1. Približni brojevi i greške

Matematičko modeliranje

- Mnogi problemi u raznim naučnim disciplinama se rešavaju izradom matematičkog modela.

Matematičko modeliranje

- Mnogi problemi u raznim naučnim disciplinama se rešavaju izradom matematičkog modela.
- Izbor modela za konkretan problem, kao i njegov kvalitet zavisi od same prirode problema.

Matematičko modeliranje

- Mnogi problemi u raznim naučnim disciplinama se rešavaju izradom matematičkog modela.
- Izbor modela za konkretan problem, kao i njegov kvalitet zavisi od same prirode problema.
- Rešavanje problema obično podrazumeva:

Matematičko modeliranje

- Mnogi problemi u raznim naučnim disciplinama se rešavaju izradom matematičkog modela.
- Izbor modela za konkretan problem, kao i njegov kvalitet zavisi od same prirode problema.
- Rešavanje problema obično podrazumeva:
  - *Modeliranje problema*: Identifikacija realnog problema i izrada matematičkog modela.

Matematičko modeliranje

- Mnogi problemi u raznim naučnim disciplinama se rešavaju izradom matematičkog modela.
- Izbor modela za konkretan problem, kao i njegov kvalitet zavisi od same prirode problema.
- Rešavanje problema obično podrazumeva:
    - *Modeliranje problema*: Identifikacija realnog problema i izrada matematičkog modela.
    - *Rešavanje*: Odabir metode za rešavanje matematičkog modela i prikaz rešenja.

Matematičko modeliranje

- Mnogi problemi u raznim naučnim disciplinama se rešavaju izradom matematičkog modela.
- Izbor modela za konkretan problem, kao i njegov kvalitet zavisi od same prirode problema.
- Rešavanje problema obično podrazumeva:
    - *Modeliranje problema*: Identifikacija realnog problema i izrada matematičkog modela.
    - *Rešavanje*: Odabir metode za rešavanje matematičkog modela i prikaz rešenja.
    - *Interpretacija*: Dobijeno rešenje se interpretira u jeziku originalnog problema.

Primer: Često se površina Zemlje računa po formuli $P = 4R^2\pi$ pri čemu uzimamo da je $R = 6371km$ i $\pi = 3.14159$.

Primer: Često se površina Zemlje računa po formuli $P = 4R^2\pi$ pri čemu uzimamo da je $R = 6371km$ i $\pi = 3.14159$.

Da li je ovaj model dobar?

Primer: Često se površina Zemlje računa po formuli $P = 4R^2\pi$ pri čemu uzimamo da je $R = 6371km$ i $\pi = 3.14159$.

Da li je ovaj model dobar? Zavisi.

Primer: Često se površina Zemlje računa po formuli $P = 4R^2\pi$ pri čemu uzimamo da je $R = 6371km$ i $\pi = 3.14159$.

Da li je ovaj model dobar? Zavisi.

Manjkavosti modela:

Primer: Često se površina Zemlje računa po formuli $P = 4R^2\pi$ pri čemu uzimamo da je $R = 6371km$ i $\pi = 3.14159$.

Da li je ovaj model dobar? Zavisi.

Manjkavosti modela:

- Modelujemo Zemlju sferom;

Primer: Često se površina Zemlje računa po formuli $P = 4R^2\pi$ pri čemu uzimamo da je $R = 6371km$ i $\pi = 3.14159$.

Da li je ovaj model dobar? Zavisi.

Manjkavosti modela:

- Modelujemo Zemlju sferom;
- Koristimo aproksimaciju za poluprečnik zemlje kao rezultat raznih merenja;

Primer: Često se površina Zemlje računa po formuli $P = 4R^2\pi$ pri čemu uzimamo da je $R = 6371km$ i $\pi = 3.14159$.

Da li je ovaj model dobar? Zavisi.

Manjkavosti modela:

- Modelujemo Zemlju sferom;
- Koristimo aproksimaciju za poluprečnik zemlje kao rezultat raznih merenja;
- Aproksimiramo iracionalan broj π (sa beskonačno mnogo decimalnih cifara) racionalnim;

Primer: Često se površina Zemlje računa po formuli $P = 4R^2\pi$ pri čemu uzimamo da je $R = 6371km$ i $\pi = 3.14159$.

