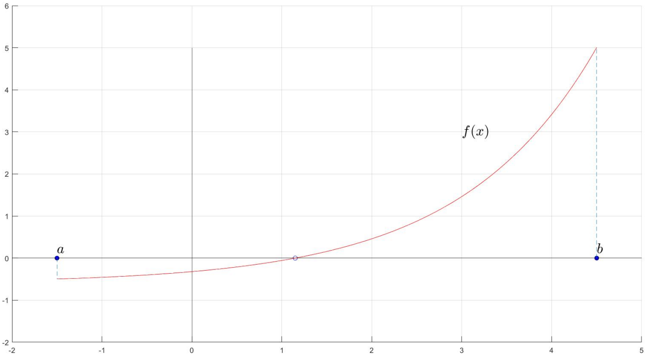
Jedan alternativni način za računanje korena je da se prvo izračuna $\frac{1}{\sqrt{a}}$, a odatle $\sqrt{a}$ kao $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot a$. Razlog za ovim je da se izbegne deljenje u iterativnom nizu koje je ,,skuplja" operacija od množenja.

Ako je $f(x) = \frac{1}{x^2} - a$, tada je $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, odakle je iterativni niz:

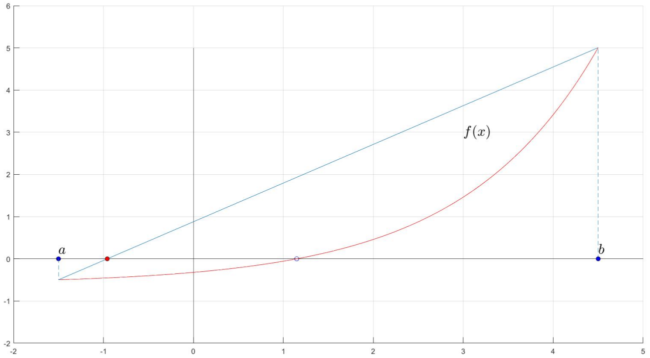
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n^2} - a}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{x_n}{2}(3 - ax_n^2)$$

