2. Direktan i obratan problem greške funkcija

Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ neke promenljive i $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funkcija tih promenljivih.

Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ neke promenljive i $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funkcija tih promenljivih.

Ako su $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ približne vrednosti tačnih vrednosti $x_1, x_2, ..., x_n$, tada je $f^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ približna vrednost funkcije f.

Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ neke promenljive i $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funkcija tih promenljivih.

Ako su $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ približne vrednosti tačnih vrednosti $x_1, x_2, ..., x_n$, tada je $f^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ približna vrednost funkcije f.

Apsolutna i relativna greška približne vrednosti funkcije :

Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ neke promenljive i $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funkcija tih promenljivih.

Ako su $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ približne vrednosti tačnih vrednosti $x_1, x_2, ..., x_n$, tada je $f^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ približna vrednost funkcije f.

Apsolutna i relativna greška približne vrednosti funkcije :

- $\Delta_{f^*} = |f - f^*|$.
- $\delta_{f^*} = \dfrac{\Delta_{f^*}}{|f^*|}$

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neke promenljive i $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcija tih promenljivih.

Ako su $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ približne vrednosti tačnih vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tada je $f^* = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ približna vrednost funkcije f.

Apsolutna i relativna greška približne vrednosti funkcije :

- $\Delta_{f^*} = |f - f^*|$.
- $\delta_{f^*} = \dfrac{\Delta_{f^*}}{|f^*|}$

Najčešće se koriste granice apsolutne i relativne greške:

$$A_{f^*} \geq \Delta_{f^*}, \qquad R_{f^*} \geq \delta_{f^*}.$$

Direktan problem ocene greške

- Poznate su nam ocene greške argumenata i želimo da ocenimo grešku funkcije.

Direktan problem ocene greške

- Poznate su nam ocene greške argumenata i želimo da ocenimo grešku funkcije.
- Pretpostavimo da postoje $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ i da su neprekidni.

Direktan problem ocene greške

- Poznate su nam ocene greške argumenata i želimo da ocenimo grešku funkcije.
- Pretpostavimo da postoje $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ i da su neprekidni.
- Koristimo ocenu greške:

$$A_{f^*} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| A_{x_1^*} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| A_{x_2^*} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| A_{x_n^*}$$

Specijalni slučajevi

- $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
  Tada je $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 1$, pa je $\boxed{A_{f^*} = A_{x_1^*} + A_{x_2^*} + \cdots + A_{x_n^*}}$

Specijalni slučajevi

- $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
  Tada je $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 1$, pa je $\boxed{A_{f^*} = A_{x_1^*} + A_{x_2^*} + \cdots + A_{x_n^*}}$
- $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$
  Tada je $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n = \dfrac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_i}$
  pa je $A_{f^*} = \dfrac{|x_1^* x_2^* \cdots x_n^*|}{|x_1^*|} A_{x_1^*} + \cdots + \dfrac{|x_1^* x_2^* \cdots x_n^*|}{|x_n^*|} A_{x_n^*} =$
  $|x_1^* x_2^* \cdots x_n^*| \left(\dfrac{A_{x_i^*}}{|x_1^*|} + \cdots + \dfrac{A_{x_n^*}}{|x_n^*|} \right) = |f^*|(R_{x_1^*} + \cdots + R_{x_n^*})$
  odakle sledi $\boxed{R_{f^*} = R_{x_1^*} + R_{x_2^*} + \cdots + R_{x_n^*}}$

- $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$
  Tada je $A_{f^*} = |f'(x^*)|A_{x^*} = |\alpha(x^*)^{\alpha-1}|A_{x^*} = |\alpha|\dfrac{|(x^*)^\alpha|}{|x^*|}A_{x^*} = |\alpha||f^*|\dfrac{A_{x^*}}{|x^*|} = |\alpha||f^*|R_{x^*}$, odakle je

$$\boxed{R_{f^*} = |\alpha|R_{x^*}}.$$

- $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$
  Tada je $A_{f^*} = |f'(x^*)|A_{x^*} = |\alpha(x^*)^{\alpha-1}|A_{x^*} = |\alpha|\dfrac{|(x^*)^\alpha|}{|x^*|}A_{x^*} = |\alpha||f^*|\dfrac{A_{x^*}}{|x^*|} = |\alpha||f^*|R_{x^*}$, odakle je

$$\boxed{R_{f^*} = |\alpha|R_{x^*}}.$$

- Posledice:
  - $f(x,y) = x - y \Rightarrow A_{f^*} = A_{x^*} + A_{y^*}$,
  - $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \Rightarrow R_{f^*} = R_{x^*} + R_{y^*}$.

Obratan problem ocene greške

- Pretpostavimo da nam je poznata ocena greške vrednosti funkcije $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i da želimo da ocenimo greške njenih argumenata.

Obratan problem ocene greške

- Pretpostavimo da nam je poznata ocena greške vrednosti funkcije $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i da želimo da ocenimo greške njenih argumenata.
- Koristimo vezu

$$A_{f^*} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| A_{x_1^*} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| A_{x_2^*} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| A_{x_n^*},$$

i znamo da je $A_{f^*} \leq \varepsilon$

- Ako pretpostavimo da svaki član jednako utiče na grešku tj. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right| A_{x_1^*} = \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right| A_{x_2^*} = \cdots = \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right| A_{x_n^*}$, tada dobijamo ocenu:

$$\boxed{A_{x_k^*} \leq \frac{\varepsilon}{n\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n}$$

- Ako pretpostavimo da svaki član jednako utiče na grešku tj. $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| A_{x_1^*} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| A_{x_2^*} = \cdots = \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| A_{x_n^*}$, tada dobijamo ocenu:

$$\boxed{A_{x_k^*} \leq \frac{\varepsilon}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n}$$

- Možemo pretpostaviti da su apsolutne greške svih članova međusobno jednake, tj. $A_{x_1^*} = A_{x_2^*} = \cdots = A_{x_n^*}$. Tada važi:

$$\boxed{A_{x_k^*} \leq \frac{\varepsilon}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|}, \quad k = 1, 2, \ldots, n}$$

- Ako pretpostavimo da svi argumenti imaju jednake relativne greške, onda je $\frac{A_{x_1^*}}{|x_1^*|} = \frac{A_{x_2^*}}{|x_2^*|} = \cdots = \frac{A_{x_n^*}}{|x_n^*|} = c \ (*)$,

- Ako pretpostavimo da svi argumenti imaju jednake relativne greške, onda je $\dfrac{A_{x_1^*}}{|x_1^*|} = \dfrac{A_{x_2^*}}{|x_2^*|} = \cdots = \dfrac{A_{x_n^*}}{|x_n^*|} = c\ (*)$, odakle je

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| A_{x_1^*} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| A_{x_2^*} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| A_{x_n^*} \le \varepsilon \\
\Leftrightarrow &\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| c \cdot |x_1|^* + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| c \cdot |x_2|^* + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| c \cdot |x_n|^* \le \varepsilon \\
\Leftrightarrow & c \le \frac{\varepsilon}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |x_1^*| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |x_2^*| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |x_n^*|},
\end{aligned}
$$

pa se zamenom u $(*)$ dobija ocena:

$$
\boxed{A_{x_k^*} \le \frac{\varepsilon |x_k^*|}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |x_1^*| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |x_2^*| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |x_n^*|}, \quad k = 1, ..., n}
$$