Da li je ovaj model dobar? Zavisi.

Manjkavosti modela:

- Modelujemo Zemlju sferom;
- Koristimo aproksimaciju za poluprečnik zemlje kao rezultat raznih merenja;
- Aproksimiramo iracionalan broj π (sa beskonačno mnogo decimalnih cifara) racionalnim;
- ...

Primer:

- Modelujemo provođenje toplote u štapu kroz vremenski period $[0, T]$.

Primer:

- Modelujemo provođenje toplote u štapu kroz vremenski period $[0, T]$.
- Posmatraćemo štap kao jednodimenziono idealno telo. Svaka tačka na štapu ima koordinatu iz intervala $(0, 1)$.

Primer:

- Modelujemo provođenje toplote u štapu kroz vremenski period $[0, T]$.
- Posmatraćemo štap kao jednodimenziono idealno telo. Svaka tačka na štapu ima koordinatu iz intervala $(0, 1)$.
- Zanemarićemo sva spoljna delovanja na štap osim izvora toplote koji je opisan funkcijom $f(x, t)$.

Primer:

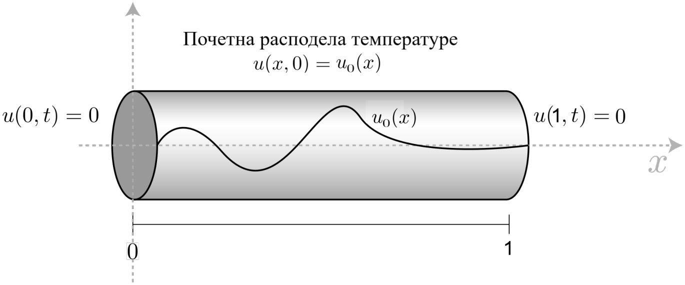
- Modelujemo provođenje toplote u štapu kroz vremenski period $[0, T]$.
- Posmatraćemo štap kao jednodimenziono idealno telo. Svaka tačka na štapu ima koordinatu iz intervala $(0, 1)$.
- Zanemarićemo sva spoljna delovanja na štap osim izvora toplote koji je opisan funkcijom $f(x, t)$.
- Smatraćemo da je poznata početna raspodela temperature u štapu i da je opisana funkcijom $u_0(x)$.

Primer:

- Modelujemo provođenje toplote u štapu kroz vremenski period $[0, T]$.
- Posmatraćemo štap kao jednodimenziono idealno telo. Svaka tačka na štapu ima koordinatu iz intervala $(0, 1)$.
- Zanemarićemo sva spoljna delovanja na štap osim izvora toplote koji je opisan funkcijom $f(x, t)$.
- Smatraćemo da je poznata početna raspodela temperature u štapu i da je opisana funkcijom $u_0(x)$.
- Pretpostavićemo da je temperatura na krajevima uvek jednaka nuli.

Primer:

- Modelujemo provođenje toplote u štapu kroz vremenski period $[0, T]$.
- Posmatraćemo štap kao jednodimenziono idealno telo. Svaka tačka na štapu ima koordinatu iz intervala $(0, 1)$.
- Zanemarićemo sva spoljna delovanja na štap osim izvora toplote koji je opisan funkcijom $f(x, t)$.
- Smatraćemo da je poznata početna raspodela temperature u štapu i da je opisana funkcijom $u_0(x)$.
- Pretpostavićemo da je temperatura na krajevima uvek jednaka nuli.
- Rešenje problema je funkcija $u(x, t)$ temperature u tački x u trenutku t.