Metoda sečice

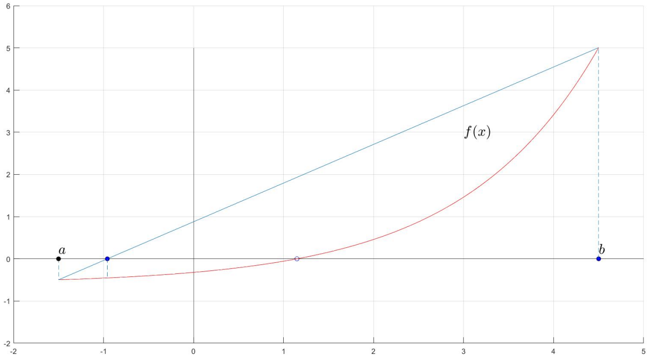
Metoda sečice



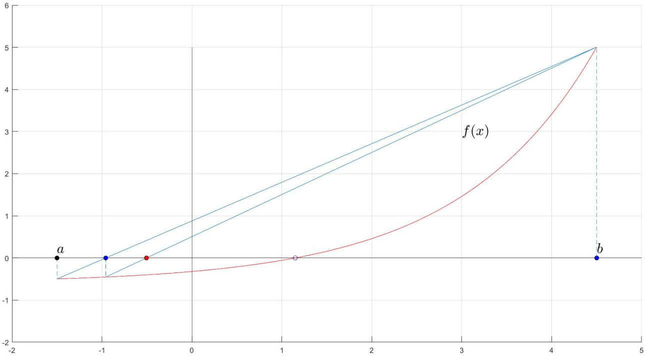
Metoda sečice



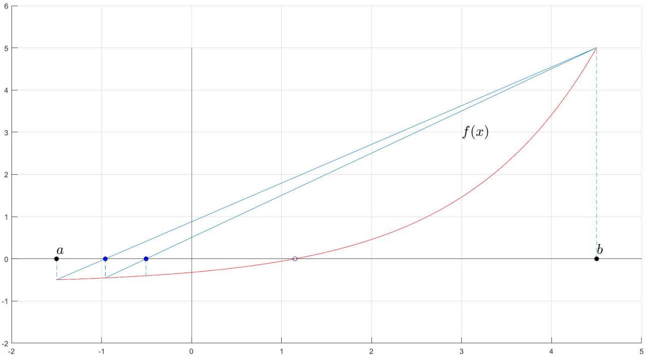
Metoda sečice



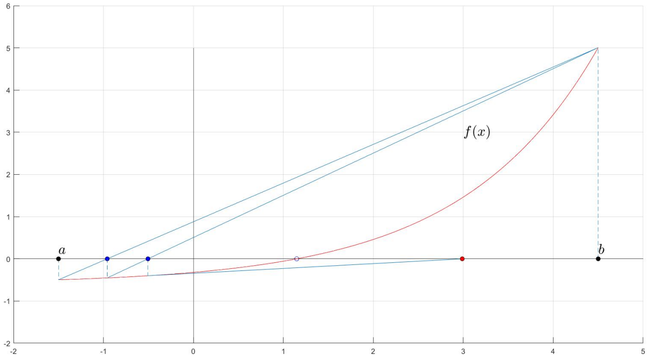
Metoda sečice



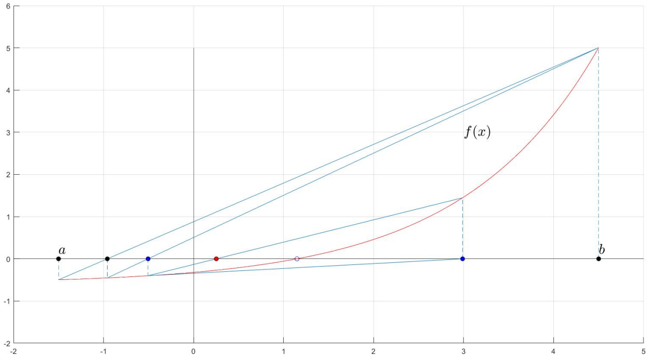
Metoda sečice



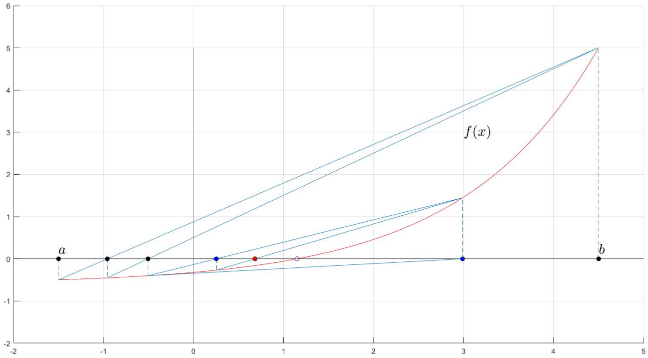
Metoda sečice



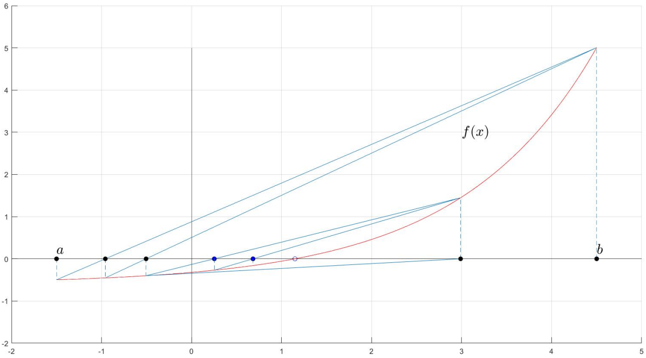
Metoda sečice



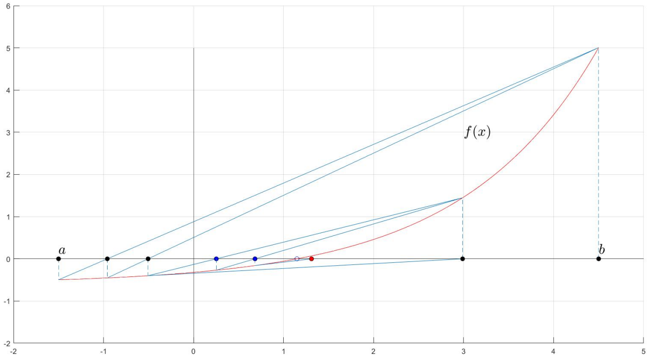
Metoda sečice



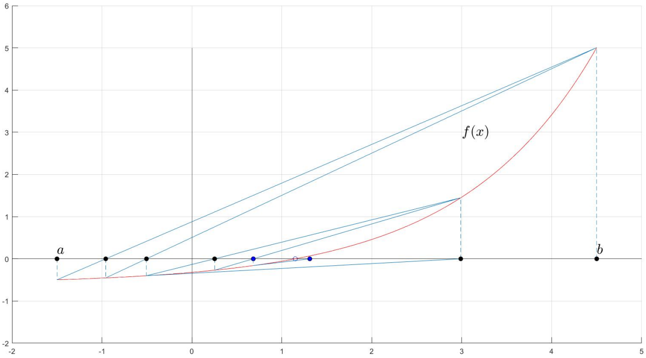
Metoda sečice



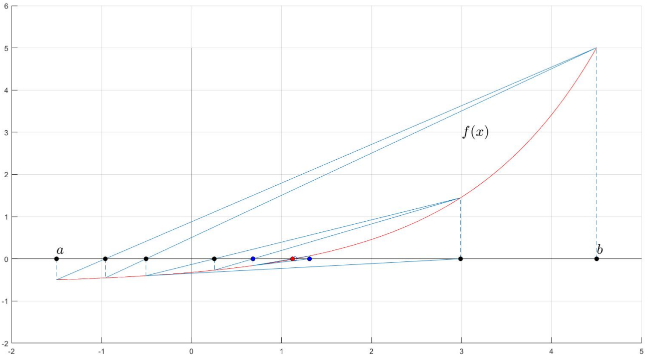
Metoda sečice



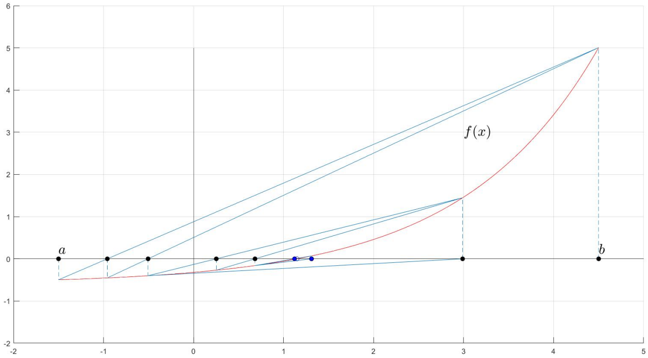
Metoda sečice



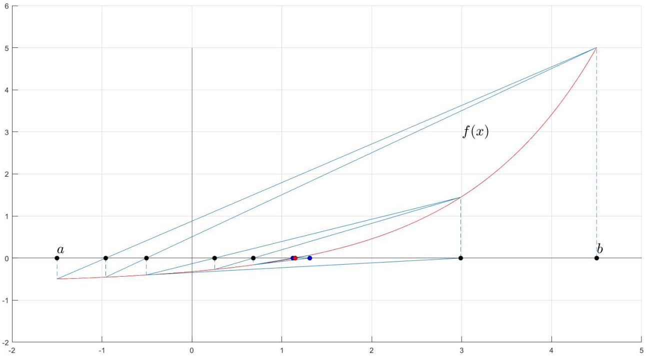
Metoda sečice



Metoda sečice



Metoda sečice



Metoda regula falsi

Metoda regula falsi

- Metoda se zasniva na idejama metode sečice i metode polovljenja.