Matematička jednačina koja odgovara problemu je:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T],$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,1).$$

- Tačno rešenje ovog problema glasi:

$$u(x,t) =$$

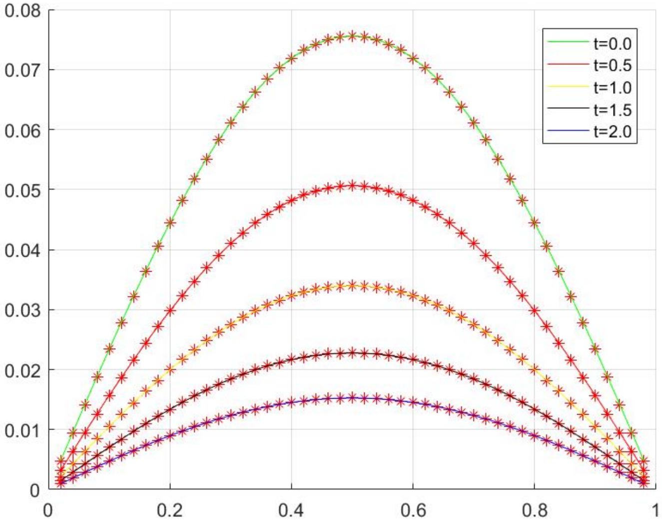
$$2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \sin j\pi x \int\limits_0^1 \left[u_0(y) + \int\limits_0^t f(y,s) e^{j^2\pi^2 s} ds \right] \sin j\pi y dy$$

- Tačno rešenje ovog problema glasi:

$$u(x,t) =$$

$$2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \sin j\pi x \int_0^1 \left[u_0(y) + \int_0^t f(y,s) e^{j^2\pi^2 s} ds \right] \sin j\pi y dy$$

- Potrebno nam je numeričko rešenje!


0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t=0.0
t=0.5
t=1.0
t=1.5
t=2.0

Greške u matematičkom modeliranju

- Neotklonjiva greška: Greška ulaznih podataka i greška modela

Greške u matematičkom modeliranju

- Neotklonjiva greška: Greška ulaznih podataka i greška modela
- Greška metode

Greške u matematičkom modeliranju

- Neotklonjiva greška: Greška ulaznih podataka i greška modela
- Greška metode
- Greška zaokrugljivanja (računske greške)

Greške približnog broja

- x - tačan broj,

Greške približnog broja

- x - tačan broj,
- x^* - približan broj, tj. neka aproksimacija tačnog broja x.

Greške približnog broja

- x - tačan broj,
- x^* - približan broj, tj. neka aproksimacija tačnog broja x.

Mere greške takve aproksimacije:

Greške približnog broja

- x - tačan broj,
- x^* - približan broj, tj. neka aproksimacija tačnog broja x.

Mere greške takve aproksimacije:

- **Apsolutna greška**: $\Delta_{x^*} = |x - x^*|$;

Greške približnog broja

- x - tačan broj,
- x^* - približan broj, tj. neka aproksimacija tačnog broja x.

Mere greške takve aproksimacije:

- **Apsolutna greška**: $\Delta_{x^*} = |x - x^*|$;
  Najčešće se umesto apsolutne greške koristi neka njena procena tj. **granica apsolutne greške**: $A_{x^*} \geq \Delta_{x^*}$

Greške približnog broja

- x - tačan broj,
- x^* - približan broj, tj. neka aproksimacija tačnog broja x.

Mere greške takve aproksimacije:

- **Apsolutna greška**: $\Delta_{x^*} = |x - x^*|$;
  Najčešće se umesto apsolutne greške koristi neka njena procena tj. **granica apsolutne greške**: $A_{x^*} \geq \Delta_{x^*}$
- **Relativna greška**: $\delta_{x^*} = \dfrac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}$;
  Granica relativne greške: $R_{x^*} \geq \delta_{x^*}$

Greške približnog broja

- x - tačan broj,
- x^* - približan broj, tj. neka aproksimacija tačnog broja x.

Mere greške takve aproksimacije:

- **Apsolutna greška**: $\Delta_{x^*} = |x - x^*|$;
  Najčešće se umesto apsolutne greške koristi neka njena procena tj. **granica apsolutne greške**: $A_{x^*} \geq \Delta_{x^*}$
- **Relativna greška**: $\delta_{x^*} = \dfrac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}$;
  Granica relativne greške: $R_{x^*} \geq \delta_{x^*}$
  Često se koristi $R_{x^*} = \dfrac{A_{x^*}}{|x^*|}$.