Metoda regula falsi

- Metoda se zasniva na idejama metode sečice i metode polovljenja.
- U opštem slučaju, ako je $f \in C[a, b]$, gde je (a, b) interval izolacije korena, i važi $f(a)f(b) < 0$, tada:

Metoda regula falsi

- Metoda se zasniva na idejama metode sečice i metode polovljenja.
- U opštem slučaju, ako je $f \in C[a, b]$, gde je (a, b) interval izolacije korena, i važi $f(a)f(b) < 0$, tada:
  1. Uzmemo $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Metoda regula falsi

- Metoda se zasniva na idejama metode sečice i metode polovljenja.
- U opštem slučaju, ako je $f \in C[a, b]$, gde je (a, b) interval izolacije korena, i važi $f(a)f(b) < 0$, tada:
  1. Uzmemo $a_0 = a$, $b_0 = b$.
  2. Odredimo presek prave kroz $(a_k, f(a_k))$ i $(b_k, f(b_k))$ i x-ose (to nam je aproksimacija rešenja u trenutnoj iteraciji), $c_k = b_k - f(b_k)\dfrac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}$. Ukoliko je $f(a_k)f(c_k) < 0$ tada možemo uzeti $b_{k+1} = c_k$ i $a_{k+1} = a_k$. Inače, uzimamo $a_{k+1} = c_k$ i $b_{k+1} = b_k$.

Metoda regula falsi

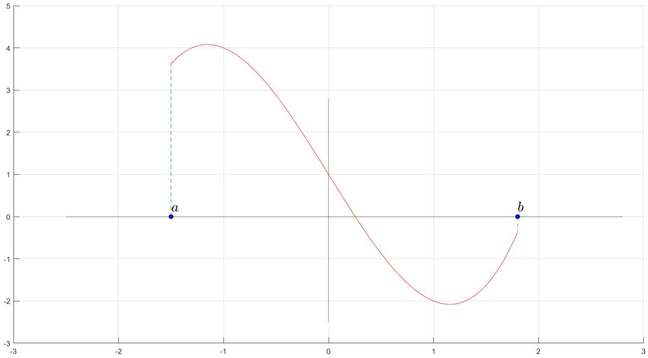
- Metoda se zasniva na idejama metode sečice i metode polovljenja.
- U opštem slučaju, ako je $f \in C[a,b]$, gde je (a,b) interval izolacije korena, i važi $f(a)f(b) < 0$, tada:
  1. Uzmemo $a_0 = a$, $b_0 = b$.
  2. Odredimo presek prave kroz $(a_k, f(a_k))$ i $(b_k, f(b_k))$ i x-ose (to nam je aproksimacija rešenja u trenutnoj iteraciji), $c_k = b_k - f(b_k)\dfrac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}$. Ukoliko je $f(a_k)f(c_k) < 0$ tada možemo uzeti $b_{k+1} = c_k$ i $a_{k+1} = a_k$. Inače, uzimamo $a_{k+1} = c_k$ i $b_{k+1} = b_k$.
  3. Na ovaj način se formira niz umetnutih intervala izolacije, slično kao u metodi polovljenja i važi $\lim\limits_{x\to\infty} c_n = \xi$.

- Uz uslov da su f' i f'' stalnog znaka na $[a, b]$, jedan od krajeva intervala $[a, b]$ će biti kraj u svakom od umetnutih intervala izolacije.

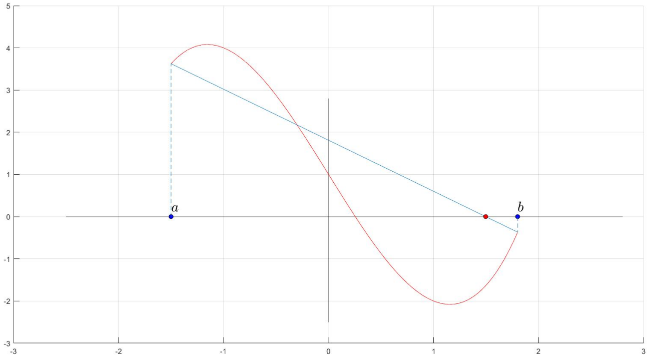
- Uz uslov da su f' i f'' stalnog znaka na $[a, b]$, jedan od krajeva intervala $[a, b]$ će biti kraj u svakom od umetnutih intervala izolacije.
- Razlikujemo zato dva iterativna procesa:
  1. $f(a)f''(a) < 0$: $x_0 = a$ i $x_{n+1} = x_n - \dfrac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$

- Uz uslov da su f' i f'' stalnog znaka na $[a, b]$, jedan od krajeva intervala $[a, b]$ će biti kraj u svakom od umetnutih intervala izolacije.
- Razlikujemo zato dva iterativna procesa:
  1. $f(a)f''(a) < 0$: $x_0 = a$ i $x_{n+1} = x_n - \dfrac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$
  2. $f(b)f''(b) < 0$: $x_0 = b$ i $x_{n+1} = x_n - \dfrac{a - x_n}{f(a) - f(x_n)} f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$
- Važi ocena greške: $|x - \xi| \leq \dfrac{|f(x_n)|}{m_1}$.

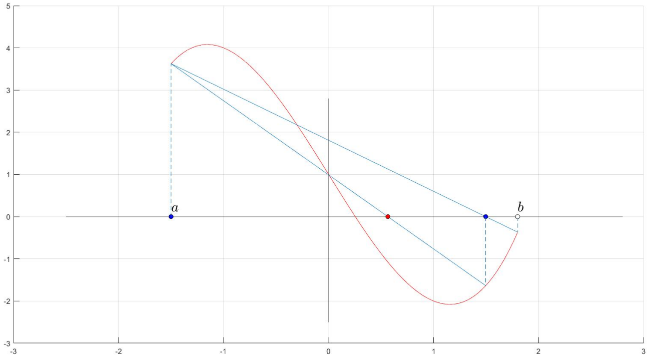
Demonstracija metode regula falsi



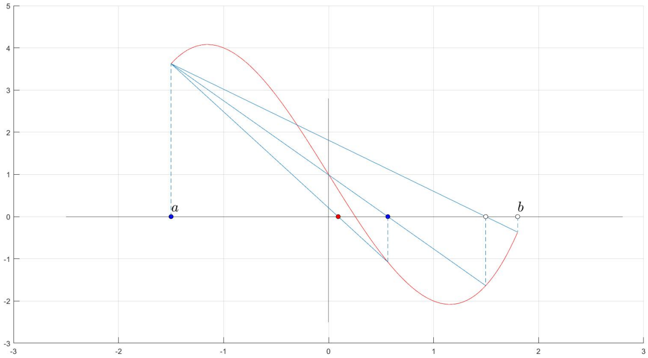
Demonstracija metode regula falsi



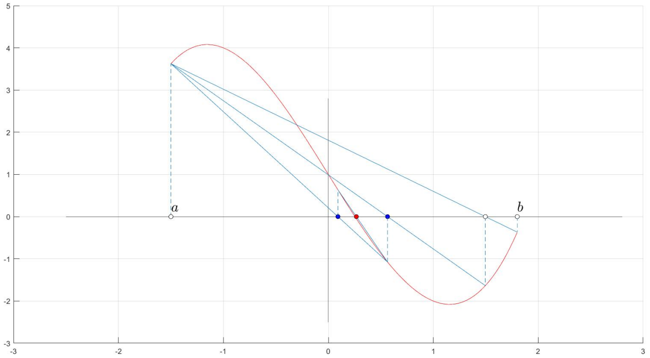
Demonstracija metode regula falsi



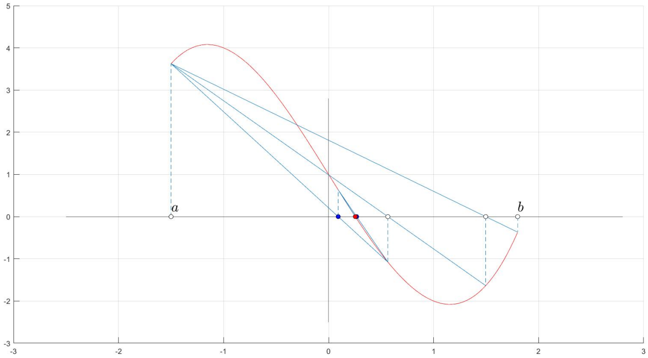
Demonstracija metode regula falsi



Demonstracija metode regula falsi



Demonstracija metode regula falsi



Metoda iteracije

- Ideja je da se jednačina $f(x) = 0$ napiše u ekvivalentnom obliku $x = g(x)$ za $x \in [a, b]$ i da se na osnovu toga formira iterativni niz $x_n = g(x_{n-1})$, za $n = 1, 2, \ldots$ i $x_0 \in [a, b]$.