Značajne cifre

- Razlika između 0.0000123 i $1.23 \cdot 10^{-5}$?

Značajne cifre

- Razlika između 0.0000123 i $1.23 \cdot 10^{-5}$?

Numerička izračunavanja se oslanjaju na predstavljanje brojeva u računaru. Pošto je memorija računara konačna, zapis svakog broja se zapisuje pomoću ograničenog broja bitova.

Značajne cifre

- Razlika između 0.0000123 i $1.23 \cdot 10^{-5}$?

Numerička izračunavanja se oslanjaju na predstavljanje brojeva u računaru. Pošto je memorija računara konačna, zapis svakog broja se zapisuje pomoću ograničenog broja bitova.

Drugi zapis je racionalniji, na osnovu cifara 1,2 i 3, kao i eksponenta -5 imamo sve informacije o broju.

Značajne cifre

- Razlika između 0.0000123 i $1.23 \cdot 10^{-5}$?

Numerička izračunavanja se oslanjaju na predstavljanje brojeva u računaru. Pošto je memorija računara konačna, zapis svakog broja se zapisuje pomoću ograničenog broja bitova.

Drugi zapis je racionalniji, na osnovu cifara 1,2 i 3, kao i eksponenta -5 imamo sve informacije o broju.

Nule pre jedinice su *beznačajne*, bespotrebno bi zauzimale prostor u memoriji kada bismo koristili prvi zapis.

Značajne cifre su sve cifre nekog broja, polazeći od prve nenula cifre sa leve strane.

Sigurne cifre

Neka je dat broj
$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1})$,
za $\alpha_1 \neq 0$ i $\alpha_i \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Sigurne cifre

Neka je dat broj
$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1})$,
za $\alpha_1 \neq 0$ i $\alpha_i \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Značajna cifra je **sigurna** ako je $A_{x^*} \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}$, $0 < \omega \leq 1$.
Inače se za cifru kaže da je nesigurna ili sumnjiva.

Sigurne cifre

Neka je dat broj
$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1})$,
za $\alpha_1 \neq 0$ i $\alpha_i \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Značajna cifra je **sigurna** ako je $A_{x^*} \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}$, $0 < \omega \leq 1$.
Inače se za cifru kaže da je nesigurna ili sumnjiva.

Specijalno:

- $\omega = \dfrac{1}{2}$: α_k je sigurna u *užem smislu*,

Sigurne cifre

Neka je dat broj
$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1})$,
za $\alpha_1 \neq 0$ i $\alpha_i \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Značajna cifra je **sigurna** ako je $A_{x^*} \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}$, $0 < \omega \leq 1$.
Inače se za cifru kaže da je nesigurna ili sumnjiva.

Specijalno:

- $\omega = \frac{1}{2}$: α_k je sigurna u *užem smislu*,
- $\omega = 1$: α_k je sigurna u *širem smislu*.

Zaokrugljivanje brojeva

Neka je dat broj $x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \alpha_{m+1} \cdot 10^{n-m} + \cdots)$, koji želimo da aproksimiramo brojem sa m cifara tj. **zaokruglimo** na m cifara.

Zaokrugljivanje brojeva

Neka je dat broj
$x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \alpha_{m+1} \cdot 10^{n-m} + \cdots)$, koji želimo da aproksimiramo brojem sa m cifara tj. **zaokruglimo** na m cifara.

Neka je $R_m(x)$ deo broja nakon $m-$te cifre. Za približan broj x^* dobijen zaokrugljivanjem važi:

Zaokrugljivanje brojeva

Neka je dat broj
$x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \alpha_{m+1} \cdot 10^{n-m} + \cdots)$, koji želimo da aproksimiramo brojem sa m cifara tj. **zaokruglimo** na m cifara.

Neka je $R_m(x)$ deo broja nakon $m-$te cifre. Za približan broj x^* dobijen zaokrugljivanjem važi:

1. $R_m(x) < \frac{1}{2}10^{n-m+1} \Rightarrow x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1})$,

Zaokrugljivanje brojeva

Neka je dat broj
$x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \alpha_{m+1} \cdot 10^{n-m} + \cdots)$, koji želimo da aproksimiramo brojem sa m cifara tj. **zaokruglimo** na m cifara.

Neka je $R_m(x)$ deo broja nakon $m-$te cifre. Za približan broj x^* dobijen zaokrugljivanjem važi:

1. $R_m(x) < \frac{1}{2}10^{n-m+1} \Rightarrow x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1})$,
2. $R_m(x) > \frac{1}{2}10^{n-m+1} \Rightarrow x^* =$
   $\pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + (\alpha_m + 1) \cdot 10^{n-m+1})$,

Zaokrugljivanje brojeva

Neka je dat broj
$x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \alpha_{m+1} \cdot 10^{n-m} + \cdots)$, koji želimo da aproksimiramo brojem sa m cifara tj. **zaokruglimo** na m cifara.

Neka je $R_m(x)$ deo broja nakon $m-$te cifre. Za približan broj x^* dobijen zaokrugljivanjem važi:

1. $R_m(x) < \frac{1}{2}10^{n-m+1} \Rightarrow x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1})$,
2. $R_m(x) > \frac{1}{2}10^{n-m+1} \Rightarrow x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \cdots + (\alpha_m + 1) \cdot 10^{n-m+1})$,
3. $R_m(x) = \frac{1}{2}10^{n-m+1} \Rightarrow$ ukoliko je cifra α_m parna, koristimo prvo pravilo a inače drugo.

Primer: Jedan od načina da se izračuna vrednost integrala

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

je da se izvede rekurentna formula $I_0 = \ln 1.1$, $I_n = \dfrac{1}{n} - 10 I_{n-1}$, $n \geq 1$.

Primer: Jedan od načina da se izračuna vrednost integrala

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

je da se izvede rekurentna formula $I_0 = \ln 1.1$, $I_n = \dfrac{1}{n} - 10 I_{n-1}$, $n \geq 1$.

- Čest problem koji se javlja je *nestabilnost* algoritma kojim se rešava neki problem, koja nastaje gomilanjem računske greške.

- Jedan od čestih uzroka nestabilnosti algoritma je gubitak sigurnih cifara koji može nastati npr. oduzimanjem bliskih brojeva.

- Jedan od čestih uzroka nestabilnosti algoritma je gubitak sigurnih cifara koji može nastati npr. oduzimanjem bliskih brojeva.

Primer: Izračunajmo približno $x = 70 - \sqrt{4899}$, pri čemu se svi brojevi mogu zapisati sa 4 sigurne cifre.

- Jedan od čestih uzroka nestabilnosti algoritma je gubitak sigurnih cifara koji može nastati npr. oduzimanjem bliskih brojeva.

Primer: Izračunajmo približno $x = 70 - \sqrt{4899}$, pri čemu se svi brojevi mogu zapisati sa 4 sigurne cifre.

- Zapisujući rezultat sa 4 sigurne cifre, imamo da je $\sqrt{4899} = 69.99$, pa je približna vrednost $x^* = 70 - 69.99 = 0.01$. Dobili smo rezultat sa samo jednom sigurnom cifrom.

- Jedan od čestih uzroka nestabilnosti algoritma je gubitak sigurnih cifara koji može nastati npr. oduzimanjem bliskih brojeva.

Primer: Izračunajmo približno $x = 70 - \sqrt{4899}$, pri čemu se svi brojevi mogu zapisati sa 4 sigurne cifre.

- Zapisujući rezultat sa 4 sigurne cifre, imamo da je $\sqrt{4899} = 69.99$, pa je približna vrednost $x^* = 70 - 69.99 = 0.01$. Dobili smo rezultat sa samo jednom sigurnom cifrom.
- Važi: $70 - \sqrt{4899} = \dfrac{70^2 - 4899}{70 + \sqrt{4899}} = \dfrac{1}{70 + 69.99} = \dfrac{1}{140.0} =$ 0.007143, pa smo na ovaj način dobili rezultat sa 4 sigurne cifre.