Metoda iteracije

- Ideja je da se jednačina $f(x) = 0$ napiše u ekvivalentnom obliku $x = g(x)$ za $x \in [a, b]$ i da se na osnovu toga formira iterativni niz $x_n = g(x_{n-1})$, za $n = 1, 2, \ldots$ i $x_0 \in [a, b]$.
- **Primer**: Rešavamo jednačinu $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$ za $x \in [1, 5]$. Neki od načina da se ona ekvivalentno zapiše:

Metoda iteracije

- Ideja je da se jednačina $f(x) = 0$ napiše u ekvivalentnom obliku $x = g(x)$ za $x \in [a, b]$ i da se na osnovu toga formira iterativni niz $x_n = g(x_{n-1})$, za $n = 1, 2, \ldots$ i $x_0 \in [a, b]$.
- **Primer**: Rešavamo jednačinu $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$ za $x \in [1, 5]$. Neki od načina da se ona ekvivalentno zapiše:
  1. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^4 = x + 10 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{x+10}{x^2} \Leftrightarrow$
     $x = \dfrac{\sqrt{x+10}}{x}$.

Metoda iteracije

- Ideja je da se jednačina $f(x) = 0$ napiše u ekvivalentnom obliku $x = g(x)$ za $x \in [a, b]$ i da se na osnovu toga formira iterativni niz $x_n = g(x_{n-1})$, za $n = 1, 2, \ldots$ i $x_0 \in [a, b]$.
- **Primer**: Rešavamo jednačinu $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$ za $x \in [1, 5]$. Neki od načina da se ona ekvivalentno zapiše:
  1. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^4 = x + 10 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{x+10}{x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{x+10}}{x}$.
  2. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^4 = x + 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{x+10}$.

Metoda iteracije

- Ideja je da se jednačina $f(x) = 0$ napiše u ekvivalentnom obliku $x = g(x)$ za $x \in [a, b]$ i da se na osnovu toga formira iterativni niz $x_n = g(x_{n-1})$, za $n = 1, 2, \dots$ i $x_0 \in [a, b]$.
- **Primer**: Rešavamo jednačinu $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$ za $x \in [1, 5]$. Neki od načina da se ona ekvivalentno zapiše:
  1. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^4 = x + 10 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{x+10}{x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{x+10}}{x}$.
  2. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^4 = x + 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{x+10}$.
  3. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{x^3 - 1}$.

Metoda iteracije

- Ideja je da se jednačina $f(x) = 0$ napiše u ekvivalentnom obliku $x = g(x)$ za $x \in [a, b]$ i da se na osnovu toga formira iterativni niz $x_n = g(x_{n-1})$, za $n = 1, 2, \ldots$ i $x_0 \in [a, b]$.
- **Primer**: Rešavamo jednačinu $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$ za $x \in [1, 5]$. Neki od načina da se ona ekvivalentno zapiše:
  1. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^4 = x + 10 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{x + 10}{x^2} \Leftrightarrow$ $x = \dfrac{\sqrt{x + 10}}{x}$.
  2. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^4 = x + 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{x + 10}$.
  3. $x^4 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{x^3 - 1}$.
- Za neke funkcije g proces konvergira a za neke ne!

- Ako je g diferencijabilna funkcija na $[a, b]$ i važi:

$$|g'(x)| \leq q < 1, \quad \forall x \in [a, b],$$

tada za proizvoljno $x_0 \in [a, b]$ važi $\lim_{x \to \infty} x_n = \xi$.

- Ako je g diferencijabilna funkcija na $[a, b]$ i važi:

$$|g'(x)| \leq q < 1, \quad \forall x \in [a, b],$$

tada za proizvoljno $x_0 \in [a, b]$ važi $\lim_{x \to \infty} x_n = \xi$.

- Ocena greške:
  1. $|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$ (*aposteriorna ocena*)
  2. $|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$(*apriorna ocena*)